Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛН, ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ В УЕДИНЕННУЮ

А. М. Тер-Крикоров

(Москва)

Длинные волны на поверхности воды, вырождающиеся в уединенную волну, когда длина волны стремится к бесконечности, впервые были изучены в приближенной постановке Кортевегом и Де-Врисом в 1895 г. [1]. Уравнение профиля этих волн выражается через эллиптическую функцию Якоби cnx. По созвучию с cn эти авторы назвали такие волны «кноидальными».

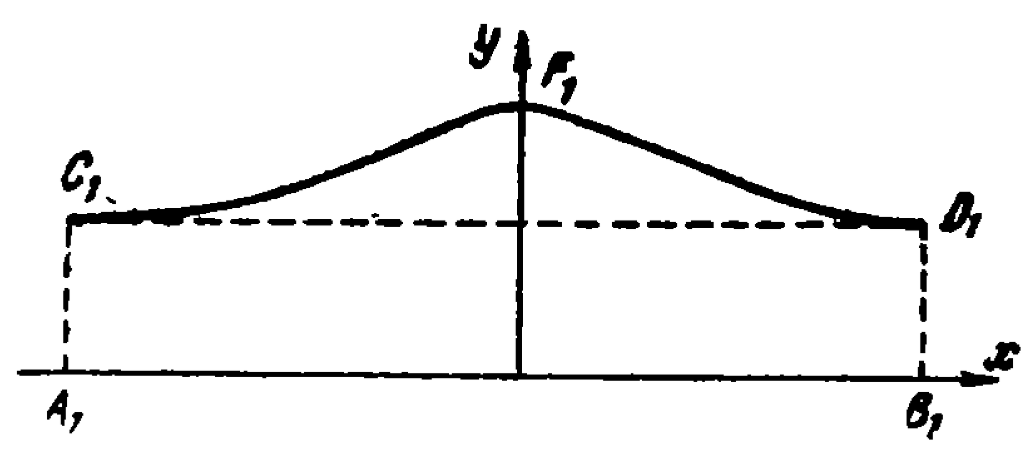
В последние годы кноидальным волнам посвящено большое количество исследований, как теоретических, так и экспериментальных.

Строгое доказательство существования уединенной волны, основанное на вариационных принципах конформных отображений, было дано М. А. Лаврентьевым [2] в 1946 г. В 1954 г. Фридрихсом и Хайерсом [3] было дано более простое доказательство, опирающееся на общие теоремы функционального анализа.

Существование некоторого класса кноидальных волн доказано Литтменом [4]. Этот класс не включает волн, вырождающихся в уединенную волну, когда длина волны стремится к бесконечности. Ниже дается доказательство существования, справедливое для всего диапазона кноидальных волн.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим установившуюся периодическую волну длины $2L_1$, движущуюся с постоянной скоростью c в канале с гладким горизонтальным дном, заполненном идеальной несжимаемой жидкостью. Предполагается, что волна симметрична относительно вертикали, проходящей через вершину. Хорошо известно, что скорость волны, движущейся над гладким горизонтальным дном, есть величина неопределенная. Можно, например, определить скорость волны c, как среднюю скорость частиц жидкости на дне (5)

$$c = \frac{1}{L_1}\int_0^{L_1} v(s)\,ds. \tag{1.1}$$



Возьмем систему декартовых прямоугольных координат, связанных с волной, как это показано на фигуре. Относительно такой координатной системы движение жидкости будет установившимся. Положим $z_1 = x_1 + iy_1$. Предполагается, что движение безвихревое. Тогда потенциал скорости $\varphi_1(x_1, y_1)$ и функция тока $\psi_1(x_1, y_1)$ будут сопряженными гармоническими функциями, $w_1(z_1) = \varphi_1(x_1, y_1) + i\psi_1(x_1, y_1)$ будет функцией, аналитической в криволинейном четырехугольнике $A_1B_1C_1D_1$ (фиг. 1). На свободной границе $C_1F_1D_1$ должно выполняться условие постоянства давления

$$\frac{1}{2}\left|\frac{dw_1}{dz_1}\right|^2 + 2gY_1(x_1) = \mathrm{const} \tag{1.2}$$

Здесь g — ускорение силы тяжести, $y_1 = Y_1(x_1)$ — уравнение свободной границы. Так как движение установившееся, то свободная граница и дно должны быть линиями тока

$$\psi_1 = 0 \quad \text{при } y_1 = 0, \qquad \psi_1 = Q \quad \text{при } y_1 = Y_1(x_1) \tag{1.3}$$

где Q — расход жидкости через поперечное сечение канала. В силу симметрии на прямых A_1C_1 и B_1D_1 скорости горизонтальны, то есть $\partial\varphi / \partial s = 0$ вдоль A_1C_1 и B_1D_1. Следовательно,

$$\varphi_1(L_1, y_1) = -\varphi_1(-L_1, y_1) = d \tag{1.4}$$

где d некоторая постоянная, которую легко выразить через L_1 и c. В самом деле, из (1.1) следует, что $cL_1 = d$

Введем безразмерные переменные

$$z = z_1 \frac{c}{Q}, \qquad w = \frac{w_1}{Q}, \qquad Y(x) = Y_1(x_1)\frac{c}{Q}, \qquad L_1 = \frac{\pi O}{c\lambda}, \qquad d = \frac{Q\pi}{\lambda} \tag{1.5}$$

Очевидно, при этом условие $cL_1 = d$ будет удовлетворено. Приходим к следующей математической задаче: найти непрерывную на интервале $(-\pi / \lambda, \pi / \lambda)$ функцию $Y(x)$ и функцию $w(z)$, аналитическую в области $ABDC$ и удовлетворяющую граничным условиям

$$\frac{1}{2}\left|\frac{dw}{dz}\right|^2 + \nu Y(x) = \text{const} \quad \text{при } y = Y(x) \qquad \left(\nu = \frac{gQ}{c^3}\right) \tag{1.6}$$

$$\psi = 0 \quad \text{при } y = 0, \qquad \psi = 1 \quad \text{при } y = Y(x) \tag{1.7}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{\lambda} \quad \text{при } x = \frac{\pi}{\lambda}, \qquad \varphi = -\frac{\pi}{\lambda} \quad \text{при } x = -\frac{\pi}{\lambda} \tag{1.8}$$

Условие (1.8) эквивалентно требованию периодичности решения.

Сделаем замену переменной

$$\chi(w) = \theta + i\tau = i \ln\left(\nu^{-\frac{1}{3}} \frac{dw}{dz}\right) \tag{1.9}$$

В плоскости комплексного потенциала области течения соответствует прямоугольник $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, $-\pi / \lambda \leqslant \varphi \leqslant \pi / \lambda$; обозначим его через (S). Задача сводится (см., например, [3]) к отысканию функции $\chi(w)$, аналитической в открытом прямоугольнике (S), непрерывной в замкнутом прямоугольнике и удовлетворяющей граничным условиям

$$\frac{\partial\theta}{\partial\psi} - \theta = e^{-3\tau}\sin\theta - \theta \quad \text{при } \psi = 1, \qquad \theta = 0 \quad \text{при } \psi = 0,$$

$$\theta = 0 \quad \text{при } \varphi = \pm\frac{\pi}{\lambda}$$

После того как будет решена поставленная задача, можно в квадратурах выразить зависимость z от w. В самом деле, из (1.9) следует, что

$$dz = \nu^{-\frac{1}{3}} e^{i\chi(w)} dw \tag{1.11}$$

Интегрируем, учитывая, что $x = \pi / \lambda$, $y = 0$ при $\varphi = \pi / \lambda$, $\psi = 0$, и получаем

$$z = \frac{\pi}{\lambda} + \nu^{-\frac{1}{3}} \int_{\pi/\lambda}^{w} e^{i\chi(t)} dt \tag{1.12}$$

