

ПЕРЕНОС ТЕПЛА В ТУРБУЛЕНТНОМ ДВИЖЕНИИ

Л. Г. Л о й ц я н с к и й

(Ленинград)

1. Краткий обзор развития теории переноса тепла в турбулентном движении. Еще в 1910 г., а затем в 1928 г. Прандтль [1] и независимо от него в 1916 г. Тэйлор [2] предложили «двухслойную» (ламинарный подслой — турбулентное ядро) теорию теплообмена при числе Прандтля, отличном от единицы, когда аналогия Рейнольдса в своем классическом виде становится уже неприменимой. Приложение этой теории оказалось ограниченным узким интервалом значений числа Прандтля вблизи единицы.

Карману [3,4] принадлежала заслуга создания в 1934—39 гг. первой теории турбулентного теплообмена, учитывающей взаимодействие молекулярного и молярного процессов в жидкости. Интервал значений чисел Прандтля, в котором теория давала совпадающие с опытами результаты, заметно расширился. Отказавшись от «двухслойной» схемы, Карман поместил (фиг. 1) между ламинарным подслоем 1 и турбулентным ядром 2 потока новую, промежуточную, или, как ее часто называют, «буфферную» область 3, отобрав для нее более половины старого ламинарного подслоя и часть турбулентного ядра. В универсальных переменных

$$\eta = \frac{yc_*}{\nu}, \quad \varphi = \frac{u}{v_*}, \quad v_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (1.1)$$

где τ_w — напряжение трения на твердой стенке, u — продольная скорость, y — нормальная к поверхности координата, а ν и ρ — соответственно кинематический коэффициент вязкости и плотность жидкости; этот переходный слой располагается в интервале $5 \leq \eta \leq 30$. Распределение скоростей в потоке определяется системой равенств

$$\begin{aligned} \varphi &= \eta & \text{при } 0 \leq \eta \leq 5 \\ \varphi &= 11.5 \log \frac{\eta}{5} + 5 & \text{при } 5 \leq \eta \leq 30 \\ \varphi &= 5.75 \log \eta + 5.5 & \text{при } 30 \leq \eta \end{aligned} \quad (1.2)$$

Для определения теплоотдачи от стенки Карман ввел число Стэнтона

$$S_m = \frac{N_m}{R_m P} = \frac{q_w}{\rho U_m c_p \theta_m} \quad \left(N_m = \frac{q_w d}{\lambda \theta_m}, \quad R_m = \frac{U_m d}{\nu}, \quad P = \frac{\mu c_p}{\lambda} \right) \quad (1.3)$$

выражающее наиболее простую безразмерную комбинацию чисел Нуссельта N_m , Рейнольдса R_m и Прандтля P .

Здесь q_w — секундное количество тепла, проходящего через единицу поверхности тела, U_m — скорость в невозмущенном потоке вдали от поверхности тела, θ_m — разность между температурами поверхности и невозмущенного потока, μ , λ — соответственно динамический коэффициент вязкости и теплопроводность жидкости, c_p — теплоемкость. Путем простых вычислений Карман установил формулу

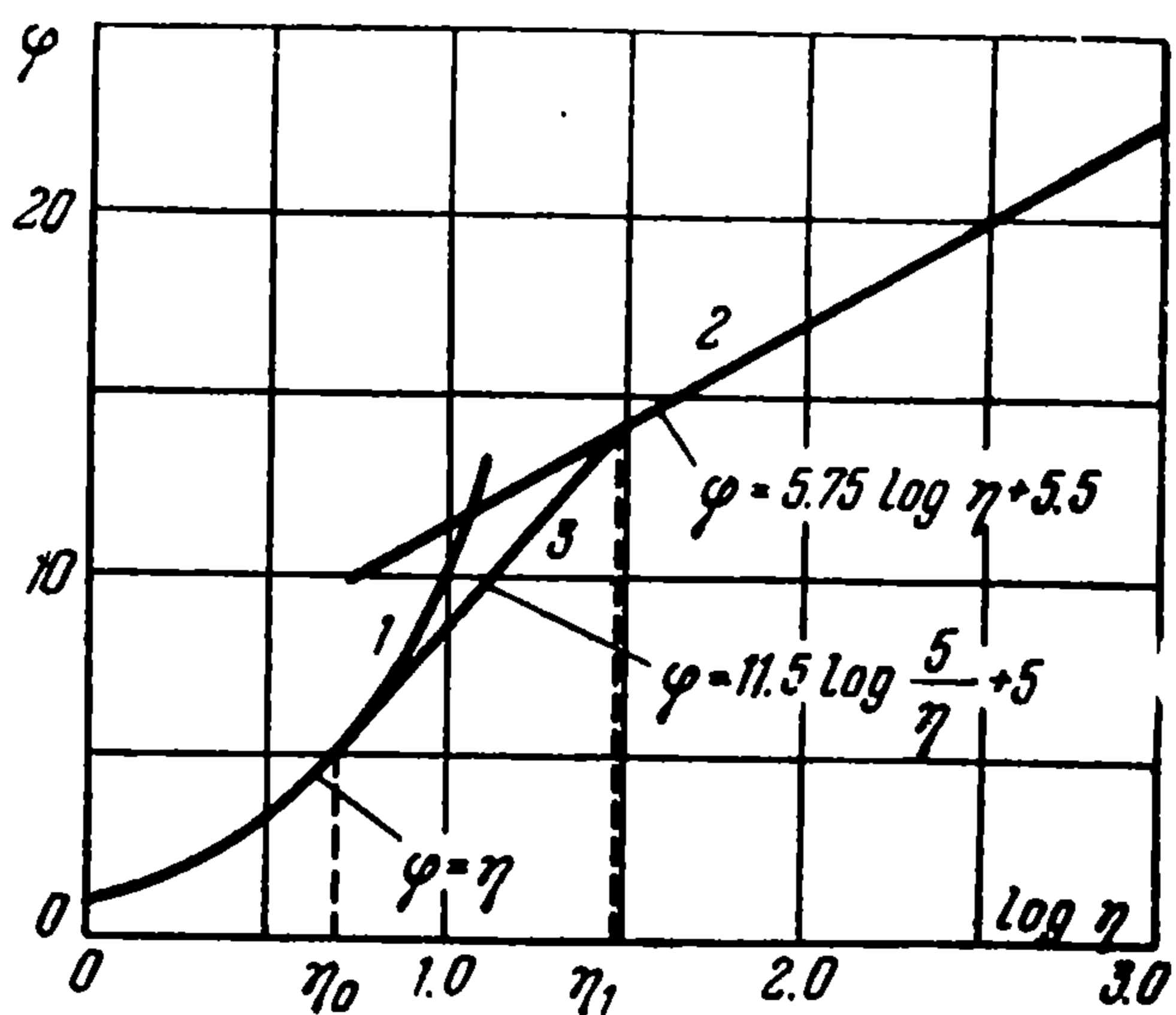
$$\frac{1}{S_m} = \frac{2}{c_f} + \left(\frac{2}{c_f} \right)^{1/2} g(P), \quad c_f = \frac{2\tau_w}{\rho U^2} \quad (1.4)$$

$$g(P) = 5 \left\{ (P - 1) + 2.3 \log \left[1 + \frac{5}{6} (P - 1) \right] \right\}$$

