Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ПЛАСТИНЕ С ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ВО ВРЕМЕНИ ТЕМПЕРАТУРОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Ю. А. Демьянов
(Москва)

Предположим, что полубесконечная пластинка, обтекаемая равномерным потоком жидкости со скоростью V_∞, начала нагреваться по некоторому закону $T_w(t)$ (T_{w0} — начальная температура поверхности). Задача заключается в определении поля температур в пограничном слое.

Предполагая постоянство коэффициента кинематической вязкости ν, для поля скоростей v_x и v_y в пограничном слое имеем решение Блязиуса

$$v_x = V_\infty f'(\zeta), \qquad v_y = {}^1/_2 \sqrt{\frac{\nu V_\infty}{x}} (\zeta f' - f), \qquad \zeta = \frac{y}{\sqrt{\nu x / V_\infty}} \tag{1}$$

Уравнение притока тепла имеет вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\nu}{P} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \nu \left(1 - \frac{1}{P}\right) \frac{\partial}{\partial y} \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \tag{2}$$

$$\theta = H + {}^1/_2 v_x^2$$

Здесь H — энтальпия, P — число Прандтля.

В переменных t, x, ζ уравнение (2) с использованием (1) запишется так:

$$\frac{x}{V_\infty} \frac{\partial \theta}{\partial t} + x f' \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{f}{2} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \frac{1}{P} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} + V_\infty^2 \left(1 - \frac{1}{P}\right) \frac{d}{d\zeta} (f' f'') \tag{3}$$

Граничные и начальные условия для уравнения (3) следующие:

$$\theta(t, x, 0) = H_w(t), \qquad \theta(t, x, \infty) = \theta_{00} = \text{const}, \qquad \theta(0, x, \zeta) = \theta_c$$

Здесь $\theta_c(f')$ — профиль энтальпии торможения для стационарного обтекания при $T_{w_0} = \text{const}$. Из дальнейшего видно, что изменение энтальпии на стенке может удовлетворять более общему закону

$$H_w(t, x) = a_0(t) + a_1(t) x + a_2(t) x^2 + \ldots$$

Решение будем предполагать в виде

$$\theta = \theta_c + \theta_1(t, x, \zeta)$$

Для θ_1 получим однородное уравнение

$$\frac{x}{V_\infty} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} + x f' \frac{\partial \theta_1}{\partial x} - \frac{f}{2} \frac{d\theta_1}{d\zeta} = \frac{1}{P} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \zeta^2} \tag{4}$$

со следующими начальными и граничными условиями:

$$\theta_1(t, x, 0) = H_w - H_{w_0}, \qquad \theta_1(t, x, \infty) = \theta_1(0, x, \zeta) = 0$$

Если граничное условие на стенке записать в форме:

$$H_w - H_{w0} = \Sigma A_n t^n$$

то решение можно искать в виде ряда

$$\theta_1 = \Sigma A_n t^n \varphi_n(t, x, \zeta)$$

в котором функции $\varphi_n(t, x, \zeta)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{x}{V_\infty}\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial t} + \frac{n}{t}\varphi_n\right) + xf'\frac{\partial\varphi_n}{\partial x} - \frac{f}{2}\frac{\partial\varphi_n}{\partial\zeta} = \frac{1}{P}\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial\zeta^2}$$

и условиям

$$\varphi_n(t, x, 0) = 1, \qquad \varphi_n(t, x, \infty) = 0 \tag{5}$$

Из соображений теории размерностей следует, что функции φ_n зависят лишь от двух безразмерных переменных $\xi = x / V_\infty t$ и ζ.

Уравнение (5) при этом принимает вид:

$$n\xi\varphi_n - \xi^2\frac{\partial\varphi_n}{\partial\xi} + \xi f'\frac{\partial\varphi_n}{\partial\xi} - \frac{f}{2}\frac{\partial\varphi_n}{\partial\zeta} = \frac{1}{P}\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial\zeta^2} \tag{6}$$

Решение последнего уравнения может быть получено в рядах при малых и больших значениях переменной ξ.

Легко показать, что при больших значениях ξ решение для φ_n представимо в виде:

$$\varphi_n = \sum_0^\infty y_k(z)\,\xi^{-{}^3/_2 k} \qquad (z = \zeta\sqrt{\xi})$$

