Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОДНО ПАРАДОКСАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ—СТОКСА

М. А. Гольдштик

(Ленинград)

Рассмотрим взаимодействие безграничной плоскости с бесконечной вихревой нитью, проходящей через начало координат нормально к плоскости.

Физической моделью рассматриваемой задачи может служить пластина, пронизанная тонким вращающимся стержнем большой длины. Если бы плоскости не было, то движение жидкости определялось бы законом

$$v_\varphi = \frac{C_0}{r}, \qquad P = P_\infty - \frac{\rho C_0^2}{2r^2}$$

где v_φ — тангенциальная компонента вектора скорости, P_∞ — давление на бесконечном удалении от вихревой нити. Вертикальная v_z и радиальная v_r составляющие скорости при этом были бы равны нулю.

Трение потока о плоскость приводит к возникновению вторичных течений, изучение которых представляет интерес в связи с гидродинамическим процессом в вихревой или циклонной камере сгорания в районе ее дна. Кроме того, поставленная задача может представить интерес для динамической метеорологии.

Картину возникновения вторичных течений можно представить следующим образом. Частицы жидкости, прилегающие к плоскости, теряют окружную скорость, следовательно, на плоскости исчезает поле центробежных сил. Вследствие преобладающего действия поля давления вблизи плоскости возникает течение в направлении перепада давления, т. е. к оси вихря, и притом с такой скоростью, которая обуславливает появление сил трения, компенсирующих уменьшение центробежных сил. Вследствие неразрывности частицы жидкости должны приобретать движение вдоль оси от плоскости. Аналогичная картина вторичных течений имеет место и при вращении жидкости на бесконечности как твердого тела [1].

1. Математическая постановка задачи и редукция уравнений. Считая жидкость несжимаемой, а движение установившимся и осесимметричным, напишем уравнение Навье — Стокса в цилиндрической системе координат

$$\begin{gathered}
v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right) \\
v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = \nu\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial r v_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2}\right), \qquad \frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{\partial r v_z}{\partial z} = 0 \qquad (1.1) \\
v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)
\end{gathered}$$

Граничные условия:

$$v_r = v_\varphi = v_z = 0 \qquad \text{при } z = 0$$

$$v_\varphi = \frac{C_0}{r}, \qquad P = P_\infty - \frac{\rho C_0^2}{2r^2} \qquad \text{при } z = \infty$$

на бесконечности жидкость покоится, т. е.

$$v_r = v_\varphi = v_z = 0, \qquad P = P_\infty \qquad \text{при } r = \infty$$

при $r = 0$ составляющая v_z ограничена, $v_r = 0$ (условия отсутствия на оси источников или стоков)

Введем безразмерные функции

$$u = \frac{rv_r}{C_0}, \qquad \Phi = \frac{rv_\varphi}{C_0}, \qquad w = \frac{rv_z}{C_0}, \qquad \pi = \frac{r^2(P - P_\infty)}{\rho C_0{}^2}$$

Тогда система (1.1) преобразуется к виду:

$$\begin{gathered} u\frac{\partial u}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{u^2 + \Phi^2}{r} = -\frac{\partial \pi}{\partial r} + \frac{2\pi}{r} + \frac{\nu}{C_0}r\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\ u\frac{\partial \Phi}{\partial r} + w\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\nu}{C_0}r\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right), \qquad \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ u\frac{\partial w}{\partial r} + w\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{uw}{r} = -\frac{\partial \pi}{\partial z} + \frac{\nu}{C_0}r\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \end{gathered} \tag{1.2}$$

Соответственно граничные условия примут вид

$$\begin{aligned} u = \Phi = w = 0 & \qquad \text{при } z = 0 \\ \Phi = 1, \quad \pi = -\frac{1}{2} & \qquad \text{при } z = \infty \\ u = w = 0 & \qquad \text{при } r = 0 \end{aligned}$$

Будем искать решение системы (1.2), обладающее следующими свойствами:

а) функции u, Φ, w, π должны быть непрерывными во всем замкнутом полупространстве, кроме, может быть, начала координат и «точки» с координатами $r = \infty$; $z = \infty$;

б) при приближении к границам полупространства эти функции должны стремиться к пределам, определяемым граничными условиями.

Искомые безразмерные функции u, Φ, w, π должны зависеть от всевозможных безразмерных комбинаций, составленных из величин r, z, ν, C_0. Из указанных четырех величин можно составить две и только две независимые безразмерные комбинации

$$\frac{\nu}{C_0} = k, \qquad \frac{z}{r} = \eta$$

Величина $1/k$ играет роль числа Рейнольдса. Следовательно, можно утверждать, что любая из функций u, Φ, w и π должна зависеть не от r и z в отдельности, а от их единственной комбинации η. Число k играет роль параметра. Таким образом, поставленная задача относится к классу автомодельных [2].

Введем η в систему (1.2), имея в виду, что

$$\frac{\partial}{\partial r} = -\frac{z}{r^2}\frac{d}{d\eta}, \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{d}{d\eta}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{z^2}{r^4}\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{2z}{r^3}\frac{d}{d\eta}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2}\frac{d^2}{d\eta^2}$$

Тогда получим уравнения

$$u'(w - \eta u) - u^2 - \Phi^2 = \eta\pi' + 2\pi + k\,[(1 + \eta^2)u'' + 3\eta u'] \tag{1.3}$$

$$\Phi'(w - \eta u) = k\,[(1 + \eta^2)\,\Phi'' + 3\eta\Phi'] \tag{1.4}$$

$$w'(w - \eta u) = -\pi' + k\,[(1 + \eta^2)\,w'' + 3\eta w' + w] \tag{1.5}$$

$$w' = \eta u' \tag{1.6}$$

Для преобразования граничных условий заметим, что при введении одной переменной η точки $(\infty,\ z)$ и $(r,\ 0)$ переходят в одну точку $\eta = 0$, а точки $(0,\ z)$ и $(r,\ \infty)$ переходят в точку $\eta = \infty$. (При этом в точках $(0,\ 0)$ и $(\infty,\ \infty)$ аргумент η не определен.) Поэтому

$$u = \Phi = w = 0 \qquad \text{при } \eta = 0 \tag{1.7}$$

$$u = w = 0, \qquad \Phi = 1, \qquad \pi = -\frac{1}{2} \qquad \text{при } \eta = \infty \tag{1.8}$$