Так как $z = -\pi/\lambda$ при $w = -\pi/\lambda$, то должно быть выполнено дополнительное условие

$$\frac{\pi}{\lambda} = \frac{1}{2}\nu^{-\frac{1}{3}}\int_0^{\lambda/\pi} e^{\tau(t)}\cos\theta(t)\,dt \tag{1.13}$$

§ 2. **Функция Грина линейной задачи.** Рассмотрим следующую граничную задачу для гармонических функций: найти функцию $\theta(x, y)$, гармоническую в открытом прямоугольнике (S), непрерывную в замкнутом прямоугольнике и удовлетворяющую граничным условиям

$$\theta_\psi - \theta = f(\varphi) \quad \text{при } \psi = 1 \tag{2.1}$$

$$\theta = 0 \quad \text{при } \psi = 0, \qquad \theta = 0 \quad \text{при } \varphi = \pm\frac{\pi}{\lambda} \tag{2.2}$$

где $f(\varphi)$ нечетная периодическая функция с периодом $2\pi/\lambda$. Решение данной задачи приведено в статье Литтмена [4]

$$\theta = \int_0^{\pi/\lambda} G(\varphi, \psi, \varphi') f(\varphi')\,d\varphi', \qquad G = \frac{2\lambda}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh} n\lambda\psi \sin n\lambda\varphi \sin n\lambda\varphi'}{n\lambda \operatorname{ch} n\lambda - \operatorname{sh} n\lambda} \tag{2.3}$$

где $G(\varphi, \psi, \varphi')$ — функция Грина.

Если в формуле (2.3) заменить $f(\varphi)$ через $e^{-3\tau}\sin\theta - \theta$ найти сопряженную функцию $\tau(\varphi)$ и положить $\psi = 1$, то задача, поставленная в конце § 1, сведется к нелинейным интегральным уравнениям. Литтмен показал, что эти уравнения имеют решения, вырождающиеся в плоскопараллельный поток при $\lambda \to 0$. Результат Литтмена не охватывает наиболее интересного класса решений, вырождающихся в уединенную волну. Дело в том, что исследование свойств функции Грина (2.3) чрезвычайно усложняется, когда $\lambda \to 0$, так как при этом ряд Фурье вырождается в интеграл Фурье. Ниже при $\psi = 1$ дается преобразование функции Грина к более удобному виду.

Пусть λ_k есть корни уравнения

$$t\cos t - \sin t = 0 \tag{2.4}$$

Теорема 2.1. Функцию $G(\varphi, 1, \varphi')$ можно представить в таком виде:

$$G = \begin{cases} 3\left[\varphi - \dfrac{\lambda}{\pi}\varphi\varphi'\right] - \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\operatorname{sh}(\varphi' - \pi/\lambda)\lambda_k \operatorname{sh}\lambda_k\varphi}{\lambda_k \operatorname{sh}(\pi\lambda_k/\lambda)} & \text{при } (\varphi < \varphi') \\ 3\left[\varphi' - \dfrac{\lambda}{\pi}\varphi\varphi'\right] - \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\operatorname{sh}\lambda\ \varphi' \operatorname{sh}(\varphi - \pi/\lambda)\lambda_k}{\lambda_k \operatorname{sh}(\pi\lambda_k/\lambda)} & \text{при } (\varphi > \varphi') \end{cases} \tag{2.5}$$

Доказательство: заметим, прежде всего, что имеет место следующее разложение на элементарные дроби

$$\frac{\operatorname{sh} z}{z\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z} = \frac{3}{z^2} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z^2 + \lambda_k^2} \tag{2.6}$$

Заменяя z на $n\lambda$, получаем

$$\frac{\operatorname{sh} n\lambda}{n\lambda\operatorname{ch} n\lambda - \operatorname{sh} n\lambda} = \frac{3}{\lambda^2}\frac{1}{n^2} + \frac{2}{\lambda^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 + (\lambda_k/\lambda)^2} \tag{2.7}$$

Подставляя это разложение в (2.3) и изменяя порядок суммирования (законность этой операции можно доказать), получаем

$$G = \frac{3}{\pi\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\lambda(\varphi-\varphi') - \cos n\lambda(\varphi+\varphi')}{n^2} +$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda_k/\lambda)\left[\cos n\lambda(\varphi-\varphi') + \cos n\lambda(\varphi+\varphi')\right]}{\lambda_k\left[n^2+(\lambda_k/\lambda)^2\right]} \qquad (2.8)$$

Воспользуемся следующими тригонометрическими разложениями

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{\pi}{2}|x| + \frac{\pi^2}{6} \qquad (2.9)$$

$$(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$$

$$\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n a}{n^2+a^2}\cos nx = \frac{\pi}{2}\frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{sh} a\pi} \qquad (2.10)$$

Заменим в (2.10) x на $x+\pi$ и на $x-\pi$; тогда получаем

$$\frac{\pi}{2}\frac{\operatorname{ch} a(x-\pi)}{\operatorname{sh} a\pi} = \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n^2+a^2}\cos nx \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi) \qquad (2.11)$$

$$\frac{\pi}{2}\frac{\operatorname{ch} a(x+\pi)}{\operatorname{sh} a\pi} = \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n^2+a^2}\cos nx \qquad (-2\pi \leqslant x \leqslant 0) \qquad (2.12)$$

Подставляя в равенства (2.9), (2.11) и (2.12) $x = \lambda(\varphi \pm \varphi')$, $a = \lambda_k/\lambda$, получаем

$$\frac{3}{\pi\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\lambda(\varphi-\varphi') - \cos n\lambda(\varphi+\varphi')}{n^2} = 3\left[\min(\varphi, \varphi') - \frac{\lambda}{\pi}\varphi\varphi'\right] \qquad (2.13)$$

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda_k/\lambda)\left[\cos n\lambda(\varphi-\varphi') - \cos n\lambda(\varphi+\varphi')\right]}{n^2+(\lambda_k/\lambda)^2} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\operatorname{ch}(\varphi'-\varphi-\pi/\lambda)\lambda_k - \operatorname{ch}(\varphi'+\varphi-\pi/\lambda)\lambda_k}{\operatorname{sh}(\lambda_k\pi/\lambda)} & (\varphi<\varphi') \\[2ex] \dfrac{\operatorname{ch}(\varphi'-\varphi-\pi/\lambda)\lambda_k - \operatorname{ch}(\varphi'+\varphi-\pi/\lambda)\lambda_k}{\operatorname{sh}(\lambda_k\pi/\lambda)} & (\varphi>\varphi') \end{cases} \qquad (2.14)$$

Подставляя равенства (2.13) и (2.14) в (2.8), получаем (2.5). Теорема 2.1 доказана.