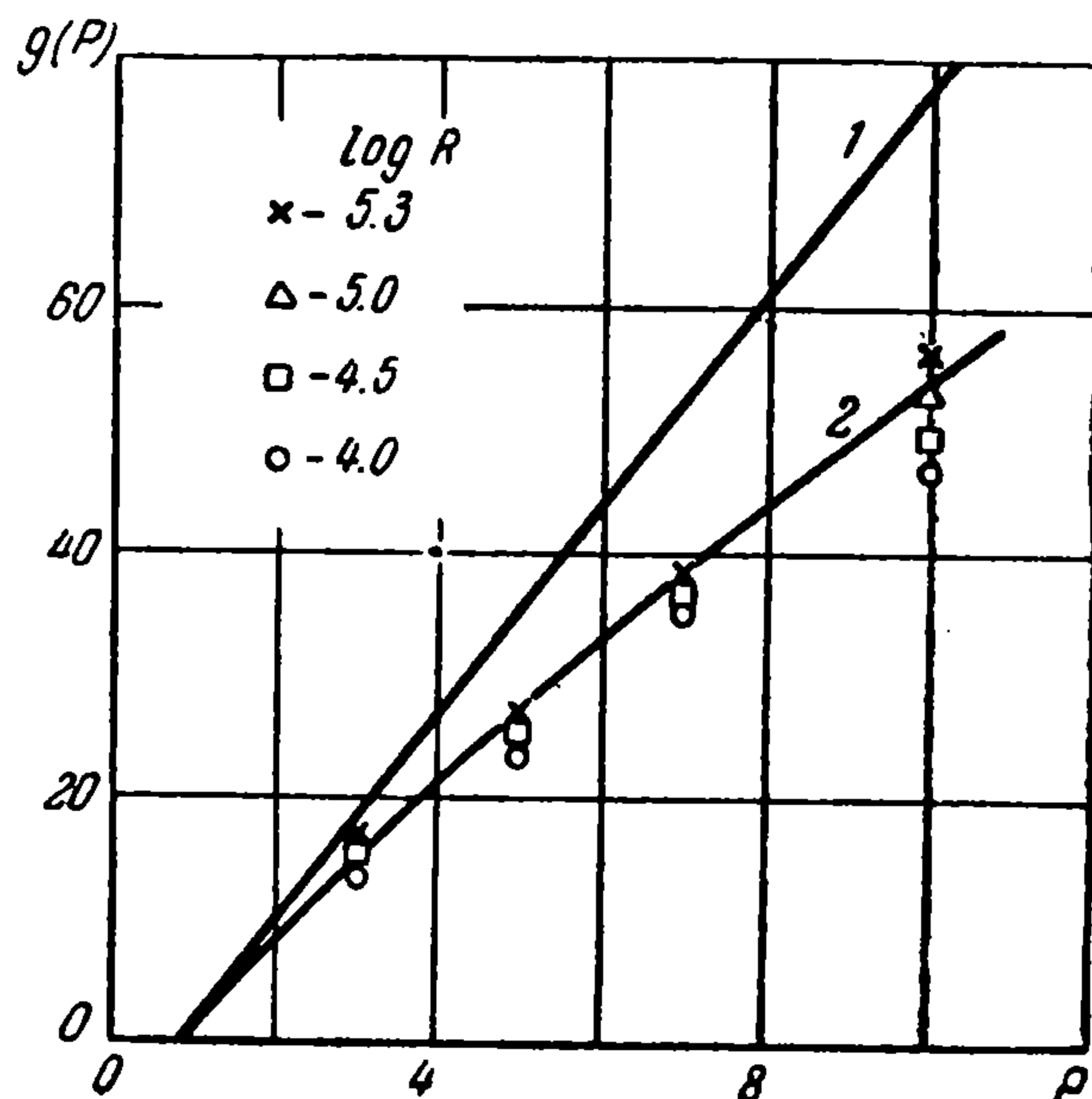
Аналогичные вычисления, проведенные для «двухслойной» теории Прандтля — Тэйлора, дали бы следующее выражение для функции $g(P)$

$$g(P) = 8.7 (P - 1) \quad (1.5)$$

Сравнивая результаты расчетов (фиг. 2) по формулам (1.4) и (1.5) с опытными материалами Игла и Фергюссона [6], Карман показал преимущество своей теории. Если формула Прандтля — Тэйлора (кривая 1) уже при значениях $P = 2$ давала заметные (фиг. 2) отклонения от опытных результатов Игла и Фергюссона при указанных значениях числа R , то формула Кармана (1.4) (кривая 2) оказалась применимой вплоть до $P = 15$. Карман сам отметил возрастающие расхождения своей теории с опытной кривой Диттуса и Белтера [6], начиная с $P = 15$. Последующее развитие теории и эксперимента показало, что причиной этого расхождения является отсутствие в теории Кармана учета влияния турбулентных пульсаций в пристеночной области. На наличие такого рода пульсаций и их связь с переносом тепла можно найти подтвержденные опытом соображения в работе Дель-Нунцио [7], относящейся еще к 1930—31 гг. Опыты



Фиг. 1



Фиг. 2

Рейхардта — Мотцфельда и Рейхардта — Шуца [8] показали влияние этих пульсаций на профиль осредненной скорости вблизи поверхности тела. Это влияние приводит к малому, но отчетливо заметному отклонению кривой скоростей от чисто ламинарной, представленной первой из формул (1.2) (что можно будет видеть на приводимой далее фиг. 4). К аналогичным результатам привели более поздние опыты Лауфера, Шубауэра и Клебанова [9]. У нас в Союзе на это обстоятельство обратили внимание П. Л. Капица, Л. Д. Ландау и В. Г. Левич [10]; последний положил его в основу своей теории тепло-массообмена.