Отметим некоторые свойства функций u и w, необходимые для дальнейшего. Можно показать, что

$$\lim_{\eta\to\infty} (w - \eta u) = \lim_{\substack{r\to 0\\ z\neq 0}} \frac{rv_z - zv_r}{C_0} = 0$$

так что

$$w - \eta u = 0 \qquad \text{при } \eta = \infty \tag{1.9}$$

Так как в силу условия (1.7) $u = 0$ при $r = \infty$ при всех $z \neq \infty$, то

$$\lim_{\eta\to 0} \frac{dw}{d\eta} = \lim_{\eta\to 0} \eta u' = \lim_{\substack{r\to\infty\\ z\neq\infty}} z\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \text{или} \quad w'(0) = 0 \tag{1.10}$$

Возьмем от (1.5) неопределенный интеграл по η

$$\pi = -w(w - \eta u) + k\,[(1 + \eta^2)\,w' + \eta w] + C_1 \tag{1.11}$$

Для определения C_1 положим $\eta \to \infty$. Тогда в силу (1.7) и (1.9) первый член (1.11) обратится в нуль; вычислим

$$M = \lim_{\eta\to\infty} (\eta^2 w' + \eta w) = \lim_{\eta\to\infty} \eta\,(\eta w)' = \lim_{\eta\to\infty} (\pi - C_1) = -\frac{1}{2} - C_1$$

так что искомый предел существует. Рассмотрим предел

$$L = \lim_{\eta\to\infty} \frac{\eta w}{\ln \eta}$$

для вычисления которого можно применить правило Лопиталя[1], так как предел отношения производных

$$\lim_{\eta\to\infty} \frac{(\eta w)'}{(\ln \eta)'} = \lim_{\eta\to\infty} \eta\,(\eta w)' = M$$

по условию существует, следовательно, $L = M$. С другой стороны

$$L = \lim_{r\to 0} \frac{zv_z}{C_0} \Big/ \lim_{\eta\to\infty} \ln \eta = 0 \tag{1.12}$$

так как v_z ограничена при $r = 0$. Таким образом, $M = 0$ и $C_1 = -1/2$.

Введем новую переменную и новую функцию

$$x = \frac{\eta}{\sqrt{1 + \eta^2}}, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2}}(w - \eta u) = \sqrt{1 - x^2}\left(w - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,u\right) \tag{1.13}$$

Тогда, исходя из (1.6), нетрудно получить

$$u = -(1 - x^2)\,y' - xy, \qquad w = \sqrt{1 - x^2}\,(y - xy') \tag{1.14}$$

где штрихом обозначено дифференцирование по x.

---

[1] Условия применимости правила Лопиталя см., например, [3]. Следует обратить внимание на примечание на стр. 321.

Подставив (1.11) в (1.3), уравнения (1.3) и (1.4) можно преобразовать к виду

$$-k\,(1-x^2)^2\,y''' = 1 - \Phi^2 - \frac{1-x^2}{2}\,(y^2)'' - x\,(y^2)' + y^2 \qquad (1.15)$$

$$y\Phi' = k\,(1-x^2)\,\Phi'' \qquad (1.16)$$

Условия

$$y\,(0) = 0, \qquad y\,(1) = 0, \qquad y'\,(0) = 0 \qquad (1.17)$$

$$\Phi\,(0) = 0, \qquad \Phi\,(1) = 1 \qquad (1.18)$$

Первое условие (1.17) следует из (1.13) и (1.7); второе условие (1.17) следует из (1.13) и (1.9); третье условие (1.17) следует из первого равенства (1.14) с учетом (1.7); условия (1.18) следуют из (1.7) и (1.8).

Поставленных условий как раз достаточно, так как система (1.15) — (1.16) эквивалентна одному уравнению пятого порядка.

Продифференцируем уравнение (1.15)

$$-k\,(1-x^2)^2\,y^{\mathrm{IV}} + 4kx\,(1-x^2)\,y''' = -2\Phi\Phi' - \frac{1-x^2}{2}\,(y^2)''' \qquad (1.19)$$

или

$$-k\,(1-x^2)\,y^{\mathrm{IV}} + 4kxy''' = -2\frac{\Phi\Phi'}{1-x^2} - \frac{1}{2}\,(y^2)''' \qquad (1.20)$$

Интегрируем (1.19) по частям

$$-k(1-x^2)\,y''' + 2kxy'' - 2ky' = -2\int_0^x \frac{\Phi\Phi'}{1-x^2}\,dx - \frac{1}{2}\,(y^2)'' + C_2 \qquad (1.20)$$

Интегрируем (1.20) дважды

$$-k(1-x^2)\,y' - 2kxy = -2\int_0^x dx\int_0^x dx\int_0^x \frac{\Phi\Phi'}{1-x^2}\,dx - \frac{y^2}{2} + \frac{C_2x^2}{2} - \frac{C}{2}\,x + C_3 \qquad (1.21)$$

Полагая здесь $x = 0$, в силу условий $y\,(0) = 0$ и $y'\,(0) = 0$ находим $C_3 = 0$.

Постоянная C_2 является «лишней», так как ее происхождение связано с тем, что порядок уравнения (1.15) был повышен при дифференцировании. Для определения C_2 сопоставим (1.15) и (1.20) при $x = 0$. При этом следует иметь в виду, что $xy'' = 0$ при $x = 0$, как это легко видеть, дифференцируя второе равенство (1.14) и используя (1.10).

