ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТРИВИАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. М. Старжинский

(Москва)

Предлагается видоизменение оценки характеристической постоянной по Ляпунову [1] озаглавленной системы для случая, когда функции на побочной диагонали матрицы коэффициентов знакопостоянны и притом одного знака.

1. Пусть уравнения первого приближения возмущенного движения динамической системы даны в виде

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)\,x_1 + a_{12}(t)\,x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)\,x_1 + a_{22}(t)\,x_2 \tag{1}$$

где $a_{ij}(t)$ $(i, j = 1, 2)$ — вещественные интегрируемые кусочнонепрерывные периодические функции с периодом ω. Обозначим

$$\int_0^\omega a_{11}(t)\,dt = \alpha, \qquad \int_0^\omega a_{22}(t)\,dt = \beta$$

и, не нарушая общности, предположим $\alpha \geqslant \beta$. При $\alpha + \beta > 0$ невозмущенное движение динамической системы, для которого уравнения первого приближения возмущенного движения имеют вид (1) — неустойчиво в силу известной формулы Лиувилля. Для дальнейшего будем предполагать $\alpha + \beta \leqslant 0$, что, учитывая $\alpha - \beta \geqslant 0$, запишем в виде

$$\beta \leqslant \alpha \leqslant -\beta \qquad (\beta \leqslant 0) \tag{2}$$

Выполнив замену переменных

$$x_1 = x \exp \int_0^t a_{11}(t_1)\,dt_1, \qquad x_2 = y \exp \int_0^t \left[a_{22}(t_1) + \frac{\alpha - \beta}{\omega}\right] dt_1$$

преобразуем систему (1) к виду

$$\frac{dx}{dt} = r(t)\,y, \qquad \frac{dy}{dt} = q(t)\,x - ay \qquad \left(a = \frac{\alpha - \beta}{\omega} \geqslant 0\right) \tag{3}$$

где

$$r(t) = a_{12}(t) \exp \int_0^t [a_{22}(t_1) - a_{11}(t_1) + a]\,dt_1$$

$$q(t) = a_{21}(t) \exp \int_0^t [a_{11}(t_1) - a_{22}(t_1) - a]\,dt_1$$

Характеристичное уравнение для системы (3) имеет вид

$$\rho^2 - 2A\rho + e^{-a\omega} = 0 \qquad \left(A = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sp}\,\mathrm{X}(\omega) \qquad \mathrm{X}(0) = \mathrm{I}_2\right),$$

где $\mathrm{X}(t)$ — матрицант системы (3). Характеристическая постоянная A по Ляпунову [1] представляется сходящимся рядом

$$A = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots \tag{4}$$

Формулы для A_n выведены [1] в статье [2]

$$A_0 = \frac{1}{2}(1 + e^{\beta - \alpha}), \qquad A_1 = \frac{1}{2}\int_0^\omega e^{at_1}[\psi(\omega) - (1 - e^{-a\omega})\psi_1]\,q_1\,dt_1$$

$$A_n = \frac{1}{2}\int_0^\omega dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} e^{at_1}(\psi_1 - \psi_2)\ldots \tag{5}$$

$$\ldots e^{at_{n-1}}(\psi_{n-1} - \psi_n)\, e^{at_n}[\psi(\omega) - \psi_1 + \psi_n e^{-a\omega}]\,q_1 \ldots q_n\,dt_n$$

---

[1] В статье [2] через A была обозначена постоянная, равная $\mathrm{sp}\,\mathrm{X}(\omega) / 1 + e^{-a\omega}$.

где

$$\psi(t) = \int_0^t e^{-at_1} r(t_1)\, dt_1, \qquad \psi_i = \psi(t_i), \qquad q_i = q(t_i)$$

Система (1) ортогональным преобразованием с периодическими коэффициентами (см. [3]) может быть приведена к виду, когда функции a_{12} и a_{21} (а следовательно, и функции r и q) знакопостоянны.

В статье [4] функции r и q предполагались знакопостоянными разных знаков.

2. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что r и q знакопостоянные на $[0, \omega]$ функции одного знака (причем $r(t)\, q(t) \not\equiv 0$ для $0 \leqslant t \leqslant \omega$, ибо в противном случае система (3) интегрируется по интервалам).

В этом случае из формул (5) следует, что $A_\nu > 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ и ряд (4) — знакоположительный.

В статье [2] показано, что при $\alpha + \beta \leqslant 0$ невозмущенное движение динамической системы, для которого уравнения первого приближения имеют вид (1), неустойчиво, если $|A| > {}^1/_2 (e^{-\alpha} + e^{\beta})$. Поскольку теперь $A > A_0$, то для неустойчивости достаточно потребовать: $A_0 \geqslant {}^1/_2 (e^{-\alpha} + e^{\beta})$, что в силу первой из формул (5) запишется в виде

$$(1 - e^{-\alpha})(1 - e^{\beta}) \geqslant 0$$

Вспоминая (2), заключим, что если $\alpha \geqslant 0$, то последнее неравенство выполнено. Доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть в уравнениях первого приближения возмущенного движения (1) функции a_{12} и a_{21} знакопостоянны (т. е., сохраняя знак, могут обращаться в нуль, но так, что их произведение не тождественно равно нулю на $[0, \omega]$) и притом одного знака. Если при этом среднее значение одной из функций: a_{11} либо a_{22} — неотрицательно, то невозмущенное движение неустойчиво.