Важный для теории турбулентного тепло-массообмена вопрос о том, каков должен быть закон убывания турбулентной составляющей трения

$$\tau_t = -\overline{\rho u'v'} = \rho \varepsilon \frac{du}{dy} \quad (1.6)$$

при приближении к стенке, был рассмотрен рядом авторов. Рейхардт [11], исходя из соображений о порядке убывания пульсаций ($u' \approx y$, $v' \approx y^2$), но, по-видимому, не считаясь с влиянием коэффициента корреляции между ними, пришел к закону куба $\varepsilon \approx y^3$; этот же закон использовался в исследованиях Лин, Мультон и Патнам [12].

В 1943 г. В. Г. Левич [10] путем соображений о порядке убывания пульсаций скорости, а также используя еще дополнительное допущение о независимости периода пульсаций от расстояния до стенки, пришел к выводу, что коэффициент турбулентного перемешивания ε должен при приближении к стенке убывать по закону четвертой степени расстояния до стенки. Как видно из формулы (1.6), непосредственно судить о законе убывания ε нельзя, так как пульсации скорости коррелированы, а о величине коэффициента корреляции трудно что-нибудь заранее сказать. Рассуждение Элрода [13] установившего, что показатель степени в законе убывания коэффициента турбулентной вязкости не может быть меньше четырех, оказались ошибочными. К закону четвертой степени пришел Дайслер [14]. На основании собранных им обширных опытных материалов по тепло-массопереносу, а также некоторых полуэмпирических соображений он установил формулу

$$\frac{\varepsilon}{\nu} = n^4 \eta^4, \quad n = 0,124 \quad (1.7)$$

Вопрос о теплопереносе при очень малых значениях числа Прандтля был изучен в работах Мартинелли [15] и Лайон [16]. Систематическое изложение результатов, полученных в этой области, можно найти в монографии С. С. Кутателадзе, В. М. Боршанского, И. И. Новикова и О. С. Федынского [17].

2. Обобщение гипотезы локальности на случай наличия взаимодействия между молярным и молекулярным обменами. Гипотеза локальности турбулентного переноса, лежащая в основе полуэмпирической теории Прандтля — Кармана, пренебрегающей влиянием молекулярной вязкости на молярный перенос количества движения, может быть с успехом применена и в том случае, когда молекулярные и молярные процессы количественно сравнимы один с другим, и пренебрегать их взаимодействием становится недопустимым.

В работе автора [18] была сделана попытка учета этого взаимодействия. С этой целью в полуэмпирическую теорию турбулентности было введено понятие о местном числе Рейнольдса. Это число было в то время определено, как «отношение кинематического коэффициента турбулентного обмена к кинематическому коэффициенту вязкости», т. е. соотношением ε / ν , причем, как об этом можно было заключить из последующего текста, под ε здесь понималась не зависящая явно от молекулярной вязкости величина коэффициента чисто турбулентного (молярного) обмена, характеризующаяся обычными для полуэмпирической теории формулами Прандтля и Кармана. Роль характерной длины в этом локальном числе Рейнольдса должен был играть «путь смешения» l , а характерной скорости U — величина относительной скорости между слоями в осредненном турбулентном движении $U = l \, du / dy$. Это привело к следующему количественному определению локального числа Рейнольдса:

$$R = \frac{Ul}{\nu} = \frac{l^2}{\nu} \frac{du}{dy} \quad (2.1)$$

В той же работе указывалось, что локальный аналог числа Эйлера

$$E = \frac{\tau}{\rho U^2} = \frac{\tau}{\rho l^2 (du / dy)^2} \quad (2.2)$$

где τ — действительное напряжение турбулентного трения, заключающее в себе как молекулярный, так и молярный обмен количеств движения, должно быть функцией локального числа Рейнольдса R

$$\frac{\tau}{\rho l^2 (du / dy)^2} = F \left(\frac{l^2}{\nu} \frac{du}{dy} \right) \quad (2.3)$$

Попытки определения вида функции F потерпели в то время неудачу. В работе [19] уравнение связи (2.3) составлялось в форме

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} f(R), \quad f(R) = RF(R) \quad (2.4)$$

При этом под R понималось как выражение (2.1), так и более общее с точки зрения гипотезы локальности выражение

$$R = \frac{\kappa^2}{\nu} \frac{(du / dy)^3}{(d^2u / dy^2)^2} \quad (2.5)$$

Форма зависимости $f(R)$ в этой работе выбиралась из чисто интуитивных соображений в виде отрезка равнобокой гиперболы вне ламинарного подслоя и прямолинейного отрезка, параллельного оси R в самом подслое.

Рассматривая случай установившегося турбулентного движения, параллельного безграничной гладкой, плоской стенке, примем

$$l = \kappa y, \quad \tau = \mu \frac{du}{dy} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\nu}\right) = \mu \frac{du}{dy} f(R) = \text{const} = \tau_w \quad (2.6)$$

Тогда будем иметь

$$1 = \frac{d\varphi}{d\eta} f(R), \quad R = \kappa^2 \eta^2 \frac{d\varphi}{d\eta} \quad (2.7)$$

Вблизи гладкой стенки, где $\psi \doteq \eta$, согласно (2.7) и формуле Дайслера (1.7), получим

$$f(R) \doteq 1 + n^4 \eta^4 \doteq 1 + \alpha R^2 \quad \left(\alpha = \left[\frac{n}{\kappa}\right]^4\right) \quad (2.8)$$

При $\kappa = 0.4$ и $n = 0.124$ имеем $\alpha = 0.0092$.

Вдалеке от стенки можно принять, что обычная молекулярная вязкость не влияет на молярные, турбулентные процессы, так что справедливо асимптотическое (при больших R) равенство

$$f(R) \sim R + 1 \quad (2.9)$$

выражающее простую суперпозицию молекулярного и молярного трения.

