КВАДРАТИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

П. А. Кузьмин (Казань)

§ 1. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Пусть квадратичная форма

$$V = \sum_1^n a_{ij}x_i x_j$$

с постоянными коэффициентами имеет в силу уравнений (1.1) производную

$$\frac{dV}{dt} = \sum_1^n b_{ij}x_i x_j$$

Связь между введенными коэффициентами имеет следующий матричный вид:

$$AP + (AP)_c = B \qquad (A = \| a_{ij} \|, \; B = \| b_{ij} \|, \; P = \| p_{ij} \|) \tag{1.2}$$

Здесь c — указатель сопряженности (транспонирования).

Возьмем систему (1.1) частного вида, к которому могут приводиться многие уравнения механики

$$\frac{dx_{2s-1}}{dt} = x_{2s}, \qquad \frac{dx_{2s}}{dt} = T_s x_1 + x_{2s+1} \qquad (s = 1, \ldots, k; \; x_{2k+1} \equiv 0) \tag{1.3}$$

Характеристическое уравнение для системы (1.3) имеет вид

$$\varkappa^{2k} - T_1\varkappa^{2k-2} - \ldots - T_k = 0 \tag{1.4}$$

Поставим вопрос о нахождении для системы (1.3) интегралов вида

$$V = \sum_1^{2k} a_{ij}x_i x_j$$

Из (1.2) следует уравнение для определения матрицы A:

$$AP + (AP)_c = 0 \tag{1.5}$$

Будем иметь

$$AP = \left\| \begin{array}{lllll} T_1a_{12} + T_2a_{14} + \ldots + T_k a_{12k} & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{12k-1} \\ T_1a_{22} + T_2a_{24} + \ldots + T_k a_{22k} & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{22k-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ T_1a_{2k2} + T_2a_{2k4} + \ldots + T_k a_{2k2k} & a_{2k1} & a_{2k2} & \ldots & a_{2k2k-1} \end{array} \right\| \tag{1.6}$$

Определение матрицы A легче вести прямо по таблице (1.6). Учитывая (1.5), получим

$$AP = \left\| \begin{array}{c llllll} 0 & a_{11} & 0 & -a_{22} & 0 & a_{33} & \ldots \\ T_1a_{22} - T_2a_{33} + \ldots + (-1)^{k+1}T_k a_{k+1,\,k+1} & 0 & a_{22} & 0 & -a_{33} & \ldots & \ldots \\ 0 & -a_{22} & 0 & a_{33} & \ldots & \ldots & \ldots \\ -T_1a_{33} + T_2a_{44} - \ldots + (-1)^{k+2}T_k a_{k+2,\,k+2} & 0 & -a_{33} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{33} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (-1)^{k+1}T_1 a_{k+1,\,k+1} + \ldots + (-1)^{2k}T_k a_{2k,\,2k} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \right\| \tag{1.7}$$

Вводя обозначения $a_j = (-1)^j a_{jj}$, уравнения для определения этих оставшихся неизвестных можно представить в виде

$$a_j - T_1a_{j+1} - T_2a_{j+2} - \ldots - T_k a_{j+k} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, k) \tag{1.8}$$

из которых $a_1, \ldots, a_k$ всегда определяются через остальные $a_{k+1}, \ldots, a_{2k}$, остающиеся произвольными. Матрица A получит следующий вид:

$$A = \begin{Vmatrix} -a_1 & 0 & -a_2 & 0 & \ldots & -a_k & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & a_3 & \ldots & 0 & a_{k+1} \\ -a_2 & 0 & -a_3 & 0 & \ldots & -a_{k+1} & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & a_4 & \ldots & 0 & a_{k+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_k & 0 & -a_{k+1} & 0 & \ldots & -a_{2k-1} & 0 \\ 0 & a_{k+1} & 0 & a_{k+2} & \ldots & 0 & a_{2k} \end{Vmatrix} \tag{1.9}$$

Она распадается на две ганкелевы матрицы, легко образуемые из строк и столбцов A одинаковой четности:

$$A_1 = -\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_{k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_k & a_{k+1} & \ldots & a_{2k+1} \end{Vmatrix}, \qquad A_2 = \begin{Vmatrix} a_2 & a_3 & \ldots & a_{k+1} \\ a_3 & a_4 & \ldots & a_{k+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k+1} & a_{k+2} & \ldots & a_{2k} \end{Vmatrix}$$

Это отвечает распадению интеграла V на две независимые формы с нечетными и четными номерами переменных:

$$V = V_1 + V_2, \qquad V_1 = -\sum_{1}^{2k-1} a_{1/2\,(i+j)} x_i x_j \qquad (i,\ j \text{ — нечетны}) \tag{1.10}$$

$$V_2 = \sum_{2}^{2k} a_{1/2\,(i+j)} x_i x_j \qquad (i,\ j \text{ — четны}) \tag{1.11}$$

Вернемся к решению уравнений (1.8). Для этих уравнений можно получить фундаментальную систему решений, задав k систем значений величин $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{2k}$, объединенных в матрицу, например, следующего вида:

$$A' \equiv \begin{Vmatrix} a_{k+1}^{(1)} & \ldots & a_{2k}^{(1)} \\ a_{k+1}^{(2)} & \ldots & a_{2k}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k+1}^{(k)} & \ldots & a_{2k}^{(k)} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix}$$