Полагая в (1.15) и (1.20) $x = 0$, находим

$$-ky'''\,(0) = 1 - \tfrac{1}{2}\,y^{2''}\,(0), \qquad -ky'''\,(0) = -\tfrac{1}{2}\,y^{2''}\,(0) + C_2$$

Сравнивая эти выражения, получаем $C_2 = 1$. Следовательно, (1.21) можно записать в виде

$$2k(1-x^2)\,y' + 4\,kxy - y^2 = 4\int_0^x dx\int_0^x dx\int_0^x \frac{\Phi\Phi'}{1-x^2}\,dx - x^2 + Cx = F\,(x) \qquad (1.22)$$

Для определения постоянной C используем второе условие (1.17) которое дает $F(1) = 0$. В самом деле, возвращаясь к переменной η, и формулы (1.13) находим

$$(1-x^2)\frac{dy}{dx} = -u - \frac{\eta}{1+\eta^2}(w-\eta u)$$

Отсюда в силу (1.8), (1.9) имеем, что $(1-x^2)\,y' \to 0$ при $\eta\to\infty$ $(x\to 1)$. Интегрируя (1.16), последовательно имеем

$$\Phi' = a \exp \int_0^x \frac{y\,dx}{k\,(1-x^2)}, \qquad \Phi = a \int_0^x \Big[\exp \int_0^x \frac{y\,dx}{k\,(1-x^2)}\Big] dx \tag{1.23}$$

Постоянная a должна быть определена из последнего условия (1.18). Заметим, что $a = \Phi'(0)$. Пусть далее

$$y = 2k\,(1-x^2)\,S \tag{1.24}$$

Тогда из (1.22) и (1.23) имеем

$$S' = S^2 + \frac{F(x)}{4k^2\,(1-x^2)^2}, \qquad \Phi = a \int_0^x \Big[\exp \int_0^x 2S\,dx\Big] dx \tag{1.25}$$

Здесь

$$a = \Big\{\int_0^1 \Big[\exp \int_0^x 2S\,dx\Big] dx\Big\}^{-1}, \qquad S(0) = 0 \tag{1.26}$$

При этом последнее условие следует из (1.17).

2. Анализ уравнений. Для дальнейшего особое значение имеет выяснение знака функции

$$F(x) = 4\int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x \frac{\Phi\Phi'}{1-x^2}\,dx - x^2 + Cx \tag{2.1}$$

По условию функция $y\,(x)$ непрерывна на всем замкнутом сегменте $[0, 1]$. Поэтому согласно (1.23) $\Phi'(x)$ непрерывна на интервале $0 \leqslant x < 1$. Кроме того, Φ' не может изменить знака. Следовательно, функция $\Phi\,(x)$ монотонна. А так как $\Phi(0) = 0$ и $\Phi(1) = 1$, то

$$\Phi(x) \leqslant 1 \quad \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{2.2}$$

Преобразуем (2.1), используя формулу преобразования многократного интеграла в однократный

$$F(x) = 2\int_0^x \frac{(x-t)^2}{1-t^2}\,\Phi\Phi'\,dt - x^2 + Cx$$

или

$$F(x) = 2\int_0^x \frac{(x-t)(1-tx)}{(1-t^2)^2}\,\Phi^2 dt - x^2 + Cx \tag{2.3}$$

Определив C из условия $F(1) = 0$, найдем

$$F(x) = x - x^2 - 2(1-x)^2 \int_0^x \frac{t\Phi^2}{(1-t^2)^2}\,dt - 2x \int_x^1 \frac{\Phi^2 dt}{(1+t)^2} \tag{2.4}$$

Два последних члена в (2.4) строго отрицательны, поэтому, если вместо функции Φ подставить в (2.4) ее верхнюю грань $\Phi = 1$, то от этого правая часть (2.4) не увеличится, т. е.

$$F(x) \geqslant x - x^2 - 2(1-x)^2 \int_0^x \frac{t\,dt}{(1-t^2)^2} - 2x \int_x^1 \frac{dt}{(1+t)^2} \equiv 0 \tag{2.5}$$

Итак, $F(x) \geqslant 0$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$; с учетом (2.5) из (1.25) на основании теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах [4] следует, что $S \geqslant 0$, а следовательно, и $y \geqslant 0$.

Так как $\Phi' \geqslant 0$, то и $\Phi'' \geqslant 0$, как это следует из (1.16).

Полученные результаты позволяют установить неравенство

$$\Phi(x) \leqslant x \quad \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{2.6}$$

В самом деле, (2.6) эквивалентно неравенству

$$H(x) = \Phi(x) - x \leqslant 0$$

Функция $H(x)$ имеет непрерывную производную и обращается в нуль в точках $x = 0$ и $x = 1$, следовательно, по теоерме Ролля она должна иметь по крайней мере один экстремум в промежутке $0 \leqslant x \leqslant 1$. Условие $\Phi'' \geqslant 0$ устанавливает, что этот экстремум может быть только один, поскольку между двумя экстремумами должна быть точка перегиба, что исключается условием $\Phi'' \geqslant 0$. Далее, то же условие $\Phi'' \geqslant 0$ показывает, что $H(x)$ имеет минимум. Но функция, имеющая на интервале $[0,1]$ единственный минимум и обращающаяся на концах интервала в нуль, необходимо отрицательна, что и доказывает неравенство (2.6).

Из неравенства (2.6) с очевидностью следует первый парадоксальный результат

$$a \leqslant 1 \quad \text{при любых } k \tag{2.7}$$

что находится в противоречии с представлениями теории пограничного слоя, согласно которой $a \sim 1/\sqrt{k}$ и, следовательно, при $k \to 0$ величина a должна неограниченно возрастать (см. [5], где методом Польгаузена решена задача, аналогичная рассматриваемой).

Неравенство (2.6) позволяет уточнить неравенство (2.5). Подставив в (2.4) вместо $\Phi(t)$ функцию t, получим неравенство

$$F(x) \geqslant (4\ln 2 - 2)\, x + 2x^2 - (1-x)^2 \ln(1-x) - (1+x)^2 \ln(1+x) = \\ = F_1(x) \tag{2.8}$$

Функция (2.8) неудобна для дальнейшего, поэтому введем

$$F_2(x) = \frac{1}{2} x (1 - x^2)^2 \tag{2.9}$$

Можно показать, что в интервале $0 \leqslant x < 1$ $F_1(x) \geqslant F_2(x)$ (это наглядно следует из фиг. 1). Но, как легко видеть,

$$\lim_{x \to 1} \frac{F_2(x)}{F_1(x)} = 0$$

Поэтому на сегменте $[0,1]$ всюду выполнено неравенство $F_2(x) \leqslant F_1(x)$, или с учетом (2.8)

$$F(x) \geqslant F_2(x) \quad \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{2.10}$$