Установленные таким образом предельные выражения (2.8) и (2.9), соответствующие малым и большим R , можно положить в основу приближенного полуэмпирического определения характеристической функции взаимодействия молекулярного и молярного обмена $f(R)$ во всем интервале изменения R от 0 до ∞ . Для этого заметим, что ранее введенная функция $F(R)$ согласно ее определению (2.3) и только что установленным равенствам (2.8) и (2.9) должна вести себя соответственно при малых и больших значениях локального числа Рейнольдса как

$$F(R) \doteq \frac{1}{R} + \alpha R, \quad F(R) \sim 1 + \frac{1}{R} \quad (2.10)$$

Будем исходить из качественной аналогии между зависимостями величины F , представляющей согласно (2.3) локальное число Эйлера, от локального рейнольдсова числа R и коэффициента сопротивления гладкой трубы от рейнольдсова числа потока в целом. Тогда из (2.10) следует, что функция

$$F_1(R) = F(R) - \frac{1}{R} \quad (2.11)$$

будет вместе со всеми своими производными ограниченной, непрерывной, гладкой и монотонной функцией R в интервале $(0 \leq R < \infty)$. Замечая, что при $R \rightarrow \infty$ функция $F_1(R)$ стремится к конечной величине, равной единице, можно положить при больших R

$$\frac{dF_1}{dR} = k(1 - F_1)^r \quad (2.12)$$

где k и r — пока неопределенные положительные числа.

Составляя последовательные производные по R от обеих частей уравнения (2.12) и пользуясь наложенными на эти производные условиями ограниченности, убедимся, что должно быть $r \geq 1$.

Интегрирование уравнения (2.12) дает

$$F_1 = 1 - [C + k(r-1)R]^{-\frac{1}{r-1}} \quad (2.13)$$

Если потребовать, чтобы функция $F_1(R)$ удовлетворяла обоим предельным условиям (2.10), то произвольные постоянные C и k придется принять равными

$$C = 1, \quad k = \alpha \quad (2.14)$$

так что будет

$$F_1(R) = 1 - [1 + \alpha(r-1)R]^{-\frac{1}{r-1}} \quad (2.15)$$

а следовательно,

$$F(R) = 1 + \frac{1}{R} - [1 + \alpha(r-1)R]^{-\frac{1}{r-1}} \quad (2.16)$$

Итак, согласно формуле (2.4), получаем следующее выражение для искомой характеристической функции взаимодействия:

$$f(R) = 1 + R \{1 - [1 + \alpha(r-1)R]^{-\frac{1}{r-1}}\} \quad (2.17)$$

Постоянная r при этом остается неопределенной.

Пользуясь (2.17), составим асимптотическое (при больших R) разложение $f(R)$

$$f(R) \sim R + 1 - [\alpha(r-1)]^{-\frac{1}{r-1}} R^{-\frac{2-r}{r-1}} \quad (2.18)$$

Замечая, что по принятому ранее условию (2.9) независимости вдалеке от твердой границы процессов молекулярного и молярного обмена старшими членами в этом разложении будут первые два, заключим, что третий член разложения должен содержать R в отрицательной степени, так что, принимая еще во внимание отмеченное ранее неравенство $r \geq 1$, найдем

$$1 \leq r < 2 \quad (2.19)$$

Возвращаясь теперь к равенству (2.17) и полагая в нем $r - 1 = 1/s$, причем должно быть $1 < s < \infty$, получим такое окончательное представление функции взаимодействия

$$f(R) = 1 + R \left[1 - \left(1 + \frac{\alpha}{s} R \right)^{-s} \right] \quad (2.20)$$

При современном состоянии теории турбулентного переноса нет оснований для рационального определения константы s . Аналогично тому, как для определения величины α понадобилось использование опытных материалов по тепло-массопереносу при очень больших значениях чисел Прандтля (или Шмидта), точно так же для разыскания s необходимо сравнить решение с опытными материалами при очень малых значениях этих чисел.

Заметим, что правая часть (2.20) слабо зависит от s . Так, при наименьшем целом $s = 2$ имеем

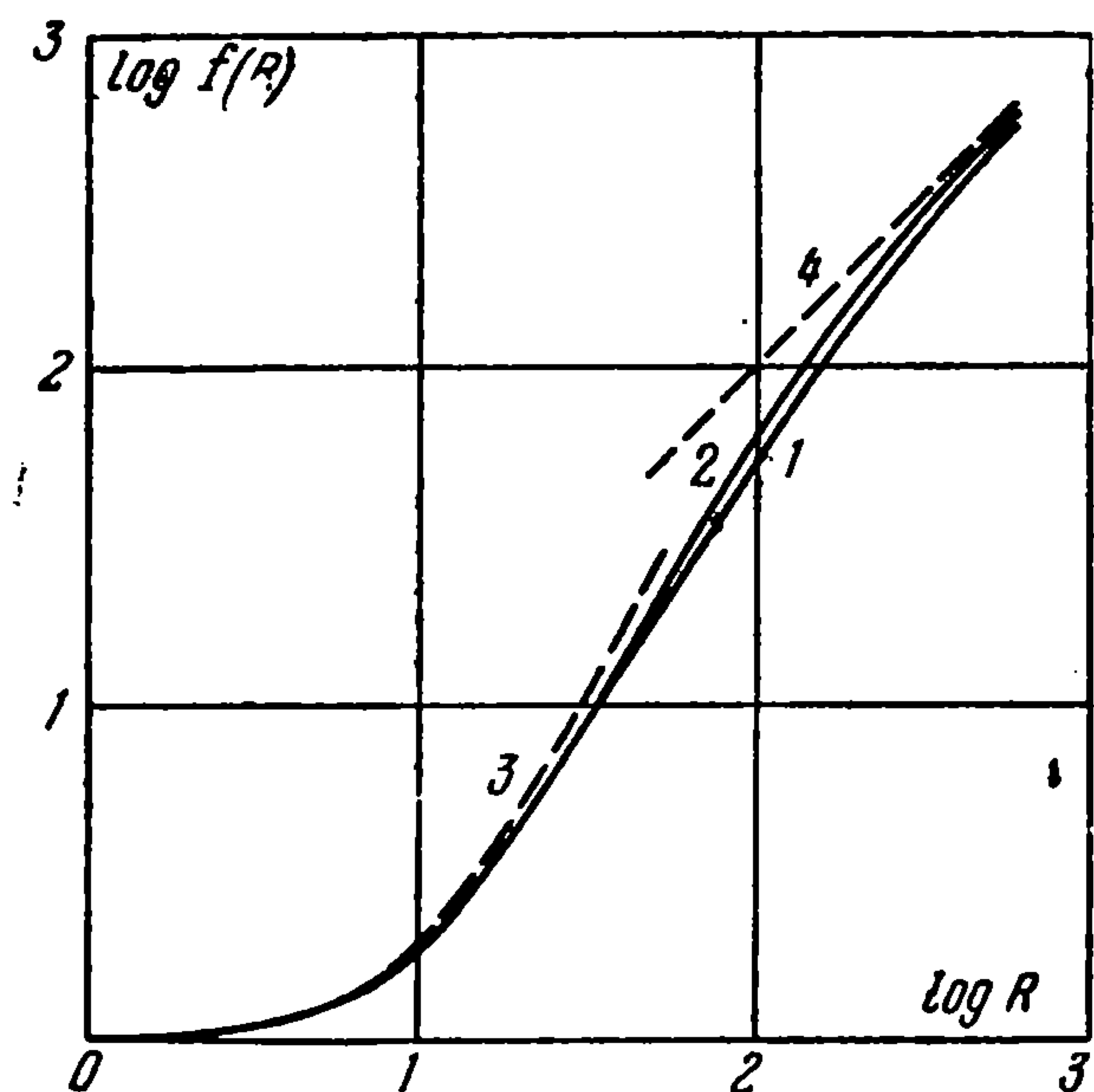
$$f(R) = 1 + R - \frac{R}{(1 + \frac{1}{2}\alpha R)^2} \quad (2.21)$$

