# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ

**А. М. Табаровский** (Москва)

Движение симметричного тяжелого неуравновешенного гироскопа в кардановом подвесе с вертикальной осью внешнего кольца рассмотрено Н. Г. Четаевым [1]. Устойчивость некоторых стационарных решений исследована в этом случае В. Н. Скимелем [2], К. Магнусом [3] и В. В. Румянцевым [4]. Аналогичное исследование для случая, когда ось внешнего кольца горизонтальна, проведено В. В. Румянцевым [5]. А. А. Богоявленский [6] получил при этом предположении частный интеграл уравнений движения. Ниже рассматривается движение симметричного неуравновешенного гироскопа в кардановом подвесе, у которого ось внешнего кольца образует с вертикалью произвольный угол [7]. Исследуется устойчивость некоторых стационарных решений, приводится частное решение, когда ось внешнего кольца горизонтальна.

1. Введем две неподвижные прямоугольные системы координат $O\xi\eta\zeta$ и $Ox_1y_1z_1$ с началом в неподвижной точке $O$ гироскопа. Ось $\zeta$ направлена по вертикали вверх, оси $\xi$ и $\eta$ лежат в горизонтальной плоскости. Ось $z_1$ направим по оси внешнего кольца карданова подвеса и будем считать, не уменьшая общности, что она лежит в плоскости $\eta\zeta$ и образует с осью $\zeta$ угол $\alpha$. Ось $x_1$ лежит в той же плоскости и образует с осью $\zeta$ угол $^1/_2\pi - \alpha$, ось $y_1$ совпадает с осью $\xi$. Введем также подвижную систему координат $Oxyz$, оси которой связаны с кожухом. Ось $x$ направим по оси вращения кожуха, ось $z$ — по оси симметрии гироскопа, ось $y$ дополняет первые две до правой тройки.

Положение гироскопа определяется тремя углами: $\psi$ — угол поворота внешнего кольца карданова подвеса, $\theta$ — угол поворота кожуха в кольце и $\varphi$ — угол поворота гироскопа относительно системы $Oxyz$ (угол собственного вращения).

Пусть $l$ — координата $z$ центра тяжести системы гироскоп — кожух, $m$ — масса этой системы, $I$ — момент инерции внешнего кольца относительно оси $z_1$, $A^\circ$, $B^\circ$, $C^\circ$ — главные моменты инерции кожуха относительно осей $xyz$ и $A$, $B = A$, $C$ — моменты инерции гироскопа относительно тех же осей. В этих обозначениях удвоенная живая сила системы имеет вид

$$2T = (A + A^\circ)\,\theta^{\cdot 2} + [I + C^\circ + (A + B^\circ - C^\circ)\sin^2\theta]\,\psi^{\cdot 2} + C\,(\varphi^\cdot + \psi^{\cdot 2}\cos\theta)^2$$

Если предположить, что трение в подшипниках отсутствует и активные силы суть только силы тяжести, то для силовой функции получим (исправляя некоторую неточность, содержащуюся в работе [7]).

$$U = -\,mgl\,(\sin\alpha\sin\theta\sin\psi + \cos\alpha\cos\theta)$$

Так как координаты $\theta$, $\psi$, $\varphi$ — независимые и голономные, то уравнения движения можно записать в форме уравнений Лагранжа второго рода. Имеем

$$\begin{gathered}(A + A^\circ)\,\theta^{\cdot\cdot} - (A + B^\circ - C^\circ)\,\psi^{\cdot 2}\sin\theta\cos\theta + C\,(\varphi^\cdot + \psi^\cdot\cos\theta)\,\psi^\cdot\sin\theta + \\ + mgl\,(\sin\alpha\cos\theta\sin\psi - \cos\alpha\sin\theta) = 0 \\ \frac{d}{dt}\{[I + C^\circ + (A + B^\circ - C^\circ)\sin^2\theta]\,\psi^\cdot + C\,(\varphi^\cdot + \psi^\cdot\cos\theta)\cos\theta\} + mgl\sin\alpha\sin\theta\cos\psi = 0 \\ \frac{d}{dt}[C\,(\varphi^\cdot + \psi^\cdot\cos\theta)] = 0 \end{gathered} \qquad (1.1)$$