Следствие. Если в уравнении

$$\ddot{x} + s(t)\dot{x} + p(t)x = 0, \qquad (s(t+\omega) = s(t), \quad p(t+\omega) = p(t)) \tag{6}$$

периодический коэффициент $p(t)$ неположителен для всех значений t $(0 \leqslant t \leqslant \omega)$, то тривиальное решение уравнения (6) неустойчиво независимо от поведения второго периодического коэффициента $s(t)$.

Для доказательства следствия достаточно записать уравнение (6) в виде системы

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} \qquad \frac{d\dot{x}}{dt} = -p(t)x - s(t)\dot{x}$$

и применить доказанную теорему.

3. Остается рассмотреть, таким образом, случай $\beta \leqslant \alpha < 0$. При этом невозмущенное движение устойчиво, если

$$A < \frac{1}{2}(e^{-\alpha} + e^{\beta}) \tag{7}$$

и неустойчиво, если знак неравенства обратный [2].

В статье [2] доказаны неравенства, которые для членов ряда (4) запишутся в виде

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} < 2\frac{A_1}{n}, \qquad \frac{A_n}{A_{n-1}} < e^{\alpha-\beta}\cdot\frac{A_1}{n^2} \qquad (n \geqslant 2) \tag{8}$$

4. В силу первого неравенства (8) при $n = 2, 3, \ldots$ имеем соответственно

$$A_2 < A_1^2, \qquad A_3 < \frac{2}{3}A_1A_2 < \frac{2}{3}A_1^3, \ \ldots, \ A_n < \frac{2^{n-1}}{n!}A_1^n$$

следовательно, будем иметь

$$A < A_0 + A_1 + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{n!}A_1^n = \frac{1}{2}e^{\beta-\alpha} + \frac{1}{2}e^{2A_1}$$

При условии

$$\frac{1}{2}e^{\beta-\alpha}+\frac{1}{2}e^{2A_1}\leqslant\frac{1}{2}(e^{-\alpha}+e^{\beta})\text{ или }A_1\leqslant\frac{1}{2}\ln(e^{-\alpha}+e^{\beta}-e^{\beta-\alpha})$$

неревенство (7) выполнено и, следовательно, невозмущенное движение устойчиво[1].

5. Применим теперь для проделанных оценок второе неравенство (8):

$$A_2<\frac{1}{4}e^{\alpha-\beta}A_1^2,\quad A_3<\frac{1}{9}e^{\alpha-\beta}A_1A_2<\frac{1}{36}e^{2(\alpha-\beta)}A_1^3,\ \ldots,\ A_n<\frac{1}{(n!)^2}e^{(n-1)(\alpha-\beta)}A_1^n$$

Будем иметь

$$A<A_0+A_1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}e^{(n-1)(\alpha-\beta)}A_1^n=\frac{1}{2}(1-e^{\beta-\alpha})+e^{\beta-\alpha}I_0(2\sqrt{e^{\alpha-\beta}A_1})$$

где $I_0(z)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента. Если

$$\frac{1}{2}(1-e^{\beta-\alpha})+e^{\beta-\alpha}I_0(2\sqrt{e^{\alpha-\beta}A_1})\leqslant\frac{1}{2}(e^{-\alpha}+e^{\beta})$$

т. е.

$$I_0(2\sqrt{e^{\alpha-\beta}A_1})\leqslant\frac{1}{2}(1+e^{\alpha}+e^{-\beta}-e^{\alpha-\beta})\tag{10}$$

невозмущенное движение устойчиво[2]. Неравенство (10) предпочтительнее неравенства (9) при $\alpha-\beta<\ln 4$.

Если оценку для членов ряда (4) начнем с A_3, то получим аналогично, что при выполнении любого из неравенств

$$A_2\leqslant\frac{1}{e^{2A_1}-1-2A_1}[(e^{-\alpha}-1)(1-e^{\beta})-2A_1]A_1^2\tag{11}$$

либо

$$A_2\leqslant\frac{[(e^{-\alpha}-1)(1-e^{\beta})-2A_1]e^{2(\alpha-\beta)}A_1^2}{8[I_0(2\sqrt{e^{\alpha-\beta}A_1})-1-e^{\alpha-\beta}A_1]}\tag{12}$$

невозмущенное движение устойчиво.