В соответствии с этим получим k линейно независимых квадратичных интегралов $V^{(1)}, \ldots, V^{(k)}$, и всякий другой такой интеграл будет их линейной связкой

$$V = \lambda_1 V^{(1)} + \ldots + \lambda_k V^{(k)} \qquad (\lambda_j = \mathrm{const}) \tag{1.13}$$

Отсутствие нелинейной зависимости интегралов $V^{(j)}$ следует из того, что, например, якобиан

$$\frac{\partial (V^{(1)} \ldots V^{(k)})}{\partial (x_2, \ldots x_{2k})} = |A'| \neq 0 \qquad \text{при } x_2 = \ldots = x_{2k-2} = 0, \qquad x_{2k} = \frac{1}{2}$$

§ 2. Легко заметить, что уравнения (1.8) можно удовлетворить, положив

$$a_j = \mu_m^{2k-j} \qquad (j = 1, \ldots, 2k) \tag{2.1}$$

где μ_m есть квадрат ($\mu_m = \varkappa_m^2$) произвольного корня $\varkappa_m$ характеристического уравнения (1.4). При отсутствии кратных корней $\varkappa_m$ будем иметь фундаментальную систему решений уравнений (1.8), если для матрицы A' примем

$$A' = \begin{Vmatrix} \mu_1^{k-1} & \mu_1^{k-2} & \ldots & \mu_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_k^{k-1} & \mu_k^{k-2} & \ldots & \mu_k & 1 \end{Vmatrix} \tag{2.2}$$

Введем замену переменных

$$\xi_s = x_{2k-2s+1}, \qquad \eta_s = x_{2k-2s+2} \qquad (s = 1, \ldots, k) \tag{2.3}$$

Тогда формулы (1.10) и (1.11) в новых переменных приобретут вид

$$V_1 = -\sum_1^k a_{2k-i-j+1}\xi_i\xi_j, \qquad V_2 = \sum_1^k a_{2k-i-j+2}\eta_i\eta_j \tag{2.4}$$

Для рассматриваемого случая, когда для a_j берутся значения (1.14), получим

$$\begin{gathered} V_1^{(m)} = -\sum_1^k \mu_m^{i+j-1}\xi_i\xi_j = -\mu_m(\xi_1+\mu_m\xi_2+\cdots+\mu_m^{k-1}\xi_k)^2 \\ V_2^{(m)} = \sum_1^k \mu_m^{i+j-2}\eta_i\eta_j = (\eta_1+\mu_m\eta_2+\cdots+\mu_m^{k-1}\eta_k)^2 \end{gathered} \tag{2.5}$$

Еще одна линейная замена

$$u_m = \xi_1+\mu_m\xi_2+\cdots+\mu_m^{k-1}\xi_k, \qquad v_m = \eta_1+\mu_m\eta_2+\cdots+\mu_m^{k-1}\eta_k$$

$$(m = 1, \ldots, k) \tag{2.6}$$

неособенная при простых корнях $\varkappa_m$, приводит к дифференциальным уравнениям для функций u_m, v_m, имеющим гамильтонову структуру:

$$\frac{du_m}{dt} = \frac{\partial K}{\partial v_m}, \qquad \frac{dv_m}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial u_m} \tag{2.7}$$

где

$$2K = -\sum_1^k \mu_m u_m^2 + \sum_1^k v_m^2 = \sum V^{(m)} \tag{2.8}$$

Заметим, что если отдельные интегралы $V^{(m)}$ при реальности переменных ξ_i, η_i вообще комплексны, то (при вещественных T_j, что далее всюду предполагается) интеграл K при любых μ_m принимает лишь вещественные значения.

Выясним более эффективный вид этого интеграла. Вводя обычные обозначения ньютоновых сумм

$$s_j = \sum_{m=1}^k \mu_m^j, \qquad s_0 = k \tag{2.9}$$

мы получим

$$2K = -\sum_1^k s_{i+j-1}\xi_i\xi_j + \sum_1^k s_{i+j-2}\eta_i\eta_j \tag{2.10}$$

Интеграл K тесно связан с вопросами устойчивости движения [1,2]. Если уравнения первого приближения возмущенного движения имеют вид системы (1.3), то легко видеть, что для устойчивости первого приближения необходимо и достаточно, чтобы интеграл K был знакоопределенным (> 0). Действительно, из устойчивости (т. к. элементарные делители системы (1.3) всегда взаимно просты) следует чистая мнимость и простота корней характеристического уравнения (1.4) и, следовательно, по (2.8) — положительность K, обратное же утверждение прямо вытекает из общеизвестной теоремы Ляпунова об устойчивости движения.

Как и следует ожидать, уравнения (1.8) для определения a_j при построении интеграла K приводят к части алгебраических формул Ньютона

$$s_j = \sum_{r=1}^k T_r s_{j-r} \qquad \begin{pmatrix} j = k, k+1, \ldots, 2k-1 \\ s_0 = k \end{pmatrix}$$

которые должны быть дополнены оставшейся частью

$$s_j = \sum_{r=1}^j T_r s_{j-r} \qquad \begin{pmatrix} j = 1, 2, \ldots, k-1 \\ s_0 = j \end{pmatrix}$$

Условия определенной положительности K эквивалентны известным в алгебре [3,4] условиям простоты и чистой мнимости корней уравнения (1.4).

Поступила 9 III 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ГИТТЛ, 1950.
2. Четаев Н. Г. Об одной задаче Коши. ПММ, 1945, т. IX, вып. 2
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. ГИТТЛ, 1953.
4. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. ГИТТЛ, 1949.