Теорема 2.2. Решение линейной задачи (2.1) можно, при $\psi = 1$ представить в таком виде

$$\theta = -3\mathrm{S}^2 f + 3[1-(\lambda/\pi)\varphi]\,\mathrm{L}f + \mathrm{A}f \qquad (2.15)$$

где L — функционал, S и A — линейные операторы

$$\mathrm{L}f = \int_0^{\pi/\lambda}\varphi' f(\varphi')\,d\varphi', \qquad \mathrm{S}f = \int_{\pi/\lambda}^{\varphi} f(\varphi')\,d\varphi'$$

$$\mathrm{A}f = -2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k\cdot\operatorname{sh}(\pi\lambda_k/\lambda)}\left[\operatorname{sh}\left(\varphi-\frac{\pi}{\lambda}\right)\lambda_k\int_0^{\varphi}\operatorname{sh}\lambda_k\varphi' f(\varphi')\,d\varphi' + \right. \qquad (2.16)$$

$$\left. + \operatorname{sh}\lambda_k\varphi\int_{\varphi}^{\pi/\lambda}\operatorname{sh}\lambda_k\left(\varphi'-\frac{\pi}{\lambda}\right)f(\varphi')\,d\varphi'\right]$$

Доказательство. Согласно формуле (2.3), при $\psi = 1$

$$0 = \int_0^{\pi/\lambda} G(\varphi,\ 1,\ \varphi') f(\varphi') d\varphi' = \int_0^{\varphi} G(\varphi,\ 1,\ \varphi') f(\varphi') d\varphi' + \int_{\varphi}^{\pi/\lambda} G(\varphi,\ 1,\ \varphi') d\varphi' \quad (2.17)$$

Если воспользоваться выражением (2.5) для $G(\varphi,\ 1,\ \varphi')$, то получаем

$$\theta = 3\int_0^{\varphi} \varphi' f(\varphi')\, d\varphi' - \frac{3\lambda}{\pi}\varphi \int_0^{\pi/\lambda} \varphi' f(\varphi') d\varphi' + 3\varphi \int_{\varphi}^{\pi/\lambda} f(\varphi') d\varphi' + \mathrm{A}f \quad (2.18)$$

$$\theta = 3\left[1 - \frac{\lambda}{\pi}\varphi\right]\mathrm{L}f - 3\varphi \int_{\pi/\lambda}^{\varphi} f(\varphi') d\varphi' + 3\int_{\pi/\lambda}^{\varphi} \varphi' f(\varphi')\, d\varphi' + \mathrm{A}f \quad (2.19)$$

Если теперь заметим, что

$$\mathrm{S}^2 f = \varphi \int_{\pi/\lambda}^{\varphi} f(\varphi')\, d\varphi' - \int_{\pi/\lambda}^{\varphi} \varphi' f(\varphi')\, d\varphi' \quad (2.20)$$

то теорема 2.2 доказана.

Теорема 2.3. Функцию τ сопряженную с θ, при $\psi = 1$ можно представить в таком виде

$$\tau = 3\mathrm{S}^3 f + \frac{3}{2}\frac{\pi}{\lambda}\left(1 - \frac{\lambda}{\pi}\varphi\right)^2 \mathrm{L}f - \frac{3}{2}\mathrm{S}f + \mathrm{B}f + \tau\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) \quad (2.21)$$

где B есть линейный оператор

$$\mathrm{B}f = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2 \operatorname{sh}(\pi\lambda_k / \lambda)} \Bigg[\operatorname{ch}\left(\varphi - \frac{\pi}{\lambda}\right)\lambda_k \int_0^{\varphi} \operatorname{sh} \lambda_k \varphi' f(\varphi')\, d\varphi' +$$

$$+ \operatorname{ch} \lambda_k \varphi \int_{\varphi}^{\pi/\lambda} \operatorname{sh}\left(\varphi' - \frac{\pi}{\lambda}\right) \lambda_k f(\varphi')\, d\varphi' - \int_0^{\pi/\lambda} \operatorname{sh} \lambda_k \varphi' f(\varphi')\, d\varphi'\Bigg] \quad (2.22)$$

а $\tau(\pi / \lambda)$ — произвольная постоянная.

Доказательство: функции $\tau(\varphi)$ и $\theta(\varphi)$ связаны условиями Коши — Римана, следовательно, граничное условие (2.1) можно записать в таком виде

$$\frac{d\tau}{d\varphi} = -\theta - f(\varphi)$$

Подставляя сюда вместо θ его выражение (2.15) и интегрируя от π / λ до φ, получаем (2.21).

§ 3. Интегральные уравнения задачи. Первое приближение. Для того чтобы свести краевую задачу, поставленную в § 1, к нелинейным интегральным уравнениям, нужно положить в формулах (2.15) и (2.21)

$$f(\varphi) = e^{-3\tau} \sin\theta - \theta \quad (3.1)$$

Как известно, существенным шагом при исследовании длинных волн является растяжение независимой переменной. Совершенно формально, возьмем некоторый параметр ε и сделаем по нему растяжение. Физический смысл параметра ε будет выяснен позднее. Полагаем

$$\varphi^\circ = \varepsilon\varphi, \qquad \frac{\pi}{\lambda} = \frac{1}{\varepsilon}K, \qquad \theta = \varepsilon^3\theta^\circ, \qquad \tau = \varepsilon^2\tau^\circ,$$

$$f^\circ = \frac{1}{\varepsilon^5}\left[e^{-3\varepsilon^2\tau^\circ} \sin \varepsilon^3\theta^\circ - \varepsilon^3\theta^\circ\right] \quad (3.2)$$

Очевидно, что

$$
\mathrm{S}f = \int\limits_{K/\varepsilon}^{\varphi/\varepsilon} f(\varphi')\,d\varphi' = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{K}^{\varphi^\circ} f(\varepsilon\varphi^{\circ\prime})\,d\varphi^{\circ\prime} = \varepsilon^4 \mathrm{S}^\circ f^\circ
$$
$$
\mathrm{S}^2 f = \varepsilon^3 \mathrm{S}^{\circ 2} f^\circ, \qquad \mathrm{S}^3 f = \varepsilon^2 \mathrm{S}^{\circ 3} f^\circ \tag{3.3}
$$

Подставляя (3.3) в (2.15) и (2.21), получаем систему двух интегральных уравнений

$$
\theta^\circ = -3\mathrm{S}^{\circ 2} f^\circ + 3\left(1 - \frac{\varphi^\circ}{K}\right)\mathrm{L}^\circ f^\circ + 2\pi\varepsilon \mathrm{T} f^\circ
$$
$$
\tau^\circ = \tau^\circ(K) + 3\mathrm{S}^{\circ 3} f^\circ + 3K\left(\frac{\varphi^\circ}{K} - 1\right)^2 \mathrm{L}^\circ f^\circ - 2\pi\varepsilon^2 \mathrm{V} f^\circ - \frac{3}{2}\,\varepsilon^2 \mathrm{S}^\circ f^\circ \tag{3.4}
$$

где

$$
\mathrm{L}^\circ f^\circ = \int\limits_0^K \varphi^{\circ\prime} f(\varphi^{\circ\prime})\,d\varphi^{\circ\prime}
$$

$$
\mathrm{T} f^\circ = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \,\mathrm{sh}\,(\lambda_k K / \varepsilon)}\Bigg[\mathrm{sh}\,\frac{\lambda_k}{\varepsilon}\,(\varphi^\circ - K)\int\limits_0^{\varphi^\circ} f^\circ(\varphi^{\circ\prime})\,\mathrm{sh}\,\frac{\lambda_k}{\varepsilon}\,\varphi^{\circ\prime}\,d\varphi^{\circ\prime} + \tag{3.5}
$$
$$
+\,\mathrm{sh}\,\frac{\lambda_k}{\varepsilon}\,\varphi^\circ \int\limits_{\varphi^\circ}^{K} f^\circ(\varphi^{\circ\prime})\,\mathrm{sh}\,\frac{\lambda_k}{\varepsilon}\,(\varphi^{\circ\prime} - K)\,d\varphi^{\circ\prime}\Bigg]
$$

$$
\mathrm{V} f^\circ = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2 \,\mathrm{sh}\,(\lambda_k K / \varepsilon)}\Bigg[\mathrm{ch}\,\frac{\lambda_k}{\varepsilon}(\varphi^\circ - K)\int\limits_0^{\varphi^\circ} f^\circ(\varphi^{\circ\prime})\,\mathrm{sh}\,\frac{\lambda_k}{\varepsilon}\varphi^{\circ\prime}\,d\varphi^{\circ\prime} + \tag{3.6}
$$
$$
+\,\mathrm{ch}\,\frac{\lambda_k}{\varepsilon}\varphi^\circ \int\limits_{\varphi^\circ}^{K} f^\circ(\varphi^{\circ\prime})\,\mathrm{sh}\,\frac{\lambda_k}{\varepsilon}(\varphi^{\circ\prime} - K)\,d\varphi^{\circ\prime} - \int\limits_0^K \mathrm{sh}\,\frac{\lambda_k}{\varepsilon}\,\varphi^{\circ\prime} f^\circ(\varphi^{\circ\prime})\,d\varphi^{\circ\prime}\Bigg]
$$

Знак $\circ$ для простоты будем в дальнейшем опускать.

