НЕКОТОРЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

М. Я. Беленький

(Ленинград)

Для решения некоторых задач теории упругости в случае осесимметричной деформации тела вращения применяют аналитические функции комплексного переменного. Используется идея Вебера [1] о преобразовании функции Эри в функцию напряжений осесимметричного напряженного состояния тела вращения.

1. В случае симметричной относительно оси y деформации в теле вращения компоненты напряжения и упругого смещения в цилиндрических координатах r, θ, y, как известно, выражаются по следующим формулам:

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial y}\left[\nu\triangle\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right], \qquad \sigma_y = \frac{\partial}{\partial y}\left[(2-\nu)\triangle\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right] \tag{1.1}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial}{\partial y}\left[\nu\triangle\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right], \qquad \tau_{ry} = \frac{\partial}{\partial r}\left[(1-\nu)\triangle\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right]$$

$$u = -\frac{1+\nu}{E}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial r}, \qquad v = \frac{1+\nu}{E}\left[(2-2\nu)\triangle\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right] \tag{1.2}$$

Здесь ν — коффициент Пуассона, E — модуль Юнга, u — радиальное смещение. Функция $\varphi(r, y)$ удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\triangle\triangle\varphi = 0 \qquad \left(\triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

Введем операции S_0 и S_1, положив

$$S_0(\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty \varphi(\lambda, y)\,\alpha\lambda J_0(\alpha\lambda)\cos\alpha rt\,d\lambda = w(rt, y) \tag{1.3}$$

$$S_1(\psi) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty \psi(\lambda, y)\,\alpha\lambda J_1(\alpha\lambda)\sin\alpha rt\,d\lambda = w_1(rt, y) \tag{1.4}$$

Здесь $J_R(t)$ — функция Бесселя первого рода.

Найдем операции S_0^{-1}, S_1^{-1}, обратные S_0 и S_1. Умножим равенство (1.3) на $dt/\sqrt{1-t^2}$ и проинтегрируем в промежутке $(-1,1)$. Получим

$$\int_{-1}^{1}\frac{w(rt, y)\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty \varphi(\lambda, y)\,J_0(\alpha\lambda)\,J_0(\alpha r)\,d\lambda = \varphi(r, y) = S_0^{-1}(w)$$

Последний переход совершен по формуле Ханкеля в предположении, что функция $\varphi(r, y)$ удовлетворяет, например, условиям Дирихле и непрерывна по r в точке (r, y). Аналогично получим

$$\psi(r, y) = \int_{-1}^{1}\frac{tw_1(rt, y)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

Положив $rt = x$, заметим, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \int_{-1}^{1}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\int_{-1}^{1}\frac{\partial w}{\partial x}\,d\sqrt{1-t^2} =$$

$$= -\frac{dw}{dx}\sqrt{1-t^2}\,\Big|_{-1}^{1} + r\int_{-1}^{1}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\sqrt{1-t^2}\,dt = r\int_{-1}^{1}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\sqrt{1-t^2}\,dt$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = \int_{-1}^{1}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Отсюда следует равенство

$$\triangle\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \int_{-1}^{1}\frac{\triangle_{xy}w(rt, y)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \qquad \left(\triangle_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tag{1.5}$$

Равенство (1.5) показывает, что операция S_0^{-1} переводит лапласиан на плоскости в лапласиан в пространстве (в случае осевой симметрии). Операция S_0 совершает обратный переход.

Этими операциями гармонические функции переводятся в гармонические, бигармонические — в бигармонические. Вообще S_0 переводит оператор

$$\triangle + \sum_{R=0}^{n} C_k \frac{\partial^R}{\partial y^R}$$

в оператор

$$\triangle_{xy} + \sum_{R=0}^{n} C_R \frac{\partial^R}{\partial y^R} \qquad (C_R = \text{const})$$

Преобразуем формулы (1.2) и (1.1) при помощи операций S_0 и S_1. Получим следующие формулы:

$$\frac{E}{1+\nu} S_1(u) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{E}{1+\nu} S_0(v) = (2-2\nu)\triangle_{xy} w - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{1.6}$$