а при $s = \infty$ получим экспоненциальный закон

$$f(R) = 1 + R (1 - e^{-\alpha R}) \quad (2.22)$$

На фиг. 3 сплошными кривыми представлены две формы функций $f(R)$ соответственно по формуле (2.21), кривая 1, и по формуле (2.22), кривая 2. Как видно, они мало отличаются одна от другой. На той же фигуре пунктиром даны кривые 3 и 4, соответствующие формулам (2.8) и (2.9), выражающие поведение характеристической функции при очень малых и очень больших значениях R .

3. Распространение теории Кармана на большие значения чисел Прандтля. Сохраним общую схему Кармана, разбивая поток на три слоя, с тем принципиальным отличием, что в зоне ламинарного подслоя ($0 \leq \eta \leq \eta_0$) примем во внимание наличие турбулентных пульсаций и, в соответствии с этим, примем вместо $f(R) = 1$ равенство (2.8). В промежуточной области ($\eta_0 \leq \eta \leq \eta_1$), следуя Карману, зададим распределение скоростей по полулогарифмической прямой, сращивая ее плавно с новым профилем скоростей в ламинарном подслое и, наконец, в турбулентном ядре используем обычный логарифмический закон скоростей в установившемся турбулентном движении вдоль гладкой стенки. Эта упрощенная схема не требует знания поведения функции $f(R)$ при больших R и,



Фиг. 3

кроме того, позволяет получить решение в замкнутой форме.

Предполагая поток жидкости установившимся и в тепловом смысле, положим

$$q = \lambda \frac{d\theta}{dy} \left(1 + P \frac{\varepsilon}{\nu} \right) = \\ = \lambda \frac{d\theta}{dy} [1 - P + P f(R)] = q_w \quad (3.1)$$

или в универсальных координатах

$$1 = \frac{1}{P} \frac{d\psi}{d\eta} [1 - P + P f(R)] \quad (3.2)$$

где положено

$$\psi = \frac{\theta}{\theta_*}, \quad \theta_* = \frac{q_w}{\rho c_p \nu_*} \quad (3.3)$$

Система уравнений (2.7) и (3.2) позволяет получить следующее параметрическое решение с величиной R в качестве параметра:

$$\varphi = \frac{1}{2\kappa} \int_0^R \frac{Rf'(R) + f(R)}{\sqrt{Rf^3(R)}} dR, \\ \psi = \frac{1}{2\kappa} \int_0^R \frac{Rf'(R) + f(R)}{[P^{-1} + f(R) - 1] \sqrt{Rf(R)}} dR, \quad \eta = \frac{1}{\kappa} \sqrt{Rf(R)} \quad (3.4)$$

Используем при малых R вместо $f(R)$ ее выражение (2.8) и введем замену переменных

$$\alpha R^2 = t^4 \quad (3.5)$$

Система уравнений (3.4) приведет к следующей:

$$\varphi = \frac{1}{n} \int_0^t \frac{1 + 3t^4}{(1 + t^4)^{3/2}} dt, \\ \psi = \frac{1}{n} \int_0^t \frac{1 + 3t^4}{(P^{-1} + t^4)(1 + t^4)^{3/2}} dt, \quad \eta = \frac{1}{n} t (1 + t^4)^{1/2} \quad (3.6)$$

Для вычисления интегралов применим разложение подынтегральных выражений в сходящиеся при $t < 1$ степенные ряды. При этом второй интеграл системы (3.6), кроме алгебраической, будет содержать еще трансцендентную часть $B(P^{1/4}t)$, где символом B обозначена функция

$$B(x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} \quad (3.7)$$

затабулированная Бахметьевым [20].

Таким образом, при $t < 1$ и $n = 0.124$ будет

$$\begin{aligned} \varphi &= 8.06 (t + 0.3t^5 - 0.291t^9 + 0.264t^{13} - \dots) \\ \psi &= 8.06 [(2.5t - 0.225t^5 + 0.09t^9 - \dots) + \\ &+ \frac{1}{P} (1.125t - 0.1625t^5) + \frac{0.08125t}{P^2} + (1 - \frac{2.5}{P} - \frac{1.125}{P^2}) P^{1/4} B(P^{1/4}t)] \quad (3.8) \end{aligned}$$

$$\eta = 8.06t (1 + t^4)^{1/2} = 8.06 (t + 0.5t^5 - 0.125t^9 + \dots)$$

Используем это решение в области ($0 \leq \eta \leq \eta_0$, $0 \leq t \leq t_0$), причем определим значения t_0 и η_0 из условия, чтобы касательная в полулогарифмическом масштабе ($\varphi, \log \eta$), проведенная к профилю скоростей (3.8) в точке $\eta = \eta_0$, прошла через точку ($\eta_1 = 30$, $\varphi_1 = 13.63$) на полулогарифмической прямой