В первом приближении положим $\varepsilon = 0$, тогда уравнения (3.4) дают:

$$
\theta_0 = -3\mathrm{S}^2 f_0 + 3\left(1 - \frac{\varphi}{K}\right)\int\limits_0^K \varphi' f_0(\varphi')\,d\varphi' \tag{3.7}
$$

$$
\tau_0 = \tau_0(K) + 3\mathrm{S}^3 f_0 + \frac{3}{2}K\left(1 - \frac{\varphi}{K}\right)^2 \int\limits_0^K \varphi' f_0(\varphi')\,d\varphi', \qquad f_0 = -3\tau_0\theta_0 \tag{3.8}
$$

Легко видеть, что $\theta_0 = -\tau_0'$. Дифференцируя первое уравнение (3.7) два раза, получаем

$$
\tau_0''' = 9\tau_0\tau_0' \tag{3.9}
$$

Решение этого обыкновенного дифференциального уравнения выражается через эллиптическую функцию Якоби (см. [4])

$$
\tau_0 = \frac{1}{3}a^2\left[2k^2 - 1 - 3k^2\mathrm{cn}^2\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\varphi\right)\right] \tag{3.10}
$$

Здесь a и k — произвольные постоянные, причем k есть модуль эллиптической функции, a можно задать произвольно (это отразится только на зависимости ε от физических параметров, определяющих течение). Примем для простоты, что $a = 2/\sqrt{3}$, тогда

$$
\tau_0 = \frac{4}{9}(1 - 2k'^2) - \frac{4}{3}k^2\mathrm{cn}^2\varphi, \qquad k'^2 = 1 - k^2 \tag{3.11}
$$

Отметим еще, что период К будет полным эллиптическим интегралом первого рода от k. В дальнейшем покажем, что система уравнений (3.4) допускает решение, зависящее от двух параметров ε и k'.

§ 4. Уравнение в вариациях. Положим

$$\theta = \theta_0 + \delta\theta, \qquad \tau = \tau_0 + \delta\tau \tag{4.1}$$

Заметим, что выражение (3.1) для f можно представить в виде

$$f = -3\tau\theta + \varepsilon^2 f_1 \tag{4.2}$$

где f_1 есть целая функция θ, τ и ε. Найдем δf

$$\delta f = -3\,(\tau_0\delta\theta + \theta_0\delta\tau) + \varepsilon^2\delta f_1 = 3\,(\tau_0'\delta\tau - \tau_0\delta\theta) + \varepsilon^2\delta f_1 \tag{4.3}$$

Варьируя уравнения (3.4), получаем

$$\delta\theta = -3S^2\delta f + 3\left(1 - \frac{\varphi}{K}\right)L\delta f + 2\pi\varepsilon T\delta f \tag{4.4}$$

$$\delta\tau = \delta\tau\,(K) + 3S^3\delta f + \frac{3}{2}K\left(1 - \frac{\varphi}{K}\right)^2 L\delta f - 2\pi\varepsilon^2 V\delta f - \frac{3}{2}\varepsilon^2 S\delta f \tag{4.5}$$

Если выделить в уравнениях (4.4), (4.5) линейную часть и затем обратить полученный таким образом линейный оператор, то задача сведется к системе нелинейных интегральных уравнений для $\delta\theta$ и $\delta\tau$, которую можно при малых ε решать методом последовательных приближений. Введем переменную y

$$y = \delta\tau + 2\pi\varepsilon^2 V\delta f + \frac{3}{2}\varepsilon^2 S\,\delta f \tag{4.6}$$

Тогда из (4.4) следует, что

$$-y' = \delta\theta - 2\pi\varepsilon T\delta f \tag{4.7}$$

Подставляя это выражение в (4.4) и дифференцируя, получаем

$$y'' = 3S\delta f - \frac{3}{K}L\,\delta f \tag{4.8}$$

Здесь

$$\delta f = 3(\tau_0 y)' + \delta\sigma,\ \delta\sigma = \varepsilon^2\delta f_1 - 6\pi\varepsilon\,[\varepsilon\tau_0' V\delta f - \tau_0 T\delta f] - \frac{9}{2}\varepsilon^2\tau_0' S\delta f \tag{4.9}$$

Уравнение (4.8) можно записать в таком виде

$$y'' = 9S\,(\tau_0 y)' + \frac{9}{K}L\,(\tau_0 y)' + 3\left(S\,\delta\sigma + \frac{1}{K}L\,\delta\sigma\right) \tag{4.10}$$

Но

$$S\,(\tau_0 y)' = \tau_0 y - (\tau_0 y)_{\varphi=K} \tag{4.11}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (4.10), получаем

$$y'' - 9\tau_0 y = \frac{c}{K} + u\,(\varphi),\ u\,(\varphi) = 3\left(S\,\delta\sigma + \frac{1}{K}L\delta\sigma\right),\quad c = -9\int_0^K \tau_0 y\,d\varphi \tag{4.12}$$

Легко доказать, что число c можно выбрать произвольно, т. е. что третье из равенств (4.12) не накладывает ограничений на c. Действительно, интегрируя уравнение (4.12) от 0 до K, получаем

$$y'(0) - y'(K) - 9\int_0^K \tau_0 y\,d\varphi = c + j \qquad \left(j = \int_0^K u\,(\varphi)d\varphi\right) \tag{4.13}$$

Но вследствие (4.7) $y'(0) = y'(K) = 0$, а вследствие второго из равенств (4.12) $j = 0$, следовательно, третье из равенств (4.12) выполняется при любом c. Если положить

$$c = -3\,\mathrm{L}\delta\sigma \tag{4.14}$$

то это может отразиться только на зависимости ε от физических параметров течения. Уравнение (4.13) будет иметь тогда следующий вид:

$$y'' - 9\tau_0 y = 3\mathrm{S}\delta\sigma \tag{4.15}$$

и задача обращения линейного оператора, таким образом, приводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения.

§ 5. Решение дифференциального уравнения. Рассмотрим уравнение

$$y'' - 9\tau_0 y = f(\varphi) \tag{5.1}$$

где $f(\varphi)$—четная периодическая функция с периодом $2K$. Разыскивается решение, которое также должно быть четной периодической функцией. Найдем сначала два линейно независимых решения однородного уравнения. Одно решение этого уравнения есть $z_1(\varphi) = \tau_0'(\varphi)$, а второе находится по формуле Лиувилля

$$z_2(\varphi) = z_1(\varphi) \int \frac{d\varphi}{z_1^2(\varphi)} \tag{5.2}$$

Из формулы (3.11) получаем

$$z_1(\varphi) = \mathrm{cn}\varphi\,\mathrm{sn}\varphi\,\mathrm{dn}\,\varphi \tag{5.3}$$

И, следовательно,

$$z_2(\varphi) = \mathrm{cn}\varphi\,\mathrm{sn}\varphi\,\mathrm{dn}\varphi \int \frac{d\varphi}{\mathrm{cn}^2\varphi\,\mathrm{sn}^2\varphi\,\mathrm{dn}^2\varphi} \tag{5.4}$$

Легко проверить следующие тождества

$$\frac{1}{\mathrm{cn}^2\varphi\,\mathrm{sn}^2\varphi\,\mathrm{dn}^2\varphi} = \frac{1}{\mathrm{sn}^2\varphi} + \frac{1 + k^2\,\mathrm{cn}^2\varphi}{\mathrm{cn}^2\varphi\,\mathrm{dn}^2\varphi} = \frac{1}{\mathrm{sn}^2\varphi} + \frac{1}{k'^2}\frac{1}{\mathrm{cn}^2\varphi} - \frac{k^4}{k'^2}\frac{1}{\mathrm{dn}^2\varphi} \tag{5.5}$$