Функция $w(x, y)$ — бигармоническая на плоскости xy, и ее можно считать функцией напряжений некоторого плоского напряженного состояния, компоненты которого находятся по формулам

$$\sigma_x{}^\circ = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y{}^\circ = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad \tau_{xy}{}^\circ = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{1.7}$$

В этих обозначениях формулы (1.6) примут вид:

$$\tau_{xy}{}^\circ = \frac{E}{1+\nu} S_1(u), \qquad (1-2\nu)(\sigma_x{}^\circ + \sigma_y{}^\circ) + \sigma_y{}^\circ = \frac{E}{1+\nu} S_0(v) \tag{1.8}$$

или в комплексной форме

$$(1-2\nu)(\sigma_x{}^\circ + \sigma_y{}^\circ) + \sigma_y{}^\circ - i\tau_{xy}{}^\circ = \frac{E}{1+\nu}[S_0(v) - iS_1(u)] \tag{1.9}$$

Применяя известные представления напряжений через две аналитические функции Колосова — Мусхелишвили [2], получим

$$(3-4\nu)[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} = \frac{E}{1+\nu}[S_0(v) - iS_1(u)]. \tag{1.10}$$

Аналогичным образом можно получить

$$\varphi(z) + (4\nu - 2)\overline{\varphi(z)} + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = -i[S_0(\sigma_y) - iS_1(\tau_{ry})] \tag{1.11}$$

$$(3-4\nu)\varphi(z) + (4-4\nu)\overline{\varphi(z)} + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = \frac{E}{1+\nu}\left[S_1\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right) - \frac{i}{x} S_0\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right] \tag{1.12}$$

Здесь

$$\varphi(z) = \Phi'(z), \qquad \psi(z) = \Psi'(z) \qquad (z = x + iy)$$

Формулы (1.10) и (1.11) позволяют в некотором классе задач сводить решение осесимметричных задач теории упругости к решению вспомогательных задач плоской теории упругости. Таким путем решаются основные задачи (задача с заданными на границе области напряжениями или смещениями, смешанная задача — с заданными на части границы напряжениями, на остальной части — смещениями) для полупространства, толстой бесконечной плиты, пространства, ослабленного кольцевой щелью, бесконечного цилиндра.

Формулы (1.10) и (1.11) или (1.11) и (1.12) можно использовать для составления интегральных уравнений задач теории упругости в случае произвольного тела вращения, если известно конформное отображение осевого сечения тела на полуплоскость. В этом случае можно установить вид функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$. Например, для внешности параболоида $r^2 = 2(y+1)$ они имеют вид:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i(4\nu - 3)(2i + \sqrt{-iz})} \int_\Gamma \frac{f(\sigma)\, d\sigma}{\sqrt{\sigma}(\sqrt{\sigma} - \sqrt{z})}$$

$$\Psi(z) = (4\nu - 3)\Phi(z) + (2i + \sqrt{-iz})^2 i\Phi'(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{f(\sigma)}\, d\sigma}{\sqrt{-i\sigma z}(\sqrt{\sigma} - \sqrt{z})}$$

Здесь Γ — парабола $x^2 = 2(y+1)$, проходимая слева направо.

Удовлетворяя граничные условия, придем к системе интегральных уравнений для определения вещественной и мнимой частей функции $f(\sigma)$.

2. Применим изложенные результаты к решению задач о бесконечной упругой плите, находящейся между плоскостями $y = -1$, $y = 1$.

Пусть на границе плиты известны напряжения

$$\sigma_r(r, 1) = f_1(r), \qquad \tau_{ry}(r, 1) = g_1(r); \qquad \sigma_r(r, -1) = f_2(r), \qquad \tau_{ry}(r, -1) = g_2(r) \tag{2.1}$$

Пользуемся формулой (1.11). Правая часть этого равенства становится известной функцией при $y = \pm 1$. Именно,

$$[S_0(\sigma_y) - iS_1(\tau_{ry})]y = (-1)^{k+1} = S_0(f_k) - iS_1(g_k) \qquad (k = 1, 2)$$

Таким образом, формула (1.11) позволяет свести задачу о плите к граничной задаче в полосе $|y| \leqslant 1$ плоскости xy.