Рассмотрим уравнение

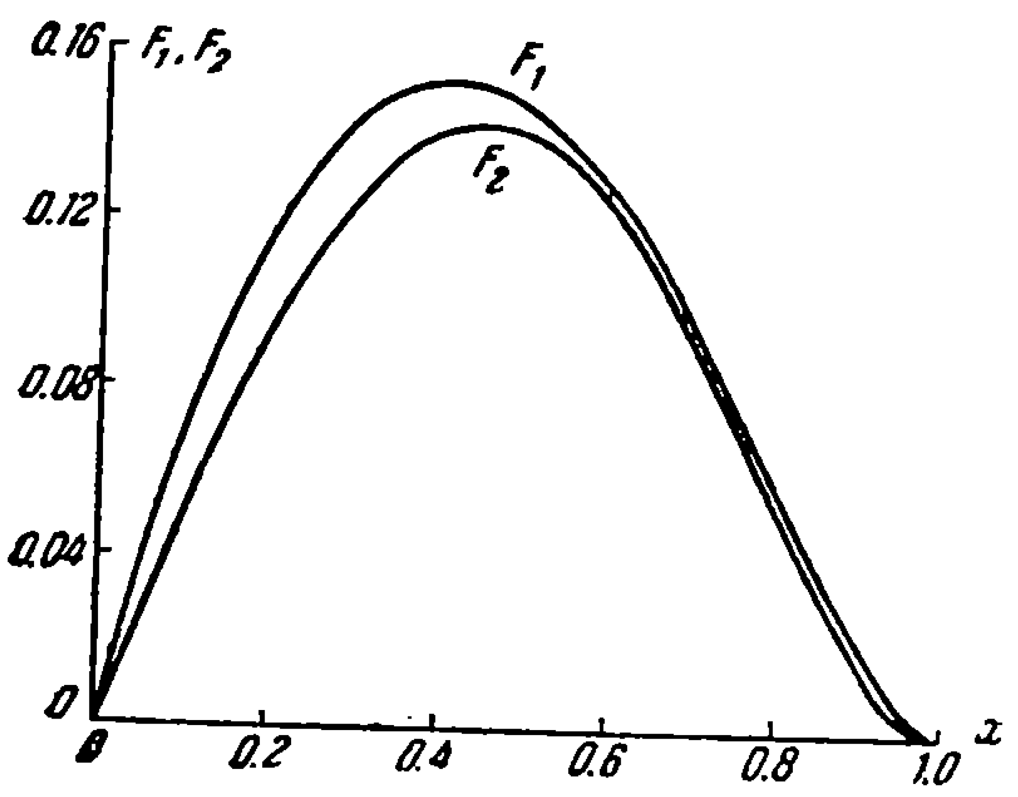
$$\tau' = \tau^2 + \frac{F_2(x)}{4k^2(1-x^2)^2} \tag{2.11}$$

Решение (2.11), удовлетворяющее условию $\tau(0)=0$, имеет вид

$$\tau=\frac{3}{2}\varkappa\sqrt{x}\,\frac{J_{2/3}(\varkappa x^{3/2})}{J_{-1/3}(\varkappa x^{3/2})}\qquad\left(\varkappa=\frac{1}{3k\sqrt{2}}\right)\tag{2.12}$$

Сопоставляя (2.11) с (1.25), в силу неравенства (2.10) на основании теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах заключаем, что

$$S(x)\geqslant\tau(x)\qquad\text{при } 0\leqslant x<1\tag{2.13}$$



Фиг. 1

Но неравенство (2.13) не может быть выполнено при произвольных значениях параметра k. В самом деле, (2.12) представляет собой мероморфную функцию, имеющую полюса в точках

$$x_n=(3k\sqrt{2}\mu_n)^{2/3}\tag{2.14}$$

где μ_n — корни уравнения $J_{-1/3}(\mu)=0$. Так как по условию $S(x)$ — непрерывная функция на интервале $[0,1]$, то для возможности выполнения неравенства необходимо во всяком случае потребовать, чтобы первый полюс функции (2.12) лежал вне интервала $[0,1]$, т. е. чтобы

$$x_1>1,\quad\text{или}\quad k>\frac{1}{3\sqrt{2}\mu_1}\approx\frac{1}{8}\tag{2.15}$$

Если же условие (2.15) не выполняется, то $S(x)$ не может быть непрерывной функцией на всем интервале $[0,1]$. Таким образом, получен второй парадоксальный результат: при числах Рейнольдса, превышающих 8, поставленная задача не имеет ограниченного решения.

3. Доказательство существования и единственности решения при малых числах Рейнольдса. Докажем, что если $1/k\leqslant4.8096$, то: а) при условии $y(0)=0$ система уравнений (1.22) и (1.23) имеет решение, единственное и непрерывное на сегменте $[0,1]$; б) при $x\to1$ функция $y(x)$ имеет предел, равный нулю; в) выполняются все исходные граничные условия для функций v_r, v_z, v_φ и p. Будем решать систему уравнений (1.25) и (2.4) методом последовательных приближений по следующей схеме:

$$\Phi_n=\left(\int_0^x\left[\exp\int_0^x 2S_{n-1}dx\right]dx\right)\Bigg/\left(\int_0^1\left[\exp\int_0^x 2S_{n-1}dx\right]dx\right)\tag{3.1}$$

$$F_n=x-x^2-2(1-x)^2\int_0^x\frac{t\Phi_n^2}{(1-t^2)^2}\,dt-2x\int_x^1\frac{\Phi_n^2}{(1+t)^2}\,dt\tag{3.2}$$

$$S_0=0,\qquad S_n=\int_0^x\left[S_{n-1}^2+\frac{F_n(x)}{4k^2(1-x^2)^2}\right]dx\tag{3.3}$$

Имеем $$\Phi_1=x$$

$$F_1=(4\ln2-2)\,x+2x^2-(1-x)^2\ln(1-x)-(1+x)^2\ln(1+x)$$

$$S_1=\frac{1}{4k^2}\left[\frac{x}{1+x}+\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1+2x}{1+x}\ln2-\frac{1}{1-x}\ln\frac{1+x}{2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\,\frac{1-x}{1+x}\ln(1-x)\right]$$

Как видно, $S_1(x)$ есть непрерывная функция на всем сегменте [0,1], при этом $S_1(1) = (1 - \ln 2) / 4k^2$. Итак, все функции первого приближения непрерывны при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Допустим, что тем же свойством обладают и функции S_{n-1}, F_{n-1}, Φ_{n-1}. Докажем, что при этом S_n, F_n, Φ_n также будут непрерывны на сегменте [0,1].