Введем обозначения

$$\Phi_1 = \int_a^\varphi \frac{dt}{\mathrm{sn}^2 t}, \qquad \Phi_2 = \int_0^\varphi \frac{dt}{\mathrm{cn}^2 t}, \qquad \Phi_3 = \int_0^\varphi \frac{dt}{\mathrm{dn}^2 t} \tag{5.6}$$

Тогда

$$z_2(\varphi) = \mathrm{cn}\varphi\,\mathrm{dn}\varphi\,\mathrm{sn}\varphi \left\{\Phi_1 + \frac{1}{k'^2}\Phi_2 - \frac{k^4}{k'^2}\Phi_3\right\} \tag{5.7}$$

Интегралы в формулах (5.6) вычисляются элементарно

$$\Phi_1(\varphi) = \varphi - \frac{\mathrm{cn}\varphi\,\mathrm{dn}\varphi}{\mathrm{sn}\varphi} - \int_0^\varphi \mathrm{dn}^2 t\,dt \tag{5.8}$$

$$\Phi_2(\varphi) = \varphi + \frac{1}{k'^2}\left[\frac{\mathrm{sn}\varphi\,\mathrm{dn}\varphi}{\mathrm{cn}\varphi} - \int_0^\varphi \mathrm{dn}^2\,t dt\right]$$

$$\Phi_3(\varphi) = \frac{1}{k'^2}\left[\int_0^\varphi \mathrm{dn}^2 t\,dt - k^2\frac{\mathrm{sn}\varphi\,\mathrm{cn}\varphi}{\mathrm{dn}\varphi}\right]$$

Теорема 5.1. Функцию $z_2(\varphi)$ можно представить в таком виде

$$z_2(\varphi) = \mathrm{B}\,\varphi z_1(\varphi) + \zeta(\varphi) \tag{5.9}$$

где B — некоторое число, а $\zeta(\varphi)$ — четная функция с периодом K.

Доказательство: заметим прежде всего, что

$$\int\limits_0^\varphi \mathrm{dn}^2 t\,dt = \frac{E(k)}{K(k)}\varphi + \chi(\varphi) \tag{5.10}$$

где $\chi(\varphi)$ — периодическая функция, а $E(k)$ и $K(k)$ — полные эллиптические интегралы второго и первого рода. Из (5.9) тогда следует, что (5.11)

$$\Phi_1 = \left[1 - \frac{E}{K}\right]\varphi + \chi_1(\varphi), \quad \Phi_2 = \left[1 - \frac{E}{k'^2 K}\right]\varphi + \chi_2(\varphi), \quad \Phi_3 = \frac{1}{k'^2}\frac{E}{K}\varphi + \chi_3(\varphi),$$

Причем χ_1, χ_2 и χ_3 периодические функции. Подставляя эти выражения в (5.4), получаем формулу (5.9), причем

$$B = -\frac{1}{Kk'^4}\left[(1 + k^4 + k'^4)E - K(k'^4 + k'^2)\right] \tag{5.12}$$

теорема доказана. Покажем теперь, как найти периодическое решение уравнения (5.1). Общее решение зависит от двух произвольных постоянных. Условие четности определяет одну произвольную постоянную. Итак, четное решение имеет такой вид:

$$y = z_2(\varphi)\int\limits_K^\varphi f(t) z_1(t)\,dt - z_1(\varphi)\int\limits_0^\varphi f(t) z_2(t)\,dt + c z_2(\varphi) \tag{5.13}$$

Произвольную постоянную c определим из условия периодичности. В силу периодичности $y(\varphi + 2K) - y(\varphi) = 0$. С другой стороны,

$$\begin{gathered} y(\varphi + 2K) - y(\varphi) = [z_2(\varphi + 2K) - z_2(\varphi)]\int\limits_K^{\varphi+2K} f z_1\,dt + \\ + z_2(\varphi)\left[\int\limits_K^{\varphi+2K} f z_1\,dt - \int\limits_K^\varphi f z_1\,dt\right] - z_1(\varphi)\left[\int\limits_0^{\varphi+2K} f z_2\,dt - \int\limits_0^\varphi f z_2\,dt\right] + \\ + c\,[z_2(\varphi + 2K) - z_2(\varphi)] \end{gathered} \tag{5.14}$$

Вследствие (5.9) выполняется равенство

$$z_2(\varphi + 2K) - z_2(\varphi) = 2BK z_1(\varphi)$$

Так как $f(\varphi)$ четная периодическая функция, а $z_1(\varphi)$ нечетная, то

$$\begin{gathered} \int\limits_K^{\varphi+2K} f(t) z_1(t)\,dt - \int\limits_K^\varphi f(t) z_1(t)\,dt = \int\limits_{-K}^\varphi f z_1\,dt - \int\limits_K^\varphi f z_1\,dt = \int\limits_{-K}^K f z_1\,dt = 0 \\ \int\limits_0^{\varphi+2K} f z_2\,dt - \int\limits_0^\varphi f z_2\,dt = \int\limits_K^{\varphi+2K} f z_2\,dt - \int\limits_K^\varphi f z_2\,dt = \int\limits_{-K}^\varphi f z_2(t + 2K)\,dt - \\ - \int\limits_K^\varphi f z_2\,dt = \int\limits_{-K}^\varphi f z_2\,dt + 2BK\int\limits_{-K}^\varphi f z_1\,dt + \int\limits_\varphi^K f z_2\,dt = \int\limits_{-K}^K f z_2\,dt + 2BK\int\limits_K^\varphi f z_1\,dt \end{gathered} \tag{5.15}$$

Подставляя эти выражения в (5.14), получаем

$$2BK z_1\int\limits_K^\varphi f z_1\,dt - z_1\left[2\int\limits_0^K f z_2\,dt + 2BK\int\limits_{-K}^\varphi f z_1\,dt\right] + 2BK z_1(\varphi)\,c = 0 \tag{5.16}$$

Это тождество будет удовлетворено, если положить

$$c = \frac{1}{BK}\int_0^K fz_2\,dt \tag{5.17}$$

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 5.2. Если $f(\varphi)$ четная периодическая функция, с периодом $2K$, то уравнение $y'' - 9\tau_0 y = f(\varphi)$ имеет решение, которое также является четной периодической функцией

$$y = \mathrm{N}f \tag{5.18}$$

где N — линейный оператор, определенный таким равенством

$$\mathrm{N}f = z_2(\varphi)\int_K^\varphi fz_1\,dt - z_1(\varphi)\int_0^\varphi fz_2\,dt + \frac{z_2(\varphi)}{BK}\int_0^K fz_2\,dt \tag{5.19}$$

§ 6. Функциональные пространства B_1 и B_2. Пусть B_1 есть пространство Банаха непрерывных нечетных периодических функций с периодом $2K$, норма элемента которого определяется так:

$$\|\theta\|_{B_1} = \sup_{0\leqslant\varphi\leqslant K}\left[\frac{|\theta(\varphi)|}{\operatorname{dn}\varphi}\right] \tag{6.1}$$

Пусть B_2 есть пространство четных непрерывных периодических функций с нормой

$$\|\tau\|_{B_2} = \sup_{0\leqslant\varphi\leqslant K}\left[\frac{|\tau(\varphi)|}{\operatorname{dn}\varphi}\right] \tag{6.2}$$

Обозначим через B пространство Банаха, элементы которого состоят из пар $\omega(\theta, \tau)$, где $\theta \in B_1$, а $\tau \in B_2$, а норма равна

$$\|\omega\| = \{\|\tau\|^2 + \|\theta\|^2\}^{\frac{1}{2}} \tag{6.3}$$

Заметим, что при $k' = 0$ введенные нами пространства вырождаются в пространства, которые были использованы Фридрихсом и Хайерсом при доказательстве существования уединенной волны. Будем далее всегда предполагать, что

$$0 \leqslant k'^2 \leqslant \frac{1}{2} \tag{6.4}$$

Сейчас мы выведем некоторые неравенства для эллиптических функций, которыми далее будем часто пользоваться.