где функции $y_k(z)$ удовлетворяют уравнениям и граничным условиям:

$$P^{-1}y_0'' + \tfrac{1}{2}zy_0' - ny_0 = 0$$

$$P^{-1}y_1'' + \tfrac{1}{2}zy_1' - \left(n + \tfrac{3}{2}\right)y_1 - \tfrac{1}{4}\alpha z^2 y_0' = 0$$

$$P^{-1}y_2'' + \tfrac{1}{2}zy_2' - (n+3)\,y_2 + \tfrac{3}{2}\alpha zy_1 - \tfrac{1}{4}\alpha z^2 y_1' + \tfrac{1}{5!}\alpha^2 z^5 y_0' = 0$$

$$P^{-1}y_3'' + \tfrac{1}{2}zy_3' - \left(n + \tfrac{9}{2}\right)y_3 - \tfrac{3}{4\cdot 4!}\alpha^2 z^4 y_1 + 3\alpha zy_2 - \tfrac{1}{4}\alpha z^2 y_2' +$$
$$+ \tfrac{1}{5!}\alpha^2 z^5 y_1' - \tfrac{77}{8\cdot 8!}\alpha^3 z^8 y_0' = 0$$

$$P^{-1}y_4'' + \tfrac{1}{2}zy_4' - (n+6)\,y_4 + \tfrac{9}{2}\alpha zy_3 - \tfrac{3}{2\cdot 4!}\alpha^2 z^4 y_2 + \tfrac{33}{8!}\alpha^3 z^7 y_1 +$$
$$+ \tfrac{1875}{8\cdot 11!}\alpha^4 z^{11} y_0' - \tfrac{77}{8\cdot 8!}\alpha^3 z^8 y_1' + \tfrac{1}{5!}\alpha^2 z^5 y_2' - \tfrac{1}{4}\alpha z^2 y_3' = 0$$

$$\alpha = f''(0), \quad y_0(0) = 1, \quad y_0(\infty) = 0, \quad y_k(0) = y_k(\infty) = 0 \quad \text{при } k > 0$$

Решения для $y_k(z)$ можно представить в виде:

$$y_0(z) = c_0 H_{2n}\left(\tfrac{1}{2}iz\sqrt{P}\right) Z_{2n}\left(\tfrac{1}{2}z\sqrt{P}, \infty\right)$$

$$y_k(z) = H_{2n+3k}\left(\tfrac{1}{2}iz\sqrt{P}\right)\int_\infty^z \exp\left(-\tfrac{1}{4}Px^2\right)\left[H_{2n+3k}\left(\tfrac{1}{2}ix\sqrt{P}\right)\right]^{-2}\times$$
$$\times\int_0^x \exp\left(\tfrac{1}{4}t^2P\right)H_{2n+3k}\left(\tfrac{1}{2}it\sqrt{P}\right)h_k(t)\,dt\,dx +$$
$$+ c_k H_{2n+3k}\left(\tfrac{1}{2}iz\sqrt{P}\right)\int_\infty^z \exp\left(-\tfrac{1}{4}x^2P\right)\left[H_{2n+3k}\left(\tfrac{1}{2}ix\sqrt{P}\right)\right]^{-2}dx$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots)$$

Здесь H_m — полиномы Эрмита m-ой степени

$$z_m(\beta, \vartheta) = \int\limits_{\vartheta}^{\beta} \frac{e^{-x^2} dx}{H_m{}^2(ix)}$$

$$h_1(t) = \tfrac{1}{4}\alpha P t^2 y_0'(t), \quad h_2(t) = \tfrac{1}{4}\alpha P t^2 y_1'(t) - \tfrac{3}{2}\alpha P t y_1 - \tfrac{1}{5!}\alpha^2 P t^5 y_0'(t)$$

$$h_3(t) = \tfrac{1}{4}\alpha P t^2 y_2'(t) + \tfrac{3}{4\cdot 4!}\alpha^2 P t^4 y_1(t) - 3\alpha t P y_2(t) - \\ - \tfrac{1}{5!}\alpha^2 P t^5 y_1'(t) + \tfrac{77}{8\cdot 8!}\alpha^3 P t^8 y_0'(t)$$

$$y_4(t) = \tfrac{1}{4}\alpha P t^2 y_3'(t) - \tfrac{9}{2}\alpha P t y_3(t) + \tfrac{3}{2\cdot 4!}\alpha^2 P t^5 y_2(t) - \\ - \tfrac{33}{8!}\alpha^3 P t^7 y_1(t) - \tfrac{1875}{8\cdot 11!}\alpha^4 P t'' y_0'(t) + \tfrac{77}{8\cdot 8!}\alpha^3 P t^8 y_1'(t) - \tfrac{1}{5!}\alpha^2 P t^5 y_2'(t)$$

$$c_0 = [H_{2n}(0) z_{2n}(0, \infty)]^{-1} \text{ при } 2n \text{ — четном}$$

$$c_0 = -i\,[H_{2n}'(0)]^{-1} \text{ при } 2n \text{ — нечетном}$$

Коэффиценты c_k находятся из условия $y_k(0) = 0$.