Эти уравнения допускают два первых интеграла

$$\begin{gathered}(A + A^\circ)\,\theta^{\cdot 2} + [I + C^\circ + (A + B^\circ - C^\circ)\sin^2\theta]\,\psi^{\cdot 2} + C\,(\varphi^\cdot + \psi^\cdot\cos\theta)^2 + \\ + 2mgl\,(\sin\alpha\sin\theta\sin\psi + \cos\alpha\cos\theta) = 2h, \quad \varphi^\cdot + \psi^\cdot\cos\theta = r = \mathrm{const}\end{gathered}$$

из которых первый есть интеграл живых сил, а второй соответствует циклической координате $\varphi$. Если ось внешнего кольца карданова подвеса вертикальна ($\alpha = 0$), то уравнения (1.1) имеют еще один первый интеграл

$$[I + C^\circ + (A + B^\circ - C^\circ)\sin^2\theta]\,\psi^\cdot + C\,(\varphi^\cdot + \psi^\cdot\cos\theta)\cos\theta = k$$

соответствующий циклической координате $\psi$.

2. Исследуем устойчивость частного решения

$$\theta = \alpha, \qquad \psi = \frac{1}{2}\pi, \qquad \theta^{\cdot} = 0, \qquad \psi^{\cdot} = 0, \qquad r = r_0 \tag{2.1}$$

уравнений (1.1). В этом случае ось внутреннего кольца горизонтальна, а его срединная плоскость вертикальна, и гироскоп вращается с постоянной угловой скоростью $r_0$ вокруг вертикальной оси собственного вращения. При $\alpha = 0$ и $\alpha = {}^1/_2\,\pi$ (ось внешнего кольца вертикальна или горизонтальна) соответствующие решения исследованы в работах [4,5]. В дальнейшем угол $\alpha$ считается отличным от нуля.

Положим для возмущенного движения

$$\theta = \alpha + \xi_1, \quad \theta^{\cdot} = \xi_1^{\cdot} = \eta_1, \quad \psi = \frac{1}{2}\pi + \xi_2, \quad \psi^{\cdot} = \xi_2^{\cdot} = \eta_2, \quad r = r_0 + \eta_3$$

Уравнения возмущенного движения допускают следующие интегралы:

$$V_1 = (A + A^\circ)\,\eta_1^2 + [I + C^\circ + (A + B^\circ - C^\circ)\sin^2\alpha]\,\eta_2^2 +$$
$$+ C\eta_3^2 + 2Cr_0\eta_3 - mgl\,(\xi_1^2 + \xi_2^2\sin^2\alpha) + \ldots = \mathrm{const}$$
$$V_2 = \eta_3 = \mathrm{const}$$

из которых первый записан с точностью до членов второго порядка малости включительно. Рассмотрим интеграл

$$V = V_1 - 2Cr_0V_2 = (A + A^\circ)\,\eta_1^2 + [I + C^\circ + (A + B^\circ - C^\circ)\sin^2\alpha]\,\eta_2^2 +$$
$$+ C\eta_3^2 - mgl\,(\xi_1^2 + \xi_2^2\sin^2\alpha) + \ldots = \mathrm{const}$$

При $l < 0$ и $\alpha \neq 0$ он является знакоопределенной функцией величин $\xi_1$, $\xi_2$, $\eta_1$, $\eta_2$, $\eta_3$, поэтому движение (2.1) является при этих предположениях, на основании теоремы Ляпунова об устойчивости, устойчивым по отношению к $\theta$, $\psi$, $\theta^{\cdot}$, $\psi^{\cdot}$, $r$, а следовательно, и по отношению к $\theta$, $\psi$, $\theta^{\cdot}$, $\psi^{\cdot}$, $\varphi^{\cdot}$. При $l = 0$ движение (2.1) устойчиво по отношению к $\theta^{\cdot}$, $\psi^{\cdot}$, $r$; при этом устойчивость, как легко убедиться, вековая.