Непрерывность $\Phi_n(x)$ и $\Phi_n'(x)$ непосредственно следует из (3.1), причем $\Phi_n(x) \leqslant 1$, а $\Phi_n'(x) \leqslant M_n$, где M_n — максимальное значение положительной функции $\Phi_n'(x)$.

Из (3.2) имеем $F_n(1) = 0$. Вычислим $F_n'(1)$.

$$F_n'(1) = -1 + 4 \lim_{x \to 1} \left[(1-x) \int_0^x \frac{t\Phi_n^2 dt}{(1-t^2)^2}\right] = -1 + \Phi_n^2(1) = 0$$

так как $\Phi_n(1) = 1$. Используя (2.1), найдем

$$F_n'' = 4 \int_0^x \frac{\Phi_n \Phi_n'}{1-x^2} dx - 2$$

Подставив сюда полученные оценки для Φ_n и Φ_n', получим

$$F_n'' \leqslant 2M_n \ln \frac{1+x}{1-x} - 2$$

Дважды интегрируя это неравенство в пределах от x до 1, найдем

$$F_n(x) \leqslant 2M_n \left\{\frac{(1-x)^2}{4}[1 - 2\ln(1-x)] + 1 - 2x \ln 2 + \right.$$
$$\left. + \frac{(1+x)^2}{4}[2\ln(1+x) - 1]\right\} - (1-x)^2 = 2M_n \left\{\frac{(1-x)^2}{4}[1 - 2\ln(1-x)] + \right.$$
$$\left. + \frac{1+\ln 2}{2}(1-x^2) - \frac{1}{12}(1-x^3) - \ldots\right\} - (1-x)^2 \qquad (3.4)$$

Отсюда

$$F_n(x) \leqslant M_n (1-x^2)^2 \left[\frac{3 + 2\ln 2}{2} - \ln(1-x)\right] \qquad (3.4)$$

В силу того, что $\Phi_n(x) \leqslant 1$, из (3.2) следует, что $F_n(x) \geqslant 0$.

Подставляя полученные оценки для $F_n(x)$ в (3.3), найдем, что $S_n(x)$ непрерывна всюду на сегменте [0,1], так как отношение $F_n(x) / [4k^2(1-x^2)^2]$ согласно (3.4) в точке $x = 1$ имеет интегрируемый разрыв. Итак, методом полной индукции доказана непрерывность всех приближений на сегменте [0,1]. Докажем их сходимость при условии $1 / k < 4.8096$.

В силу того, что $S_0 = 0$ и $F_1(x) \geqslant 0$, из (3.3) заключаем, что

$$S_1 \geqslant S_0 = 0 \qquad (3.5)$$

Покажем, что если $S_n \geqslant S_{n-1}$, то $\Phi_{n+1} \leqslant \Phi_n$. Рассмотрим разность

$$\Phi_{n+1} - \Phi_n = \frac{\Psi_{n+1}(x)}{\Psi_{n+1}(1)} - \frac{\Psi_n(x)}{\Psi_n(1)} = \frac{\Psi_{n+1}(x)\Psi_n(1) - \Psi_{n+1}(1)\Psi_n(x)}{\Psi_{n+1}(1)\Psi_n(1)}$$

Здесь и для дальнейшего введены обозначения

$$\Psi_n(x) = \int_0^x \psi_{n-1}(x)\, dx, \quad \psi_n(x) = \exp \int_0^x 2S_n dx$$

В силу неравенства $S_n \geqslant S_{n-1}$ можно написать:

$$S_n = S_{n-1} + \delta(x)$$

где $\delta(x) \geqslant 0$. В таком случае

$$\psi_n = \exp \int_0^x 2\delta dx \exp \int_0^x 2S_{n-1} dx = \varphi(x) \psi_{n-1}$$

при этом функции $\varphi(x)$ и ψ_{n-1} непрерывны, положительны, а функция $\varphi(x)$ еще и не убывает, так как

$$\varphi'(x) = 2\delta \exp \int_0^x 2\delta dx \geqslant 0$$

На основании теоремы о среднем имеем

$$\int_0^x \varphi(t) \psi_{n-1} dt = \varphi(\theta) \int_0^x \psi_{n-1} dx \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant x) \tag{3.6}$$

С учетом этого находим

$$\Phi_{n+1} - \Phi_n = -\frac{\varphi(\theta_1) - \varphi(\theta_2)}{\varphi(\theta_2)} \frac{\psi_n(x)}{\psi_n(1)} \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant \theta_1 \leqslant x \\ 0 \leqslant \theta_2 \leqslant 1 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Докажем, что $\theta_1 \leqslant \theta_2$. Считая, что $\theta = \theta(x)$, продифференцируем (3.6) по x. Имеем

$$\varphi(x) \psi_{n-1}(x) = \varphi(\theta) \psi_{n-1}(x) + \frac{d\varphi}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} \int_0^x \psi_{n-1} dx$$

В силу того, что $\varphi(x) \geqslant \varphi(\theta)$ и $d\varphi / d\theta \geqslant 0$, заключаем, что $d\theta / dx \geqslant 0$; так как $x \leqslant 1$, то это доказывает, что $\theta_1 \leqslant \theta_2$, откуда $\varphi(\theta_1) \leqslant \varphi(\theta_2)$, а следовательно, согласно (3.7) и

$$\Phi_{n+1} \leqslant \Phi_n \tag{3.8}$$

Используя оценку (3.8), согласно (3.2) получаем

$$F_{n+1} \geqslant F_n \tag{3.9}$$

Отправляясь от (3.5), находим последовательно $\Phi_2 \leqslant \Phi_1$, $F_2 \geqslant F_1$ и согласно (3.3) $S_2 \geqslant S_1$. Допустим, что $S_n \geqslant S_{n-1}$, тогда верны (3.8) и (3.9). Используя (3.3), составим разность

$$S_{n+1} - S_n = \int_0^x \left[(S_n^2 - S_{n-1}^2) + \frac{F_{n+1} - F_n}{4k^2(1 - x^2)^2} \right] dx \geqslant 0, \qquad S_{n+1} \geqslant S_n$$