Для определения решения при малых значениях ξ в уравнении (6) целесообразно перейти к переменным ξ и f'

$$n\xi\varphi_n + \xi(f' - \xi)\frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi} = \frac{f''^2}{P}\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial f'^2} + \left(1 - \frac{1}{P}\right)\frac{ff''}{2}\frac{\partial \varphi_n}{\partial f'} \tag{7}$$

Тогда для функции $Y_k(f')$ ряда

$$\varphi_n = \sum_0^\infty \xi^k Y_k(f')$$

получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{f''^2}{P}\frac{d^2 Y_k}{df'^2} + \left(1 - \frac{1}{P}\right)\frac{ff''}{2}\frac{dY}{df'} = kf'Y_k + (n - k + 1) Y_{k-1} \tag{8}$$

с граничными условиями

$$Y_0(0) = 1, \quad Y_0(1) = 0, \quad Y_k(0) = Y_k(1) = 0 \quad \text{при } k < 0$$

Решение уравнения для $Y_0(f')$ соответствует квазистационарному характеру изменения температур в пограничном слое; его можно найти, например, в книге [1].

Приближенное решение для последующих функций Y_k легко получить, используя метод интегральных соотношений. В этом случае решения $Y_k(f')$ целесообразно представить полиномами степени m от f'; последние должны удовлетворять граничным условиям:

$$Y_k(0) = Y_k(1) = 0 \quad \text{при } k \geqslant 1$$

$$Y_1''(0) = \frac{nP}{\alpha^2}, \quad Y_k''(0) = 0 \quad \text{при } k \geqslant 2$$

и, кроме того, $m - 2$ условиям, полученным интегрированием уравнения (8), умноженного на f'^l ($l = 0, 1, 2, \ldots, m - 3$) от 0 до 1.

Для коэффициентов представления $Y_k(f')$ полиномами получим систему линейных алгебраических уравнений.

Например, при $m = 3$

$$Y_k = a_k (f' - f'^3) \qquad \text{при } k > 1$$

$$Y_1 = a_1 f' + \frac{n}{2\alpha^2 P} f'^2 - \left(a_1 + \frac{n}{2\alpha^2 P}\right) f'^3$$

и из интегральных соотношений при $P = 1$ и $k \geqslant 3$ получим

$$a_k = \frac{(k-1-n)}{4\left(\frac{2}{15} k + 6c_1\right)}, \qquad c_1 = \int_0^1 f''^2 f' df'$$

Отсюда

$$a_k = \frac{(k-1-n)(k-2-n)\ldots(2-n)\, a_2}{4^{k-2}} \left[\prod_{i=3}^{i=k} \left(\frac{2}{15} i + 6c_1\right)\right]^{-1}$$

Легко подсчитать, что

$$a_1 = \frac{nb_0}{\frac{2}{15} + 6C_1}, \qquad b_0 = \frac{c_0}{\alpha^2} - \frac{3c_1}{\alpha^2} + \frac{1}{40\alpha^2} - \frac{1}{2}, \qquad c_0 = \int_0^1 f''^2 df'$$

$$a_2 = \frac{n(1-n)\, b_1}{4\left(\frac{2}{15} + 6c_1\right)\left(\frac{2\cdot 2}{15} + 6c_1\right)}, \qquad b_1 = b_0 + \frac{1}{6\alpha^2}\left(\frac{2}{15} + 6c_1\right)$$

Следовательно

$$a_k = \frac{(k-1-n)(k-2-n)\ldots(1-n)\, nb_1}{4^{k-1}} \left[\prod_{i=1}^{i=k} \left(\frac{2}{15} i + 6c_1\right)\right]^{-1} \text{при } k > 1$$

Ряд для $(\partial \varphi_n / \partial f')_0$ сходится при $\xi < {}^8/_{15}$. Используя выражение для φ_n при малых и больших значениях ξ, получаем приближенное решение задачи во всей области изменения этой переменной.

Полученное решение может быть использовано и в том случае, когда вместо несжимаемой жидкости рассматривается газ с законом вязкости $\mu\rho = \text{const}$. В этом случае, как следует из работы 2, переменную ζ надо заменить на

$$\frac{1}{\sqrt{\nu x / V_\infty}} \int_0^y \frac{\rho}{\rho} \, dy$$

Поступила 22 X 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Современное состояние аэродинамики больших скоростей. Под общей редакцией Л. Хоуарта. Изд-во иностр. лит-ры, Москва, 1956
2. Демьянов Ю. А. Формирование пограничного слоя на пластине за движущимся скачком уплотнения. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 3.
3. Sparrow, Gregg. Nonsteady Surface Temperature Effect on forsed Convection Heat Transfer. IAS, 1957, 10.
4. Sparrow. The combined effect of the nonsteady velocity of the surface temperature on the heat-transfer. Jet Propulsion, 1958, vol. 28, 6.