Заметим, что при $0 \leqslant \varphi \leqslant K$

$$0 \leqslant \operatorname{cn}\varphi \leqslant \operatorname{dn}\varphi \leqslant 1, \qquad \int_0^\varphi \operatorname{dn}^2 t\,dt \leqslant \int_0^K dn^2 t\,dt \leqslant \int_0^K \operatorname{dn} t\,dt = \frac{\pi}{2} \tag{6.5}$$

Пусть $\psi = am\varphi$, тогда

$$\varphi\operatorname{cn}\varphi = \cos\psi\int_0^\psi \frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} \leqslant \frac{\psi\cos\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\varphi \frac{du}{\operatorname{dn} u} = \int_0^\psi \frac{dv}{1-k^2\sin^2 v} \leqslant \int_0^\psi \frac{dv}{\cos^2 v} = \frac{\sin\psi}{\cos\psi} = \frac{\operatorname{sn}\varphi}{\operatorname{cn}\varphi} \tag{6.6}$$

Далее, легко видеть, что $k^2\mathrm{cn}^2\varphi = \mathrm{dn}^2\varphi - k'^2$, интегрируя это тождество от 0 до K, получаем

$$E - k'^2K = k^2\int_0^K \mathrm{cn}^2\varphi\, d\varphi > \frac{1}{2}\int_0^K \mathrm{cn}^2\varphi\,\mathrm{sn}\varphi\,\mathrm{dn}\varphi\, d\varphi = \frac{1}{6} \tag{6.7}$$

Теорема 6.1. Каково бы ни было k' из интервала $[0,1/\sqrt{2}]$, оператор N действует из B_2 в B_2 и ограничен, то есть найдется такая постоянная c_1, не зависящая от k', что

$$\|\mathrm{N}f\| \leqslant c_1\|f\|$$

Доказательство: так как $|f| \leqslant \|f\|\,\mathrm{dn}\varphi$, то вследствие (5.19) имеем

$$|\mathrm{N}f| \leqslant \|f\|\left(|z_2(\varphi)|\int_\varphi^K z_1\mathrm{dn}t\,dt + z_1(\varphi)\int_0^\varphi |z_2|\,\mathrm{dn}t\,dt + \frac{|z_2|}{BK}\int_0^K |z_2|\,\mathrm{dn}t\,dt\right) \tag{6.8}$$

Оценим прежде всего $|z_2(\varphi)|$. На основании (5.5) $z_2(\varphi)$ можно представить в таком виде:

$$z_2(\varphi) = \mathrm{cn}\varphi\,\mathrm{sn}\varphi\,\mathrm{dn}\varphi\left(\int_a^\varphi \frac{dt}{\mathrm{sn}^2t} + \int_0^\varphi \frac{1+k^2\mathrm{cn}^2t}{\mathrm{cn}^2t\,\mathrm{dn}^2t}\,dt\right) \tag{6.9}$$

Так как функция $dn\varphi$ убывающая, то

$$|z_2(\varphi)| < \mathrm{cn}\varphi\,\mathrm{sn}\varphi\,\mathrm{dn}\varphi\left\{|\Phi_1(\varphi)| + \frac{2}{\mathrm{dn}^2\varphi}|\Phi_2(\varphi)|\right\} \tag{6.10}$$

где Φ_1 и Φ_2 определяются по формулам (5.8). Вследствие (6.5) и (6.6)

$$\mathrm{cn}\varphi\,\mathrm{sn}\varphi\,\mathrm{dn}\varphi\,|\Phi_1(\varphi)| < \frac{1}{2}\pi + 1 + \frac{1}{2}\pi = 1 + \pi \tag{6.11}$$

Оценим теперь Φ_2. Заметим, прежде, что

$$\int_0^\varphi \mathrm{dn}^2t\,dt = \int_0^\varphi \mathrm{dn}t\,(\mathrm{dn}t - k\mathrm{cn}t)\,dt - k\mathrm{sn}\varphi =$$

$$= \int_0^\varphi \frac{\mathrm{dn}t\,(\mathrm{dn}^2t - k^2\mathrm{cn}^2t)}{\mathrm{dn}t + k\mathrm{cn}t}\,dt - k\mathrm{sn}\varphi = k'^2\int_0^\varphi \frac{\mathrm{dn}t}{\mathrm{dn}t + k\mathrm{cn}t}\,dt - k\mathrm{sn}\varphi \tag{6.12}$$

Кроме того,

$$\frac{\mathrm{sn}\varphi\,\mathrm{dn}\varphi}{\mathrm{cn}\varphi} - k\mathrm{sn}\varphi = \frac{\mathrm{sn}\,\varphi(\mathrm{dn}\varphi - k\mathrm{cn}\varphi)}{\mathrm{cn}\,\varphi} = \frac{k'^2\mathrm{sn}\varphi}{\mathrm{cn}\varphi\,(\mathrm{dn}\varphi + k\mathrm{cn}\varphi)} \tag{6.13}$$

Следовательно, вследствие (5.8) (6.14)

$$\Phi_2(\varphi) = \varphi + \frac{1}{k'^2}\left[\frac{\mathrm{sn}\varphi\,\mathrm{dn}\varphi}{\mathrm{cn}\varphi} - \int_0^\varphi \mathrm{dn}^2t\,dt\right] = \varphi + \frac{\mathrm{sn}\varphi}{\mathrm{cn}\varphi\,(\mathrm{dn}\varphi + k\mathrm{sn}\varphi)} + \int_0^\varphi \frac{\mathrm{dn}t\,dt}{\mathrm{dn}t + k\mathrm{cn}t}$$

Следовательно,

$$|\Phi_2(\varphi)| < 2\varphi + \frac{1}{\mathrm{cn}\,\varphi\,\mathrm{dn}\varphi} \tag{6.15}$$

Если воспользоваться оценкой (6.6), то получаем

$$\mathrm{cn}\varphi\,\mathrm{sn}\varphi\,\mathrm{dn}\varphi\,|\Phi_2(\varphi)| < 1 + \pi \tag{6.16}$$

Подставляя неравенства (6.16) и (6.11) в (6.10), получаем, что

$$|z_2(\varphi)| < \frac{3(1+\pi)}{\mathrm{dn}^2\varphi} \tag{6.17}$$

Подставляем оценку (6.17) в (6.8)

$$|\mathrm{N}f| \leqslant \|f\| 3(1+\pi)\Big(\frac{1}{\mathrm{dn}^2\varphi}\int_\varphi^K \mathrm{cn}t\,\mathrm{sn}t\,\mathrm{dn}^2t\,dt +$$

$$+ \mathrm{cn}\varphi\,\mathrm{sn}\varphi\,\mathrm{dn}\,\varphi\int_0^\varphi \frac{dt}{\mathrm{dn}t} + \frac{3(1+\pi)}{BK\mathrm{dn}^2t}\int_0^K \frac{dt}{\mathrm{dn}t}\Big) \tag{6.18}$$

Но (6.19)

$$\int_\varphi^K \mathrm{cn}t\,\mathrm{sn}t\,\mathrm{dn}^2t\,dt = \frac{1}{2k^2}\,\frac{\mathrm{dn}^3\varphi - k'^3}{3} < \frac{1}{3}\mathrm{dn}^3\varphi, \qquad \int_0^K \frac{dt}{\mathrm{dn}t} = \int_0^{\pi/2}\frac{du}{1-k^2\sin^2 u} = \frac{\pi}{2k'}$$

Оценим еще величину BK. Согласно (5.12)

$$|BK| = \frac{1}{k'^4}\{(1+k^4+k'^4)E - K(k'^2+k'^4)\} \tag{6.20}$$

Но при $0 \leqslant 2k'^2 \leqslant 1$

$$k^4 + k'^4 = (k^2+k'^2)^2 - 2k^2k'^2 > 1 - k^2 = k'^2$$

Следовательно, на основании (6.7)

$$|BK| > \frac{1}{k'^4}(1+k'^2)(E-k'^2K) > \frac{1}{6k'^4} > \frac{1}{6k'\mathrm{dn}^3\varphi} \tag{6.21}$$

Подставляя оценки (6.19), (6.20) и (6.21) в (6.18) и учитывая (6.6), получаем

$$|\mathrm{N}f| \leqslant \|f\|\mathrm{dn}\varphi\, 3(1+\pi)\left\{\tfrac{1}{3} + 1 + 9\pi(1+\pi)\right\} \tag{6.22}$$

Так как число, стоящее в скобках, не зависит от k', то отсюда следует утверждение теоремы (6.1).