6. В статье [4] доказано неравенство, которое для членов ряда (4) запишется в виде

$$\frac{A_{n+1}}{A_n}\leqslant\frac{n}{n+1}\frac{A_n}{A_{n-1}}\qquad(n\geqslant 1)\tag{13}$$

откуда при $n=1, 2, 3, \ldots$ имеем соответственно

$$\frac{A_2}{A_1}\leqslant\frac{1}{2}\frac{A_1}{A_0},\qquad\frac{A_3}{A_2}\leqslant\frac{2}{3}\frac{A_2}{A_1},\qquad\frac{A_4}{A_3}\leqslant\frac{3}{4}\frac{A_3}{A_2},\ \ldots$$

Используя произведения последних неравенств, мы получим для суммы ряда (4)

$$A\leqslant A_0+A_1+\frac{1}{2}\frac{A_1^2}{A_0}+\frac{1}{3}\frac{A_1A_2}{A_0}+\frac{1}{4}\frac{A_1A_3}{A_0}+\ldots=$$

$$=A_0+\frac{2}{3}A_1+\frac{1}{6}\frac{A_1^2}{A_0}+\frac{A_1}{A_0}\left[\frac{1}{3}A_0+\frac{1}{3}A_1+\frac{1}{3}A_2+\frac{1}{4}A_3+\ldots\right]\tag{14}$$

[1] В последней формуле стр. 136 статьи [2] знаменатель под знаком логарифма является лишним.

[2] В неравенстве (11.5) статьи [2] правую часть следует записать в виде

$$\frac{1}{2}(1+e^{\alpha}+e^{-\beta}-e^{\alpha-\beta})$$

а показатель экспоненты в левой части в виде $\alpha-\beta$.

Сумма ряда внутри скобки меньше $\frac{1}{3}A$, поэтому будем иметь

$$A\left(1-\frac{1}{3}\frac{A_1}{A_0}\right)<A_0+\frac{2}{3}A_1+\frac{1}{6}\frac{A_1^2}{A_0}$$

Если $A_1 \geqslant 3A_0$, то последнее неравенство, очевидно, выполнено. Если же, $A_1 < 3A_0$, то

$$A<\frac{6A_0^2+4A_1A_0+A_1^2}{6A_0-2A_1}$$

и при условии

$$\frac{6A_0^2+4A_1A_0+A_1^2}{3A_0-A_1}\leqslant e^{-\alpha}+e^{\beta} \tag{15}$$

невозмущенное движение устойчиво.

Выделим теперь в правой части неравенства (14) члены до A_2 включительно

$$A\leqslant A_0+\frac{3}{4}A_1+\frac{1}{4}\frac{A_1^2}{A_0}+\frac{1}{12}\frac{A_1A_2}{A_0}+\frac{A_1}{A_0}\left[\frac{1}{4}A_0+\frac{1}{4}A_1+\frac{1}{4}A_2+\frac{1}{4}A_3+\ldots\right]$$

тогда будем иметь

$$A\left(1-\frac{1}{4}\frac{A_1}{A_0}\right)<A_0+\frac{3}{4}A_1+\frac{1}{4}\frac{A_1^2}{A_0}+\frac{1}{12}\frac{A_1A_2}{A_0} \tag{16}$$

что заведомо выполнено при $A_1 \geqslant 4A_0$. Если же $A_1 < 4A_0$, то при условии

$$\frac{12A_0^2+9A_1A_0+3A_1^2+A_1A_2}{4A_0-A_1}<\frac{3}{2}(e^{-\alpha}+e^{\beta})$$

невозмущенное движение устойчиво.

7. Что касается достаточных условий неустойчивости, то их получение значительно проще. Действительно $A > A_0 + A_1$, и поэтому при $A_0 + A_1 \geqslant {}^1/_2(e^{-\alpha}+e^{\beta})$ будем иметь также $A > {}^1/_2(e^{-\alpha}+e^{\beta})$. Таким образом, при выполнении неравенства

$$A_1 \geqslant \frac{1}{2}(e^{-\alpha}-1)(1-e^{\beta}) \tag{17}$$

невозмущенное движение неустойчиво.

Исходя из неравенства $A > A_0 + A_1 + A_2$, получим, что если

$$A_2 \geqslant \frac{1}{2}(e^{-\alpha}-1)(1-e^{\beta})-A_1 \tag{18}$$

то невозмущенное движение неустойчиво.

Получение дальнейших достаточных условий устойчивости и неустойчивости указанным методом — очевидно.

Поступила 8 II 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Sur une série dans la théorie des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients périodiques. Зап. Акад. наук по физ.-матем. отд., 8-я серия, 1902, т. XIII, № 2, стр. 1—70. Собр. соч., 1956, т. II, стр. 410—472.
2. Старжинский В. М. Об устойчивости тривиального решения дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами. Инж. сб., 1954, т. XVIII, стр. 119—136.
3. Старжинский В. М. Замечание к исследованию периодических движений. ПММ, 1955, т. XIX, вып. 1, стр. 119—120.
4. Старжинский В. М. О методе Ляпунова оценки характеристической постоянной. Изв. АН СССР, ОТН, серия мех. и машиностр., 1959, № 4.