Таким образом, методом полной индукции доказано, что все последовательные приближения образуют последовательности

$$\Phi_1 \geqslant \Phi_2 \geqslant \ldots \geqslant \Phi_n \geqslant \ldots \tag{3.10}$$

$$0 \leqslant F_1 \leqslant F_2 \leqslant \ldots \leqslant F_n \leqslant \ldots \tag{3.11}$$

$$0 \leqslant S_1 \leqslant S_2 \leqslant \ldots \leqslant S_n \leqslant \ldots \tag{3.12}$$

Но согласно (3.1) функция $\Phi_n \geqslant 0$. Поэтому последовательность функций (3.10) имеет предел

$$\Phi(x) = \lim \Phi_n(x) \qquad \text{при } n \to \infty \tag{3.13}$$

Опять-таки в силу неравенства $\Phi_n \geqslant 0$ из (3.2) заключаем, что

$$F_n \leqslant x - x^2 \leqslant \frac{1 + x}{4}(1 - x^2) \tag{3.14}$$

Ограничение (3.14) означает, что последовательность (3.11) также имеет предел

$$F(x) = \lim F_n(x) \qquad \text{при } n \to \infty \tag{3.15}$$

Подставив (3.14) в (3.3), получаем

$$S_n \leqslant \int_0^x \left[S_{n-1}^2 + \frac{1}{16k^2(1-x)}\right] dx \tag{3.16}$$

Рассмотрим уравнение

$$\sigma' = \sigma^2 + \frac{1}{16k^2(1-x)}, \qquad \sigma(0) = 0 \tag{3.17}$$

Решая (3.17) методом последовательных приближений, получим

$$\sigma_0 = 0, \qquad \sigma_n = \int_0^x \left[\sigma_{n-1}^2 + \frac{1}{16k^2(1-x)}\right] dx \tag{3.18}$$

Вычтем из неравенства (3.16) равенство (3.18)

$$S_n - \sigma_n \leqslant \int_0^x (S^2{}_{n-1} - \sigma^2{}_{n-1})\, dx \tag{3.19}$$

Имеем

$$S_1 - \sigma_1 \leqslant 0, \qquad S_2 - \sigma_2 \leqslant \int_0^x (S_1{}^2 - \sigma_1{}^2)\, dx \leqslant 0 \text{ и т. д.}$$

Легко видеть, что вообще $S_n \leqslant \sigma_n$ и, кроме того,

$$0 \leqslant \sigma_1 \leqslant \sigma_2 \leqslant \ldots \leqslant \sigma_n \leqslant \ldots$$

Но согласно теореме Пикара σ_n на некотором интервале I сходятся к точному решению σ, которое нетрудно найти, решив (3.17)

$$\sigma = \frac{b^2}{2t} \frac{J_0(t) - Y_0(t)\, J_0(b) \,/\, Y_0(b)}{J_1(t) - Y_1(t)\, J_0(b) \,/\, Y_0(b)} \qquad \left(t = \frac{\sqrt{1-x}}{2k},\ b = \frac{1}{2k}\right) \tag{3.20}$$

Заметив, что при изменении x в интервале $[0,1]$ переменная t изменяется в пределах $0 \leqslant t \leqslant b$, найдем корни знаменателя (3.20), т. е. решим уравнение

$$\frac{J_1(t)}{Y_1(t)} = \frac{J_0(b)}{Y_0(b)} \tag{3.21}$$

Решаем (3.21) графически. На фиг. 2 представлены графики функций $J_0(t) \,/\, Y_0(t)$ и $J_1(t) \,/\, Y_1(t)$. Для определения первого корня уравнения (3.21) поступаем следующим образом. Берем точку $t = b$ и находим значение $J_0(b) \,/\, Y_0(b)$. Затем проводим горизонталь, соответствующую этому значению, до пересечения с кривой $J_1(t) \,/\, Y_1(t)$. Абсцисса точки пересечения и дает искомый корень t_1. Из рассмотрения фиг. 2 нетрудно убедиться в том, что если в $b < \lambda_1$, где λ_1 — первый корень уравнения $J_0(\lambda) = 0$, то корень t_1 лежит вне интервала $[0,b]$. Следовательно, при

$$b = \frac{1}{2k} < \lambda_1 = 2.4048 \tag{3.22}$$

уравнение (3.21) не имеет корней в промежутке $[0.1]$.

Это означает, что при условии (3.22) функция (3.20) не имеет никаких особенностей на открытом интервале $0 \leqslant x < 1$. Исследуем поведение этой функции в окрестности точки $x = 1$ $(t = 0)$. Используя для функций