Теорема 6.2. Оператор $\mathrm{M}f = d(\mathrm{N}f)/d\varphi$ ограничен и действует из B_2 в B_1. Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.2.

Теорема 6.3. Оператор $\mathrm{S}f$ действует из B_2 в B_1 и из B_1 в B_2 и ограничен. *Доказательство*: по определению

$$\mathrm{S}f = \int_K^\varphi f(\varphi)\,d\varphi \tag{6.23}$$

Следовательно,

$$|\mathrm{S}f| \leqslant \|f\|\int_\varphi^K \mathrm{dn}t\,dt = \|f\|\Big(\frac{\pi}{2} - am\varphi\Big)$$

Но если $0 \leqslant y \leqslant \pi/2$, то

$$\sin y \geqslant y\Big(1-\frac{y^2}{3!}\Big) \geqslant y\Big(1-\frac{1}{6}\,\frac{\pi^2}{4}\Big) \geqslant \frac{1}{2}y \tag{6.24}$$

Принимая $y = \pi/2 - am\varphi$, получаем

$$\pi/2 - am\varphi < 2\cos am\varphi = 2\mathrm{cn}\varphi < 2\mathrm{dn}\varphi$$

Отсюда следует, что $\|\mathrm{S}f\| \leqslant 2\|f\|$.

Теорема 6.4. Оператор T действует из пространства B_1 в B_2 и ограничен, т. е. $\|\mathrm{T}f\| \leqslant \varepsilon C_2\|f\|$, причем C_2 не зависит от k' и ε.

Доказательство. Вспоминая определение (3.5) оператора T, получаем:

$$|\mathrm{T}f| \leqslant \|f\| \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m \operatorname{sh}(K\lambda_m/\varepsilon)} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\operatorname{sh}\frac{\lambda_m}{\varepsilon}(K-\varphi) \int_0^{\varphi} \operatorname{dn} t \operatorname{sh}\frac{\lambda_m}{\varepsilon} t\, dt + \operatorname{sh}\frac{\lambda_m}{\varepsilon}\varphi \int_{\varphi}^{K} \operatorname{dn} t \operatorname{sh}\frac{\lambda_m}{\varepsilon}(K-t)\, dt \right] \right\} \tag{6.25}$$

Дадим оценку для функций

$$A(\varphi) = \int_0^{\varphi} \operatorname{dn} t \operatorname{sh}\frac{\lambda_m}{\varepsilon} t\, dt, \qquad B(\varphi) = \int_{\varphi}^{K} \operatorname{dn} t \operatorname{sh}\frac{\lambda_m}{\varepsilon}(K-t)\, dt \tag{6.26}$$

Очевидно, что

$$A(\varphi) < \int_0^{\varphi} \operatorname{dn} t \operatorname{ch}\frac{\lambda_m}{\varepsilon} t\, dt = \frac{\varepsilon}{\lambda_m} \operatorname{dn}\varphi \operatorname{sh}\frac{\lambda_m}{\varepsilon}\varphi +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{\lambda_m} \int_0^{\varphi} 2k^2 \operatorname{cn}\varphi \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sh}\frac{\lambda_m}{\varepsilon} t\, dt < \frac{\varepsilon}{\lambda_m}\left[\operatorname{dn}\varphi \operatorname{sh}\frac{\lambda_m}{\varepsilon}\varphi + A \right] \tag{6.27}$$

Отсюда

$$A(\varphi) < \frac{\varepsilon}{\lambda_m} \frac{\operatorname{dn}\varphi \operatorname{sh}(\lambda_m/\varepsilon\varphi)}{1-\varepsilon/\lambda_m} \tag{6.28}$$

Еще проще оценить $B(\varphi)$. Так как $\operatorname{dn}\varphi$ монотонная функция, то

$$B(\varphi) < \operatorname{dn}\varphi \int_{\varphi}^{K} \operatorname{sh}\frac{\lambda_m}{\varepsilon}(K-t)\, dt < \operatorname{dn}\varphi \int_{\varphi}^{K} \operatorname{ch}\frac{\lambda_m}{\varepsilon}(K-t)\, dt =$$

$$= \operatorname{dn}\varphi \frac{\varepsilon}{\lambda_m} \operatorname{sh}\frac{\lambda_m}{\varepsilon}(K-\varphi) < \frac{\varepsilon}{\lambda_m} \frac{1}{1-\varepsilon/\lambda_m} \operatorname{dn}\varphi \operatorname{sh}\frac{\lambda_m}{\varepsilon}(K-\varphi) \tag{6.29}$$

Если принять во внимание, что

$$\operatorname{sh}\frac{\lambda_m}{\varepsilon}\varphi \operatorname{sh}\frac{\lambda_m}{\varepsilon}(K-\varphi) \leqslant \operatorname{sh}\frac{\lambda_m}{\varepsilon}\varphi \operatorname{ch}\frac{\lambda_m}{\varepsilon}(K-\varphi) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left[\operatorname{sh}\frac{\lambda_m K}{\varepsilon} + \operatorname{sh}\frac{\lambda_m}{\varepsilon}(K-\varphi) \right] \leqslant \operatorname{sh}\frac{\lambda_m K}{\varepsilon} \tag{6.30}$$

то получим

$$|\mathrm{T}f| \leqslant \operatorname{dn}\varphi \|f\| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{\lambda_m^2} \frac{1}{1-\varepsilon/\lambda_m} \tag{6.31}$$

Оценим сумму ряда. Числа λ_m удовлетворяют неравенству

$$m\pi < \lambda_m < m\pi + \pi/2$$

Пусть $\varepsilon < \pi/2$, тогда $1 - \varepsilon/\lambda_m > 1 - 1/2 = 1/2$ и, следовательно,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_m^2} \frac{1}{1-\varepsilon/\lambda_m} < 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m^2} < \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{2}{3}$$

Из (6.31) теперь следует, что

$$\|\mathrm{T}f\| \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon\|f\|$$

Совершенно аналогично можно показать, что оператор $\mathrm{V}f$ действует из B_1 в B_2 и ограничен.