При $l > 0$ функция $V$ не является знакоопределенной и степень неустойчивости четная. Поэтому решение (2.1) в этом случае может иметь только гироскопическую устойчивость. Найдем условия последней. Уравнения первого приближения имеют следующий вид:

$$a\xi_1^{\cdot\cdot} = d\xi_1 - c\xi_2^{\cdot}, \qquad b\xi_2^{\cdot\cdot} = e\xi_2 + c\xi_1^{\cdot} \tag{2.2}$$

и допускают первый интеграл, указанный Н. Г. Четаевым [8]

$$\Gamma = 2\,(bd\,\xi_1\xi_2^{\cdot} - ae\xi_1^{\cdot}\xi_2) - c\,(d\xi_1^2 + e\xi_2^2) + \frac{ae - bd}{2c}\,(b\xi_2^{\cdot 2} - a\xi_1^{\cdot 2} + d\xi_1^2 - e\xi_2^2) = \mathrm{const}$$

Здесь

$$A + A^\circ = a, \qquad I + C^\circ + (A + B^\circ - C^\circ)\sin^2\alpha = b$$
$$Cr_0\sin\alpha = c, \qquad mgl = d, \qquad mgl\sin^2\alpha = e \qquad (r_0 \neq 0).$$

Рассмотрим квадратичный интеграл

$$\frac{c}{2}V_1 - \Gamma - Ccr_0V_2 = \frac{c^2 - bd + ae}{2c}\,a\xi_1^{\cdot 2} + 2ae\xi_1^{\cdot}\xi_2 + \frac{c^2 - bd + ae}{2c}\,e\xi_2^2 +$$
$$+ \frac{c^2 + bd - ae}{2c}\,b\xi_2^{\cdot 2} - 2bd\xi_2^{\cdot}\xi_1 + \frac{c^2 + bd - ae}{2c}\,d\xi_1^2 + \frac{1}{2}\,Cc\eta_3^2$$

В случае $l > 0$ этот интеграл будет знакоопределенным при выполнении единственного условия

$$c^2 - (ae + bd + 2\sqrt{abde}) > 0 \tag{2.3}$$

и, следовательно, если интеграл $\Gamma$ продолжается до интеграла полных уравнений возмущенного движения, условие (2.3) является достаточным условием устойчивости движения (2.1) по отношению к $\theta$, $\psi$, $\theta^{\cdot}$, $\psi^{\cdot}$, $r$. В исходных обозначениях условие (2.3) принимает вид

$$C^2r_0^2\sin^2\alpha - mgl\,[I + C^\circ + (2A + A^\circ + B^\circ - C^\circ)\sin^2\alpha +$$
$$+ 2\sin\alpha\sqrt{(A + A^\circ)\,[I + C^\circ + (A + B^\circ - C^\circ)\sin^2\alpha]}\,] > 0$$

и для случая, когда ось внешнего кольца горизонтальна ($\alpha = {}^1/_2\,\pi$), совпадает с условием, полученным при соответствующих предположениях в работе [5].

Выясним необходимость условия (2.3). Для этого рассмотрим характеристическое уравнение уравнений в вариациях (2.2). Оно представляется в виде

$$ab\lambda^4 + (c^2 - ae - bd)\,\lambda^2 + de = 0 \tag{2.4}$$

Если движение (2.1) устойчиво, то все корни этого уравнения должны иметь нулевые действительные части. Но при $l > 0$ и $\alpha \neq 0$ уравнение (2.4) не может иметь нулевых корней, и, следовательно, корни должны быть чисто мнимыми, а их квадраты отрицательными. Последнее требует одновременного выполнения неравенств

$$c^2 - ae - bd > 0, \qquad (c^2 - ae - bd)^2 - 4abde > 0$$

что, в свою очередь, требует выполнения неравенства (2.3), которое, таким образом, является необходимым условием устойчивости движения (2.1) при $\alpha \neq 0$. Для случая $\alpha = {}^1/_2\,\pi$ необходимость условия (2.3) установлена Чжан Сы-ином [9].

3. Рассмотрим еще одно частное решение уравнений (1.1)

$$\theta = 0, \qquad \psi = 0, \qquad \theta^{\cdot} = 0, \qquad \psi^{\cdot} = 0, \qquad r = r_0 \tag{3.1}$$

В этом случае срединные плоскости внешнего и внутреннего колец совпадают и вертикальны, ось собственного вращения совпадает с осью внешнего кольца.