$$\varphi = 5.75 \log \eta + 5.24 \quad (3.9)$$

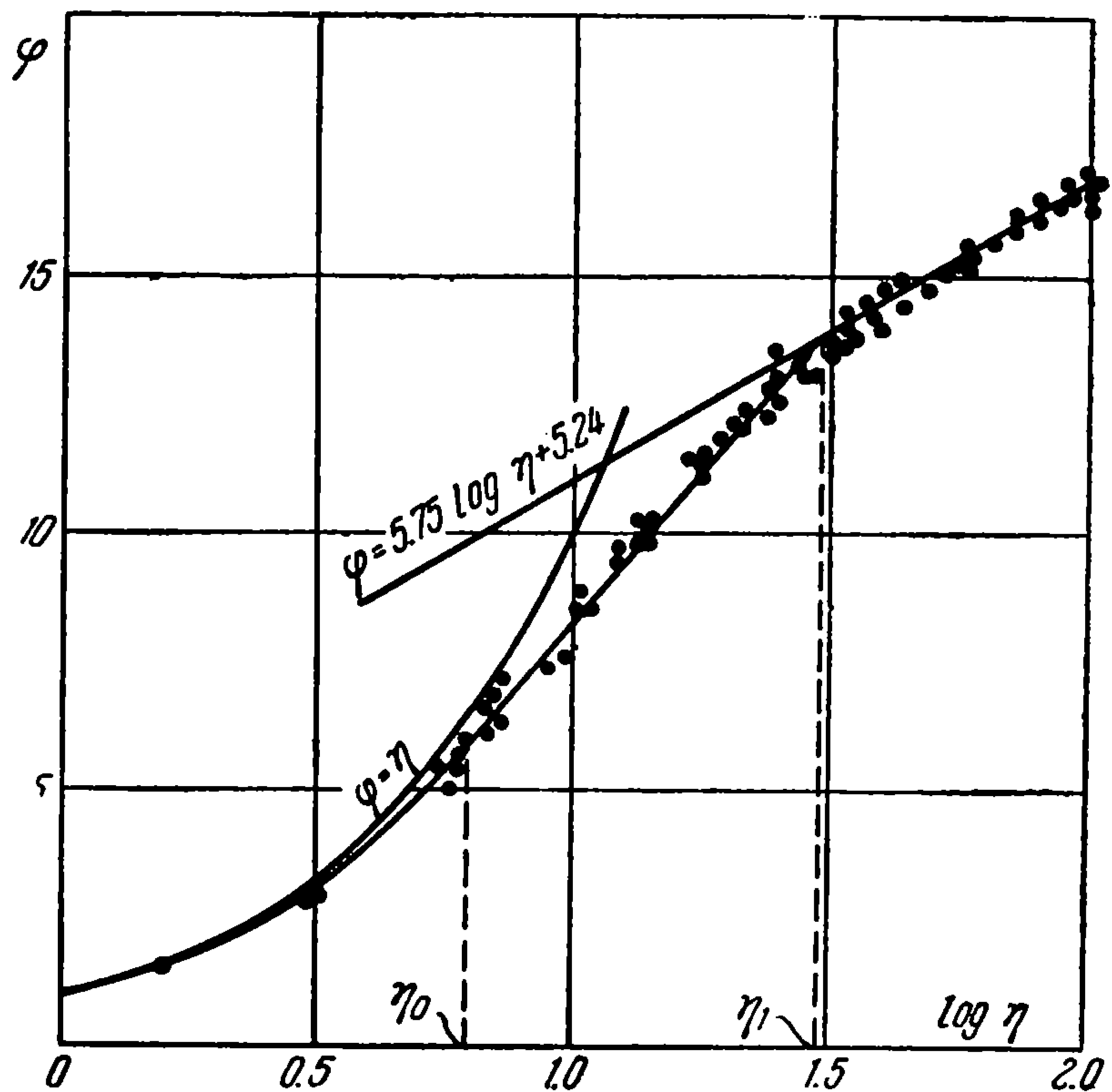
соответствующей распределению скорости по Никурадзе в области, удаленной от твердой поверхности. Простые вычисления показывают, что для этого надо положить $t_0 = 0.68$, $\eta_0 = 6.07$. Уравнение этой касательной будет

$$\begin{aligned} \varphi &= 11.3 \log \eta - 3.09 \\ 6.07 &\leq \eta \leq 30 \quad (3.10) \end{aligned}$$

Наконец, при $\eta \geq 30$ профилем скоростей будет служить полулогарифмическая прямая (3.9). Предлагаемый профиль скоростей показан на фиг. 4.

Выбранному только что приближенному профилю скоростей соответствуют простые аналитические выражения для профиля температур, состоящие из второго равенства системы (3.8) при $0 \leq t \leq t_0$, $0 \leq \eta \leq \eta_0$ и следующих равенств при $\eta \geq 6.07$

$$\begin{aligned} \psi &= 11.3 \log \left(\eta + 4.98 - \frac{4.98}{P} \right) - 11.3 \log \left(11.05 - \frac{4.98}{P} \right) + \psi_0 \quad (6.07 \leq \eta \leq 30) \\ \psi &= 5.75 \log \eta - 8.49 + \psi_1 \quad (30 \leq \eta) \end{aligned} \quad (3.11)$$



Фиг. 4

Здесь под ψ_0 понимается ψ , вычисленное по второму равенству (3.8) при $t = t_0 = 0.68$, а под ψ_1 значение ψ , вычисленное по первому равенству системы (3.11) при $\eta = \eta_1 = 30$. Приводим выражения этих величин

$$\psi_0 = 13.46 + \frac{5.976}{P} + \frac{4.453}{P^2} + \left(8.06 - \frac{20.15}{P} - \frac{9.068}{P^2} - \frac{6.549}{P^3}\right) P^{3/4} B(0.68 P^{1/4}) \quad (3.12)$$

$$\psi_1 = 11.3 \log \left(25.09 + \frac{4.91}{P}\right) - 11.3 \log \left(1.16 + \frac{4.91}{P}\right) + \psi_0 \quad (3.13)$$

После этого уже не составляет труда найти новое выражение для функции Кармана $g(P)$, входящей в определение (1.4) числа S_m . Принимая, как и ранее, индекс m для обозначения величин на оси потока, будем иметь по (1.3) и (3.3)

$$\frac{1}{S_m} = \varphi_m \psi_m \quad (3.14)$$

При этом согласно (3.9) и последнему равенству системы (3.11) можно положить

$$\psi_m = 5.75 \log \eta_m - 8.49 + \psi_1 = \varphi_m - 13.73 + \psi_1$$

Кроме того, имеем

$$\varphi_m = \left(\frac{2}{c_f}\right)^{1/2}, \quad c_f = \frac{2\tau_w}{\rho U_m^2}$$

Отсюда следует

$$\frac{1}{S_m} = \frac{2}{c_f} + \left(\frac{2}{c_f}\right)^{1/2} (\psi_1 - 13.73) \quad (3.15)$$

Сравнивая выражение (3.15) с (1.4) и используя (3.13), получим новое выражение для функции Кармана

$$g(P) = \psi_1 - 13.73 = 11.3 \log \left(25.09 + \frac{4.91}{P}\right) - 11.3 \log \left(1.16 + \frac{4.91}{P}\right) - \quad (3.16)$$

$$- 0.27 + \frac{5.976}{P} + \frac{4.453}{P^2} + \left(8.06 - \frac{20.15}{P} - \frac{9.068}{P^2} - \frac{6.549}{P^3}\right) P^{3/4} B(0.68 P^{1/4})$$

справедливое для всех значений чисел Прандтля $P \geq 1$.