§ 7. Теорема существования. Из результатов § 5 следует, что уравнение (4.15) имеет четное периодическое решение,

$$y = 3\mathrm{NS}\delta\sigma, \qquad y' = 3\mathrm{MS}\delta\sigma \tag{7.1}$$

где оператор M определен в условии теоремы 6.2. Из (4.7) и (4.6) тогда получаем систему нелинейных интегральных уравнений для $\delta\theta$ и $\delta\tau$

$$\delta\theta = -3\mathrm{MS}\delta\sigma + 2\pi\varepsilon\mathrm{T}\delta f, \qquad \delta\tau = 3\mathrm{NS}\delta\sigma - 2\pi\varepsilon^2\mathrm{V}\delta f - \frac{3}{2}\varepsilon^2\mathrm{S}\delta f \tag{7.2}$$

где $\delta\sigma$ определяется (4.9). Если $\theta \in B_1$, а $\tau \in B_2$, то

$$\delta f \in B_1, \quad \mathrm{V}\delta f \in B_2, \quad \mathrm{T}\delta f \in B_1, \quad \mathrm{S}\delta f \in B_2, \quad \tau_0' \in B_1, \quad \delta f_1 \in B_1$$

Из (4.9) тогда следует, что $\delta\sigma \in B_1$. Вследствие теорем 6.1 и 6.3

$$\mathrm{MS}\delta\sigma \in B_1, \qquad \mathrm{NS}\delta\sigma \in B_2$$

Уравнения (7.2) можно записать теперь так:

$$\delta\theta = \mathrm{E}_1\delta\omega, \qquad \delta\tau = \mathrm{E}_2\delta\omega \tag{7.3}$$

где $\delta\omega$ есть $\{\delta\theta, \delta\tau\}$, а E_1 и E_2 — нелинейные операторы, действующие из B в B_1 и B_2 соответственно. Если обозначить через E пару операторов

$$\mathrm{E} = \{\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2\} \tag{7.4}$$

то систему уравнений (7.2) можно записать как одно функциональное уравнение в пространстве B

$$\delta\omega = \mathrm{E}\delta\omega \tag{7.5}$$

Легко показать, что это уравнение можно решать методом последовательных приближений. В самом деле, $\mathrm{E}\delta\omega$ можно представить в виде:

$$\mathrm{E}\delta\omega = \varepsilon(\mathrm{G}\delta f + \mathrm{G}_1\delta f_1) \tag{7.6}$$

где G и G_1 — ограниченные линейные операторы, действующие из B_1 в B. Нам нужно показать, что существует в пространстве B сфера такого радиуса, что оператор E отображает эту сферу на ее внутренность, причем удовлетворяется условие сжатости отображения, т. е.

$$\|\mathrm{E}\delta\omega\| \leqslant \|\delta\omega\|, \qquad \|\mathrm{E}\delta\omega_1 - \mathrm{E}\delta\omega_2\| \leqslant d\|\delta w_1 - \delta\omega_2\| \tag{7.7}$$

где $d < 1$. Обозначим через F и F_1 нелинейные операторы, ставящие в соответствие $\delta\omega \in B$, δf и δf_1, т. е.

$$\mathrm{F}\delta\omega = \delta f, \qquad \mathrm{F}_1\delta\omega = \delta f_1 \tag{7.8}$$

Доказательство того, что оператор E дает сжатое отображение, эквивалентно следующему: доказать, что если $\delta\omega$ изменяется на некотором ограниченном множестве в пространстве B, то найдутся такие постоянные M_1, M_2, M_3 и M_4, что

$$\mathrm{F}\delta\omega\| \leqslant M_1\|\delta\omega\|, \quad \|F_1\delta\omega\| \leqslant M_2\|\delta\omega\|, \quad \|\mathrm{F}_1\delta\omega - \mathrm{F}_1\delta\omega_1\| \leqslant M_3\|\delta\omega - \delta\omega_1\|$$
$$\|\mathrm{F}\delta\omega - \mathrm{F}\delta\omega_1\| \leqslant M_4\|\delta\omega - \delta\omega_1\| \tag{7.9}$$

Но неравенства (7.9) доказываются просто, так как δf и δf_1 аналитические функции $\delta\theta$ и $\delta\tau$. Отсюда сразу следует, что при достаточно малом ε оператор E будет давать сжатое отображение. Таким образом, нами доказана следующая теорема существования.

Можно найти такое число ε_0, что краевая задача (1.10) будет иметь решение, зависящее от двух параметров ε и k', если $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $0 \leqslant k' \leqslant 1/\sqrt{2}$.

§ 8. Связь параметров ε и k' с физическими параметрами, определяющими движение. Как известно, волновое установившееся движение определяется двумя безразмерными параметрами. Из результатов § 1 следует, что таких безразмерных параметров можно взять ν и π/λ. Из (1.8) следует, что период в физической плоскости совпадает с периодом в плоскости комплексного потенциала. На основании равенств (3.2) имеем, что

$$\varphi = \frac{\varphi^\circ}{\varepsilon}, \qquad \tau(\varphi) = \varepsilon^2\tau^\circ(\varphi^\circ), \qquad \theta(\varphi) = \varepsilon^3\theta^\circ(\varphi^\circ) \tag{8.1}$$

Так как период $\tau^\circ(\varphi^\circ)$ и $\theta^\circ(\varphi^\circ)$ равен $2K$, то период $\tau(\varphi)$ равен $2K/\varepsilon$, следовательно,

$$\frac{\pi}{\lambda} = \frac{K(k)}{\varepsilon} \tag{8.2}$$

Заметим теперь, что период может стремиться к бесконечности в двух случаях: 1) k — фиксировано, $\varepsilon \to 0$. Из (8.1) следует, что в пределе $\tau(\varphi)$ и $\theta(\varphi)$ дают тождественный ноль, т. е. кноидальная волна вырождается в плоскопараллельный поток. Именно этот случай был исследован Литтменом.

2) ε — фиксировано, $k \to 1$. В пределе получается уединенная волна.

Соотношение (8.2) дает связь λ с ε и k'. Соотношение (1.13) дает связь ν с ε и k'. Его можно записать в таком виде:

$$\frac{\pi}{\lambda} = \nu^{-\frac{1}{3}}\left[\frac{\pi}{\lambda} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^K \{e^{-\varepsilon^2\tau^\circ(\varphi^\circ)}\cos\varepsilon^3\theta^\circ(\varphi^\circ) - 1\}\,d\varphi^\circ\right] \tag{8.3}$$

или, используя (8.2), получаем

$$1 - \nu^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{K}\int_0^K [1 - e^{-\varepsilon^2\tau^\circ(\varphi^\circ)}\cos\varepsilon^3\theta^\circ(\varphi^\circ)]\,d\varphi^\circ \tag{8.4}$$

Пользуясь теоремой о неявных функциях, легко доказать, что при малых ε уравнение (8.4) разрешимо относительно ε. Когда ε мало, ν близко к 1. Можно легко вывести приближенные формулы, связывающие длину волны со скоростью и амплитудой. Этого мы здесь не делаем, так как соответствующие формулы более простым способом выведены в работе [6].

Поступила 25 XII 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. K o r t e w e g and De V r i e s. On the Change of Form of Long Waves, Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Wawes. Phil. Mag. (5) 1895, vol. XXXLX, p. 422.
2. Л а в р е н т ь е в М. А. До теорії довгих хвиль, Збірник Праць Інституту. Матем. АН УССР, 1946, № 8, 13—69.
3. F r i e d r i c h s K. and H y e r s D. The Existence of Solitary Waves. Comm. on Pure and Appl. Math., vol. 7, 1954, № 3, 517—550; русск. пер. К. О. Фридрихс и Д. Г. Хайерс, Существование уединенных волн. Сб. пер. «Теория поверхн. волн», ИИЛ, М., 1959, стр. 145—184.
4. L i t t m a n W., On Existence of Periodic Waves near Critical Speed, Comm. on Pure and Appl. Math., 1957, vol. X, № 2, 241—270; русск. пер.: Уолтер, Литтмен, О существовании периодических волн при скорости, близкой к критической, Сб. пер. «Теор. поверхн. волн», ИИЛ, М., 1959, стр. 185—217.
5. М о и с е е в Н. Н. О течении тяжелой жидкости над волнистым дном, ПММ, 1957, т. 21, вып. 1.
6. М о и с е е в Н. Н., Т е р-К р и к о р о в А. М. О волновых движениях при скоростях, близких к критической. Тр. МФТИ, № 3, 1959.