Положим в возмущенном движении

$$\theta = \xi_1, \qquad \theta^{\cdot} = \xi_1^{\cdot}, \qquad \psi = \xi_2, \qquad \psi^{\cdot} = \xi_2^{\cdot}, \qquad r = r_0 + \eta_1$$

Уравнения возмущенного движения, выписанные с точностью до членов второго порядка малости включительно, имеют вид

$$(A + A^\circ)\,\xi_1^{\cdot\cdot} - mgl\xi_1 \cos\alpha + mgl\xi_2 \sin\alpha + Cr_0\xi_1\xi_2^{\cdot} + \ldots = 0$$
$$(I + C^\circ)\,\xi_2^{\cdot\cdot} + mgl\xi_1 \sin\alpha + C\eta_1^{\cdot} - Cr_0\xi_1\xi_1^{\cdot} + \ldots = 0, \quad \eta_1^{\cdot} = 0$$

Характеристическое уравнение первого приближения приводится к виду

$$\lambda^4 - \frac{mgl\cos\alpha}{A + A^\circ}\lambda^2 - \frac{(mgl\sin\alpha)^2}{(A + A^\circ)(I + C^\circ)} = 0$$

Отсюда

$$\lambda^2 = \frac{mgl}{2(A + A^\circ)}\left[\cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha + \frac{4(A + A^\circ)}{I + C^\circ}\sin^2\alpha}\right]$$

В рассматриваемом случае, когда гироскоп неуравновешен ($l \neq 0$), последняя формула показывает, что при любом значении угла $\alpha$ в промежутке $0 < \alpha < {}^1/_2\,\pi$ характеристическое уравнение имеет положительный корень, и, следовательно, движение (3.1) неустойчиво (на основании теоремы Ляпунова о неустойчивости по первому приближению). Из тех же соображений следует неустойчивость движения (3.1) при $\alpha = {}^1/_2\,\pi$, а также в случае $l > 0$, $\alpha = 0$.

4. В частном случае, когда ось внешнего кольца горизонтальна ($\alpha = {}^1/_2\,\pi$), уравнения (1.1) допускают, как легко убедиться, следующее решение:

$$\psi = 0, \quad \psi^{\cdot} = 0, \quad \theta = \frac{mgl}{Cr_0}t + \theta_0, \quad \theta^{\cdot} = \frac{mgl}{Cr_0}, \quad \varphi = r_0 t + \varphi_0, \quad \varphi^{\cdot} = r_0 \tag{4.1}$$

Срединные плоскости внешнего и внутреннего колец в этом случае вертикальны и срединная плоскость внутреннего кольца вращается с постоянной угловой скоростью вокруг своей вертикальной оси, а гироскоп вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси собственного вращения. При этом параметры системы связаны с угловыми скоростями соотношением $C\varphi^{\cdot}\theta^{\cdot} = mgl$. Движение (4.1) имеет характер регулярной прецессии при угле нутации, равном ${}^1/_2\,\pi$.

Поступила 11 II 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. О гироскопе в кардановом подвесе. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 3.
2. Скимель В. Н. Некоторые задачи движения и устойчивости тяжелого гироскопа. Труды КАИ, 1958, XXXVIII.
3. Магнус К. Об устойчивости движения тяжелого симметричного гироскопа в кардановом подвесе. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 2.
4. Румянцев В. В. Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе. ч. I. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 3.
5. Румянцев В. В. Об устойчивости движения гироскопа в кардановом надвесе, ч. II. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 4.
6. Богоявленский А. А. Частное решение задачи о движении гироскопа в кардановом подвесе. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 5.
7. Magnus K. Der schwere symmetrische Kreisel in kardanischer Lagerung. Ingenieur-Archiv, XXVIII Band, 1959.
8. Четаев Н. Г. О некоторых задачах об устойчивости движения в механике. ПММ, 1956, т. XX, вып. 3.
9. Чжан Сы-ин. К устойчивости движения гироскопа. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 3.