Составляя число Нуссельта N_m , содержащее в качестве характерной температуры разность температур на твердой стенке и на оси потока, и принимая

$$\frac{1}{2} c_f = 0.04 R_m^{-0.25} \quad \left(R_m = \frac{U_m d}{\nu}\right)$$

получим

$$N_m = S_m R_m P = \frac{0.04 R_m^{3/4} P}{1 + 0.2 R_m^{-1/8} g(P)} \quad (3.17)$$

Так, например, при $R_m = 10^4$ и числе Прандтля $P = 100$, по (3.17) найдем $N_m = 212$. Расчет по эмпирической формуле Диттуса и Белтера [6]

$$N_m = 0.0254 R_m^{0.8} P^{0.35}$$

даст $N_m = 200$. Разница несомненно лежит в пределах погрешности формулы Диттуса и Белтера.

Из равенства (3.16) вытекает следующее асимптотическое (при больших P) выражение функции $g(P)$

$$g(P) \sim 8.97 P^{3/4} + 6.26 - \frac{22.4}{P^{1/4}} + O(P^{-1}) \quad (3.18)$$

При практических расчетах принято обычно пользоваться расходными средними: скоростью \bar{u} и температурой $\bar{\theta}$.

Заметим, что

$$S = \frac{1}{\bar{\varphi}\bar{\psi}} = \frac{1}{\varphi_m \psi_m} \frac{\psi_m \varphi_m}{\bar{\psi} \bar{\varphi}} = S_m \frac{\psi_m}{\bar{\psi}} \frac{\varphi_m}{\bar{\varphi}} \quad (3.19)$$

$$c_f = \frac{2\tau_w}{\rho U_m^2} = 2 \frac{1}{\bar{\varphi}^2} \left(\frac{\bar{\varphi}}{\varphi_m} \right)^2, \quad \bar{\varphi} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}}$$

Поэтому, переходя к средним характеристикам, будем иметь

$$S = \frac{(\psi_m/\bar{\psi}) \lambda}{3(\varphi_m/\bar{\varphi}) + 2\sqrt{2} \sqrt{\lambda} g(P)} \quad (3.20)$$

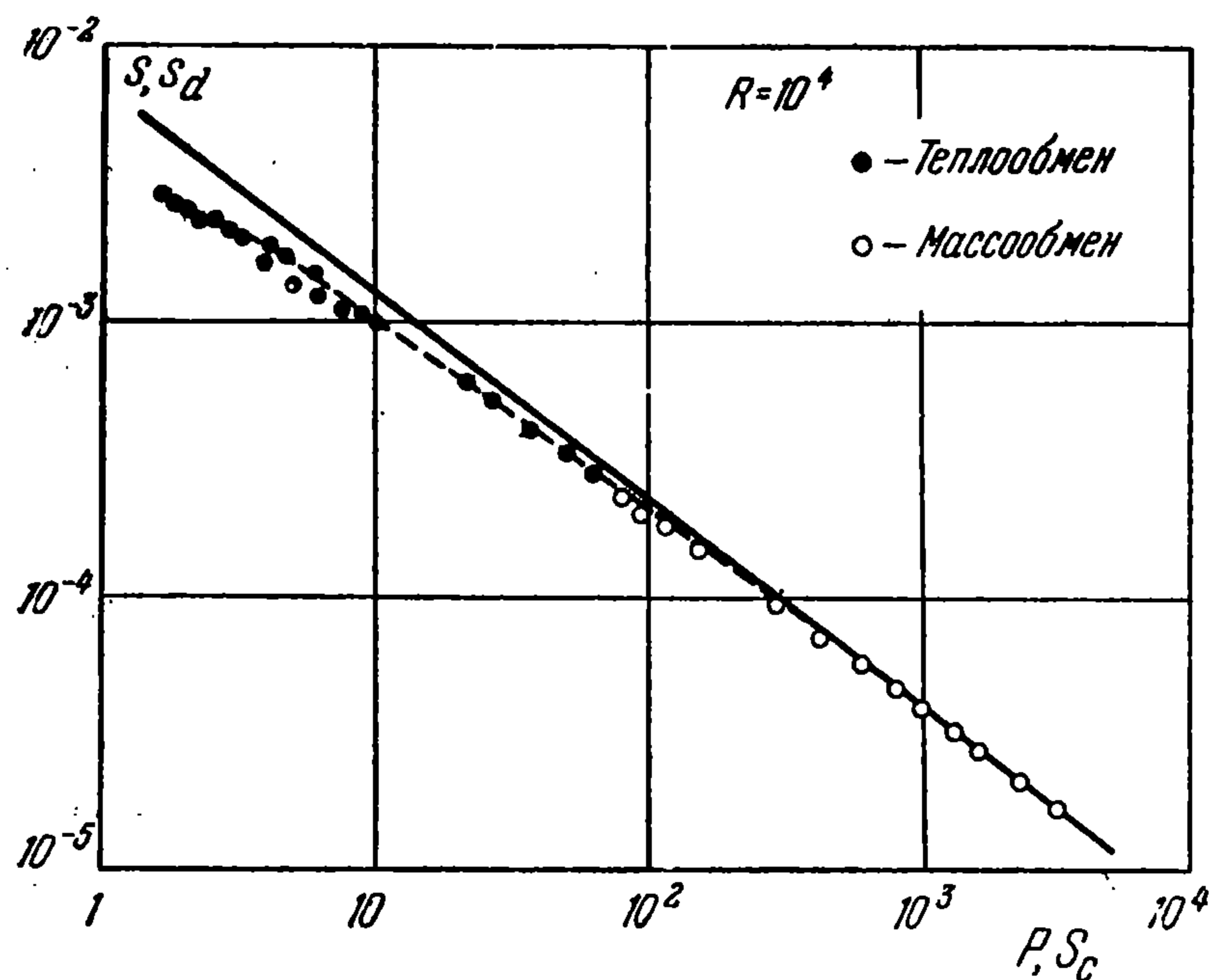
При больших значениях числа P можно принять $\psi_m = \bar{\psi}$, кроме того, по известному эмпирическому соотношению Никурадзе

$$\frac{\varphi_m}{\bar{\varphi}} = 1 + 4.08 \frac{1}{\bar{\varphi}} = 1 + 1.41 \sqrt{\lambda} \quad (3.21)$$