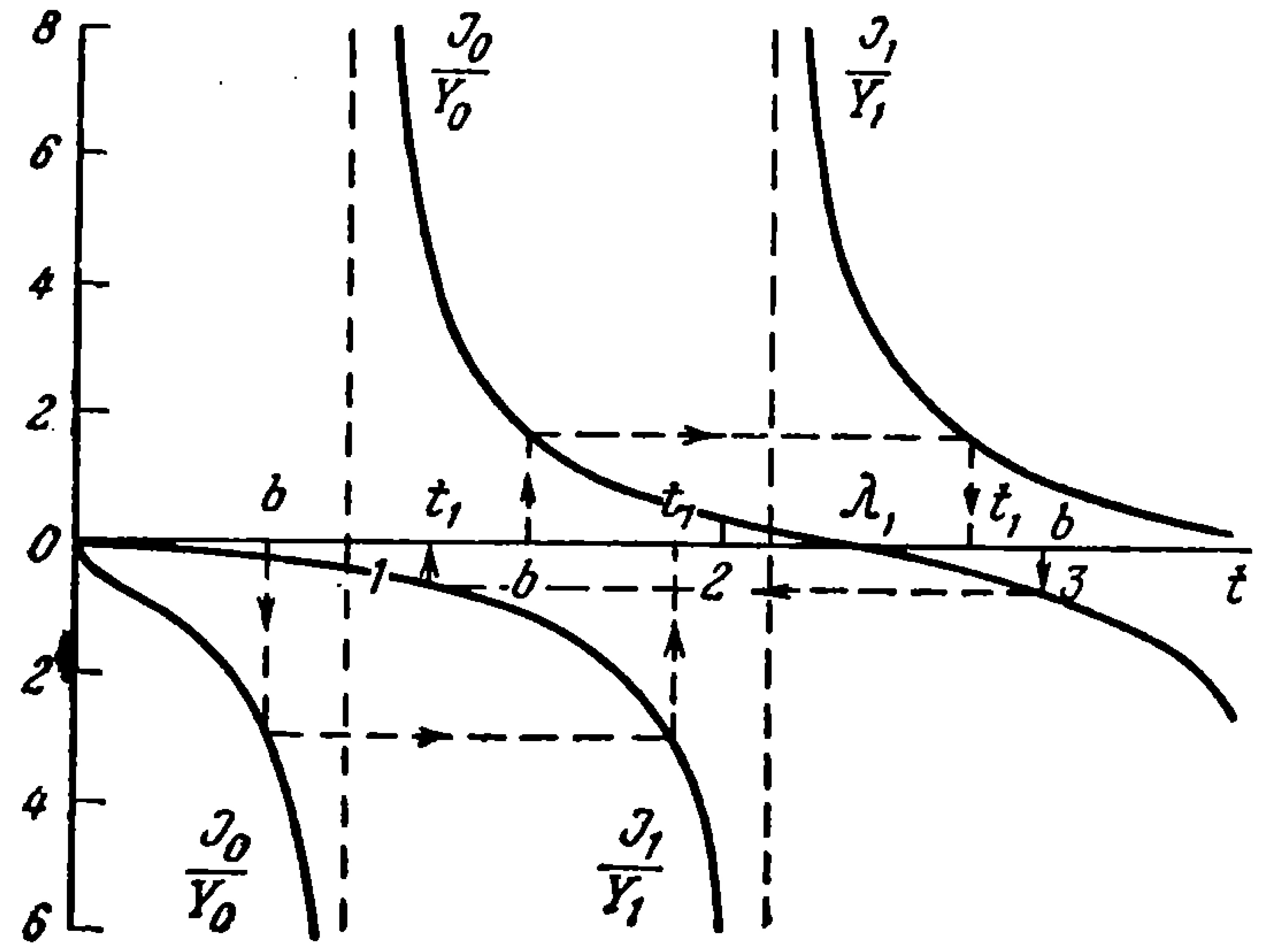
$Y_0(t)$ и $Y_1(t)$ представления

$$Y_0(t) \sim \frac{2}{\pi} \ln \frac{t}{2}, \qquad Y_1(t) \sim -\frac{2}{\pi}\frac{1}{t} \quad \text{при } t \to 0$$

находим, что при $t \to 0$

$$\sigma \sim -\frac{b^2}{2} \ln \frac{t}{2} = -\frac{1}{8k^2} \ln \frac{\sqrt{1-x}}{2k} \tag{3.23}$$

Таким образом, при условии (3.22) всюду на интервале $[0,1)$ функция $\sigma(x)$ непрерывна, а в точке $x = 1$ она имеет логарифмическую особенность.



Фиг. 1

Этот результат позволяет утверждать, что интервал I сходимости последовательных приближений σ_n может быть расширен вплоть до точки $1 - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 1$. С учетом этого находим

$$0 \leqslant S_n \leqslant \sigma_n \leqslant \sigma$$
$$\text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1 - \varepsilon \tag{3.24}$$

Неубывающая последовательность (3.12) ограничена сверху. Это означает, что существует

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$
$$\text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1 - \varepsilon$$

Рассмотрим вопрос о поведении функции S в окрестности точки $x = 1$. Из (3.23) находим, что отношение

$$\frac{\sigma(x)}{1 - \ln(1-x)}$$

должно быть всюду ограниченным, т. е.

$$S_{n-1}(x) \leqslant \sigma(x) \leqslant A\,[1 - \ln(1-x)] \tag{3.25}$$

Дифференцируя (3.1), подставляя в него (3.25) и устремляя $n \to \infty$, найдем, что $\Phi'(x)$ ограничена на всем сегменте $[0,1]$, т. е. существует $\lim M_n = M$ при $n \to \infty$. Подставив (3.25) и (3.4), в (3.3) получим

$$S_n \leqslant \int_0^x \left\{A^2[1 - \ln(1-x)]^2 + \frac{M_n}{4k^2}\left[\frac{3 + 2\ln 2}{2} - \ln(1-x)\right]\right\} dx \tag{3.26}$$

Устремив $n \to \infty$, найдем, что правая часть (3.26) ограничена при $x \to 1$. Отсюда следует, что функция $S(x)$ непрерывна на всем сегменте $[0,1]$. Итак, доказано, что последовательные приближения сходятся, если

$$\frac{1}{k} < 4.8096 \tag{3.27}$$

Далее, нетрудно видеть, что предельные функции $S(x)$, $F(x)$ и $\Phi(x)$ удовлетворяют системе уравнений (1.25), (2.4) и условию (1.26). Полученное решение является единственным. В самом деле, функция F в (1.25) аналитически представима через S, поэтому правая часть (1.25) удовлетворяет условию Липшица в интервале $[0,1)$. Это и обеспечивает единственность решения.

Остается показать, что найденное решение удовлетворяет (1.17), а также более сильным условиям ограниченности v_z и $v_r = 0$ при $r = 0$

Из предыдущего S (1) $= N$ ограничено, и в соответствии с (1.24)