Известно, что функция $\chi(z)$, аналитическая в полосе $|y| \leqslant 1$, представима в следующем виде $\chi(z) = \chi_1(z) + \chi_2(z)$, где $\chi_1(z)$ функция, аналитическая в полуплоскости $y \leqslant 1$, $\chi_2(z)$ — аналитическая в полуплоскости $y \geqslant -1$.

Формулу (1.11), поэтому, можно представить в виде

$$\begin{gathered}\varphi_1(z) + (4\nu - 2)\overline{\varphi_1(z)} + (z - 1)\overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)} + \\ + \varphi_2(z) + (4\nu - 2)\overline{\varphi_2(z)} + (z + i)\overline{\varphi_2'(z)} + \psi_2(z) = -i[S_0(\sigma_y) - iS_1(\tau_{ry})]\end{gathered} \tag{2.2}$$

Заметим, что решение задач об упругих полупространствах $y \leqslant 1$ и $y \geqslant -1$ сводится к решению вспомогательных задач в полуплоскостях $y \leqslant 1$ и $y \geqslant 1$. Эти задачи решаются просто. Будем искать $\varphi_k(z)$ и $\psi_k(z)$ в том виде, в каком они получаются при решении упомянутых вспомогательных задач. Они имеют вид:

$$\varphi_1(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_1(\zeta) - iq_1(\zeta)}{\zeta - z + i}\,d\zeta, \qquad \varphi_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_2(\zeta) + iq_2(\zeta)}{\zeta - z - i}\,d\zeta$$

$$\overline{\psi_k(z)} = -\varphi_k(z) - (4\nu - 2)\overline{\varphi_k(z)} - [z - (-1)^{k+1}i]\,\overline{\varphi_k'(z)} \qquad (k = 1, 2)$$

Подставляя $\varphi_k(z)$ и $\psi_k(z)$ в (2.2) и удовлетворяя граничные условия (2.1), получим систему

$$\begin{gathered}p_1(t) + \frac{16}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_2(\zeta)}{[4 + (\zeta - t)^2]^2}\,d\zeta + \frac{8}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{q_2(\zeta)(\zeta - t)}{[4 + (\zeta - t^2]^2}\,d\zeta = -S_1(g_1) \\ g_1(t) - \frac{4}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{q_2(\zeta)(\zeta - t)^2}{[4 + (\zeta - t)^2]^2}\,d\zeta - \frac{8}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_2(\zeta)(\zeta - t)}{[4 + (\zeta - t)^2]^2}\,d\zeta = -S_0(f_1) \\ p_2(t) + \frac{16}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_1(\zeta)}{[4 + (\zeta - t)^2]^2}\,d\zeta + \frac{8}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{q_1(\zeta)(\zeta - t)}{[4 + (\zeta - t)^2]^2}\,d\zeta = -S_1(g_2) \\ g_2(t) - \frac{4}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{q_1(\zeta)(\zeta - t)^2}{[4 + (\zeta - t)^2]^2}\,d\zeta - \frac{8}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_1(\zeta)(\zeta - t)}{[4 + (\zeta - t)^2]^2}\,d\zeta = -S_0(f_2)\end{gathered} \tag{2.3}$$

Дальнейшие выкладки опускаются, так как они являются почти буквальным повторением выкладок статьи [3], в которой решены задачи теории упругости для бесконечной полосы. По найденным $p_k(\zeta)$ и $q_k(\zeta)$ находятся $\varphi_k(z)$, $\psi_k(z)$ и $S_0(\sigma_r)$, $S_1(\tau_{ry})$ и обращением — σ_r и τ_{ry}. Остальные компоненты выражаются через $\varphi_k(z)$ и $\psi_k(z)$.

По такой же схеме решается задача с заданными на границе плиты смещениями.

Предыдущие результаты можно применить к решению смешанной задачи для плиты. Эта задача сводится к отысканию напряжений на участках, где известны смещения. При этом получается система сингулярных интегральных уравнений с ядрами типа ядра Коши.

Поступила 24 IX 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Weber. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1925.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, 1949.
3. Беленький М. Я. Смешанная задача теории упругости для бесконечно длинной полосы. ПММ, т. XVI, вып. 3. 1952.