Пользуясь этими приближенными соотношениями и асимптотическим разложением (3.18), получим по (3.20) следующее асимптотическое равенство для числа Стэнтона

$$S \sim 0.04\lambda^{1/2}P^{-3/4} - (0.0124 + 0.0175\lambda^{1/2})P^{-3/2} + 0.0985\lambda^{1/2}P^{-7/4} + O(P^{-9/4}) \quad (3.22)$$

Приводим на фиг. 5 заимствованную из ранее цитированной работы Дайслера эмпирическую кривую зависимости теплового S , а следовательно, и диффузионного



Фиг. 5

чисел Стэнтона S_d , от чисел Прандтля P и Шмидта S_c , соответственно, при числе потока $R = 10^4$. Жирная прямая выражает предельный закон Дайслера, совпадающий с первым членом асимптотического разложения (3.22); пунктиром показан результат расчета по (3.22) при использовании первых трех членов разложения. Совпадение с опытом имеет место в широком

диапазоне чисел Прандтля даже при значениях $P < 10$.

В предыдущем остался не затронутым вопрос о величине отношения коэффициентов турбулентного перемешивания теплосодержания и количества движения. По опытам Людвига [21], это отношение возрастает от стенки к оси трубы, а по опытам К. Сляйхера [22], наоборот, убывает. Противоречивость экспериментальных исследований в этом направлении заставила нас принять это отношение равным единице.

Исследование теплопереноса при малых значениях числа Прандтля связано с некоторыми расчетными сложностями при вычислении средней температуры. Кроме того, по-видимому, еще отсутствуют достаточно точные опытные материалы при очень малых значениях числа Прандтля, необходимые для установления значения постоянной s в формуле (2.20).

Изложенные выше соображения относительно теплопереноса в турбулентном движении имеют силу и для явления массопереноса. Разница заключается лишь в том, что числа Стэнтона или Нуссельта должны быть заменены их диффузионными аналогами, а число Прандтля — числом Шмидта.

Поступила 6 IV 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. P r a n d t l L. Bemerkung über den Wärmeübergang im Rohr. Physik. Zeitschr., 1928, vol. 29, p. 487—489.
2. T a y l o r G. J. Conditions at the surface of hot body exposed to the wind. Techn. Rep. of the Adv. Committee for Aeronautics, vol. 2, Rep. and Mem., 1916, No. 272, May, p. 423.
3. K a r m a n Th. Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz. Nachr. d. Gessellsch. d. Wissensch. zu Göttingen. Math. Phys. Kl., 1930; русск. перевод в сборн. «Проблемы турбулентности», ОНТИ, 1936.
4. K a r m a n Th. Some aspects of the theory of turbulent motion. Proceed. of the Intern. Congr. for applied mechanics, Cambridge, 1934; русск. перевод в сборн. «Проблемы турбулентности», ОНТИ, 1936.
5. E a g l e A., F e r g u s s o n R. On the coefficient of heat transfer from the internal surface of tube walls. Proceed. of the Royal Soc. of London, 1930, ser. A, vol. 127, p. 540.
6. D i t u s F., B o e l t e r L. Heat transfer in automobile radiators of the tubular type. Univ. of California Publications in Engin. vol. 2, No 13, p. 443.
7. D e l-N u n z i o B. La distribuzione dei vortici nelle condotte chiuse in regime turbulente e laminare. Elettrotecnica, No. 14, 1931; русск. перевод в сб. «Проблемы турбулентности», ОНТИ, 1936.
8. R e i c h a r d t H. Die Wärmeübertragung in turbulenten Reibungsschichten. ZAMM, Bd. 20, H. 6, 1940.
9. C l a u s e r F. Turbulent boundary layer. Advances in appl. mechanics, vol. IV, NY, 1956; русск. перевод в сборн. «Проблемы механики», т. II, ИЛ, 1959.
10. Л е в и ч В. Г. Физико-химическая гидродинамика. Гос. Физ.-мат. издат., 1959.
11. R e i c h a r d t H. Der Einfluss der wandnahen Strömung auf den turbulenten Wärmeübergang. Mitteil. a. d. Max — Planck — Institut für Strömungsforschung, No. 3, 1950, а также — Vollständige Darstellung der turbulente Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen. ZAMM, Bd. 31, N 7, 1951.
12. L i n C., M o u l t o n R., P u t n a m G. Mass transfer between solid wall and fluid streams. Industr. and Engin. Chemistry, vol. 45, No 3, 1953.
13. E l r o d H. Note of the turbulent shear stress near a wall. Journ. Aeron. Sc., vol. 24, No. 6, 1957. Опровержение см. в том же журнале, vol. 27, No 2, 1960.
14. D e i s s l e r R. Analysis of turbulent heat transfer, mass transfer and friction in smooth tubes at high Prandtl and Schmidt Numbers. NACA Rep. No. 1210, 1959.
15. M a r t i n e l l i R. Heat transfer to molten metals. Trans. ASME, vol. 69, N 8, 1947.
16. L y o n R. Liquid metal heat-transfer coefficients. Chemical Engin. Progress, vol. 47, No. 2, 1951.
17. К у т а т е л а д з е С. С., Б о р и ш а н с к и й В. М., Н о в и к о в И. И., Ф е д ы н с к и й О. С. Жидкометаллические теплоносители. Атомиздат, 1958.
18. Л о й ц я н с к и й Л. Г. Турбулентное движение жидкости и внутренняя задача. Изв. научно-иссл. ин-та гидротехники, 1933, т. IX.
19. Л о й ц я н с к и й Л. Г. Гипотеза локальности в турбулентном движении жидкости при наличии вязкости. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 5.
20. Е с ь м а н И. Г. Гидравлика. ГОНТИ НКТП, 1938. табл. 58.
21. L u d w i e g H. Bestimmung des Verhältnisses der Austauschkoefizienten für Wärme und Impuls bei turbulenten Grenzschichten. Zeitschr. f. Flugwis. 4, H. 1/2, 1956.
22. S l e i c h e r C. Jn. Experimental velocity and temperature profiles for air in turbulent pipe flow. Paper ASME, No. 57—HT-9, 1957.