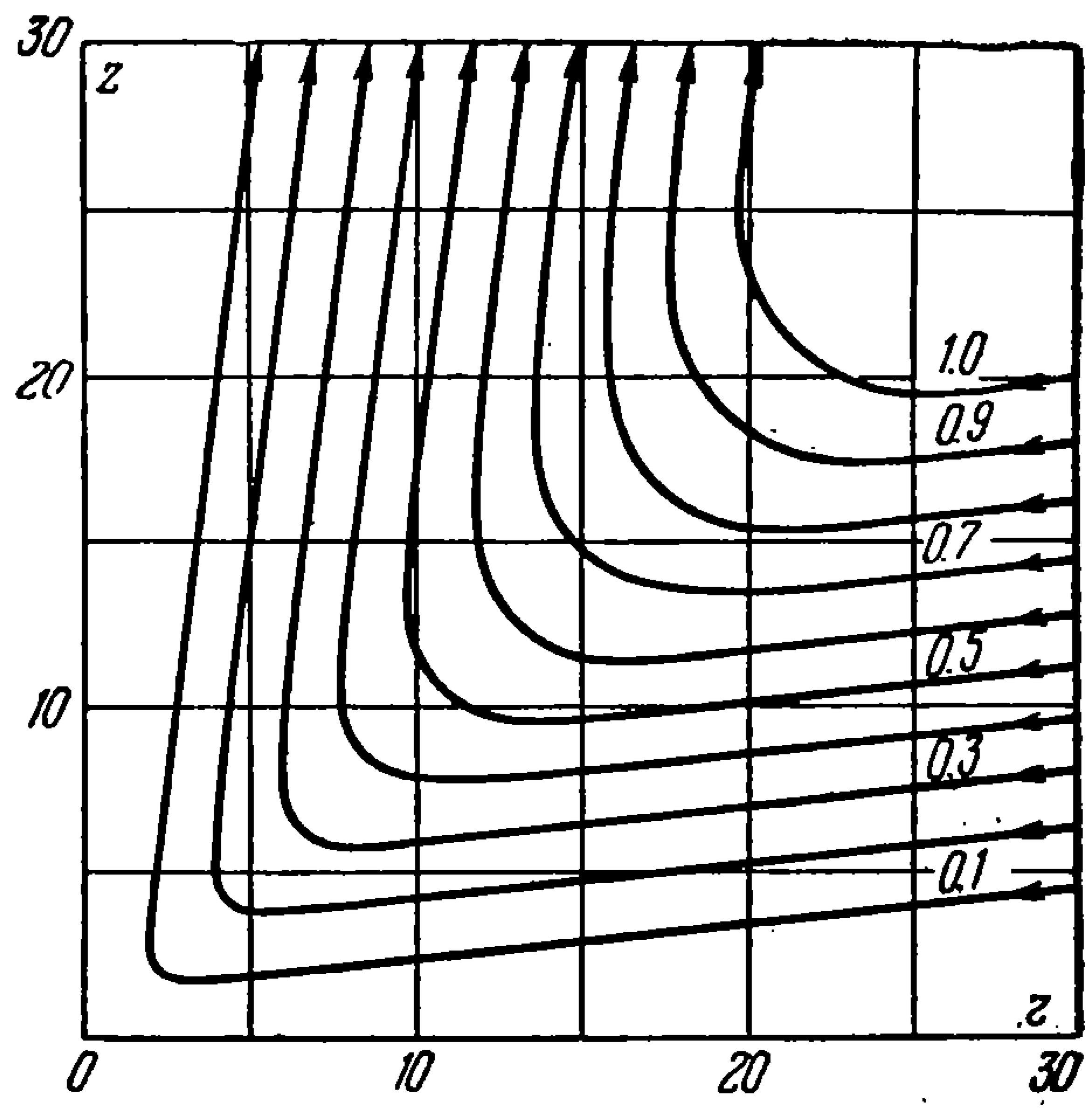
$$y \sim 2kN\,(1 - x^2), \qquad y' \sim -4kN \qquad \text{при } x \to 1$$

Отсюда видно, что (1.17) выполнено. Используя (1.14), получим

$$u = \frac{rv_r}{C_0} \sim 2kN\,\frac{r^2}{r^2+z^2}, \qquad w = \frac{rv_z}{C_0} \sim 4kN\,\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}} \qquad \left(\begin{matrix} r \to 0 \\ z \neq 0 \end{matrix}\right)$$

что и дает нужный результат. Наконец, используя (1.11) и (1.12), нетрудно обнаружить, что $\lim \pi = -{}^1/_2$ при $\eta \to \infty$.

Итак, доказано: при числах Рейнольдса, меньших чем 4.8096, поставленная задача имеет решение, единственное и всюду непрерывное, кроме начала координат; при числах Рейнольдса, превышающих 8, ограниченного решения задачи не существует.



Фиг. 3

4. Приближенное решение задачи при весьма малых числах Рейнольдса. Если $k \to \infty$, то $\Phi(x) \to x$ согласно (1.23). Таким образом, $\Phi\,(x) \approx x$ при весьма больших k; при этом $F\,(x) = F_1\,(x)$ (2.8). Согласно (1.25) $S' = S^2$ при $k = \infty$; это с учетом условия S (0) $= 0$ дает $S \neq 0$, а значит и $y \equiv 0$. Пусть $k \neq \infty$, но настолько велико, что членом y^2 в уравнении (1.22) можно пренебречь. Тогда

$$2k\,(1 - x^2)\,y' + 4kxy = (4\ln 2 - 2)\,x + 2x^2 - (1 - x)^2 \ln(1 - x) - \\ - (1 + x)^2 \ln(1 + x) \qquad (4.1)$$

Решение (4.1) с условием $y\,(0) = 0$ имеет вид

$$y = \frac{1}{2k}\left[x + (2\ln 2 - 1)\,x^2 - \frac{1+x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-} - x\ln(1 - x^2)\right] \qquad (4.2)$$

Таким образом, $y \sim k^{-1}$, и в левой части (1.22) мы пренебрегли членом $O\,(k^{-2})$ по сравнению с членами $O\,(1)$. Введем в рассмотрение функцию тока меридионального сечения

$$\Psi = \frac{k}{C_0}\int_0^r rv_z dr = k\int_0^r w dr = kz\int_\eta^\infty w\,\frac{d\eta}{\eta^2} = kr\,(w - \eta u) = k\sqrt{r^2+z^2}\,y = kRy$$

$$\Psi = \frac{R}{2}\left[x + (2\ln 2 - 1)\,x^2 - \frac{1+x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - x\ln(1 - x^2)\right] \qquad (4.3)$$

Имея в виду, что $x = \cos\theta$, где θ — угол, отсчитанный в меридиональной плоскости от положительного направления оси Z, и используя (4.3), легко построить линии тока, показанные на фиг. 3 для равноотстоящих значений Ψ: 0.1; 0.2, ..., , 1. Как видно, характер вторичных течений соответствует представлениям, изложенным в начале статьи.

Поступила 21 III 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Бödewadt U. T. ZAMM. 1940, Bd. 20, Heft 5.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехтеоретиздат. 1951. Стр. 100—106.
3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, 1958, т. 1, изд. 4.
4. Чаплыгин С. А. Собр. соч., 1935, т. 3, стр. 66—67.
5. Cooke J. C. Jas. 1952, т. 19, № 7.