

УСТОЙЧИВОСТЬ ГИРОСКОПА, ИМЕЮЩЕГО ВЕРТИКАЛЬНУЮ ОСЬ ВНЕШНЕГО КОЛЬЦА, ПРИ УЧЕТЕ СУХОГО ТРЕНИЯ В ОСЯХ ПОДВЕСА

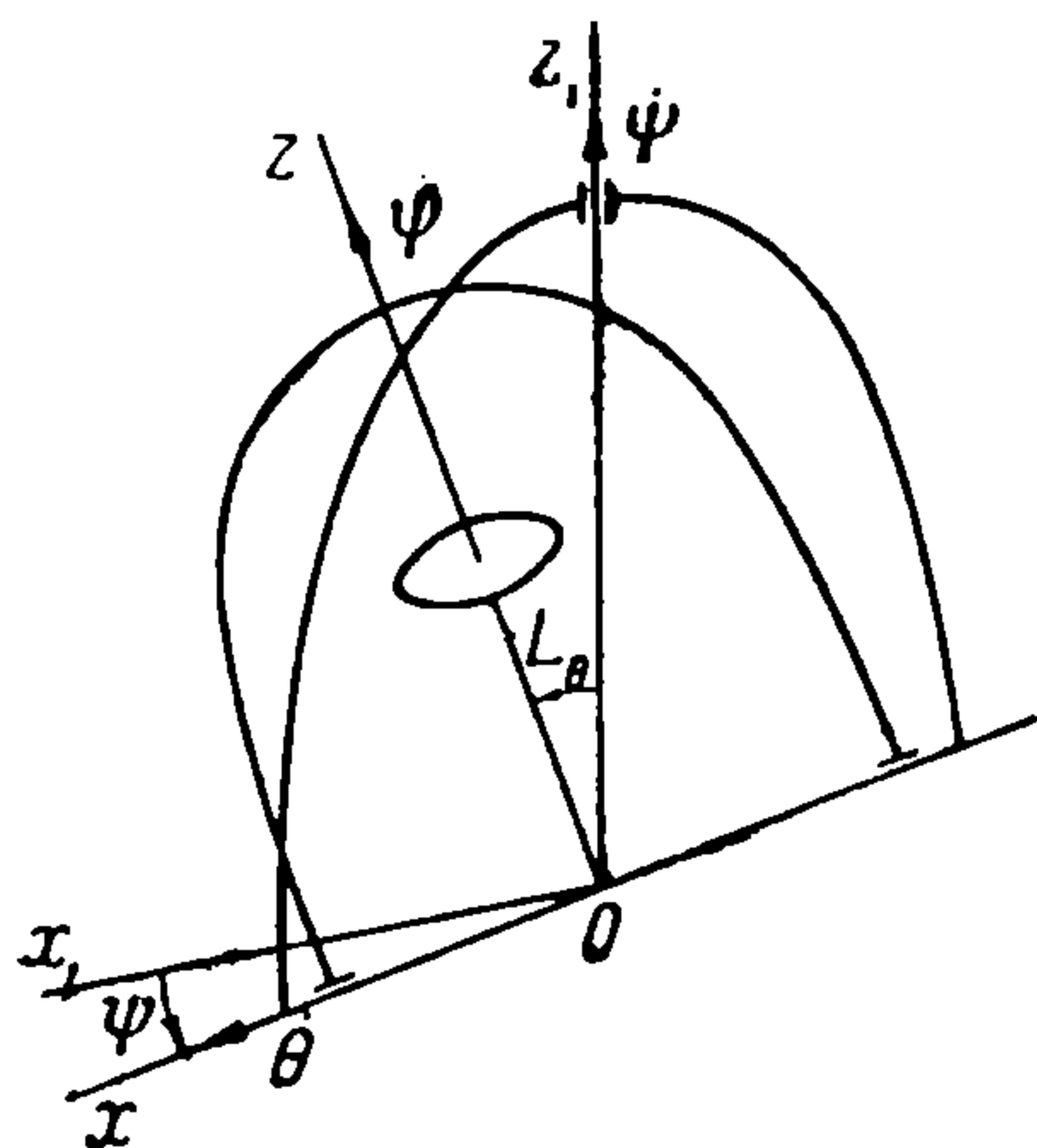
В. В. Крементуло

(Москва)

В работе В. В. Румянцева [1] изучено влияние вязкого трения на устойчивость вертикального вращения гироскопа в кардановом подвесе. В работах [2, 3] при исследовании устойчивости вертикального вращения и регулярной прецессии гироскопа принималось во внимание сухое трение в осях подвеса.

В этом же направлении выполнена предлагаемая работа

Представим гироскоп в кардановом подвесе (фиг. 1).



Фиг. 1

Пусть x_1, y_1, z_1 — неподвижная система координат, x, y, z — подвижная система координат, жестко связанная с кожухом; при этом ось x направлена по оси кожуха, ось z — по оси ротора. Введем обозначения: ψ — угол поворота внешнего кольца, θ — угол поворота кожуха в кольце, φ — угол собственного вращения гироскопа, L — центр тяжести системы кожух — ротор, P — вес гироскопа и кожуха, A, A, C — моменты инерции гироскопа относительно подвижных осей, A_1, B_1, C_1 — моменты инерции кожуха относительно тех же осей, J — момент инерции внешнего кольца относительно оси z_1 . Ось внешнего

кольца z_1 направлена по вертикали; расстояние OL обозначим через ζ .

Пусть по оси x действует момент сухого трения $M_1 = -B_1 \text{sign } \theta'$, где $B_1 > 0$, по оси z_1 — момент $M_2 = -B_2 \text{sign } \psi'$, где $B_2 > 0$.

Переменные ψ, θ, φ являются независимыми голономными, поэтому уравнения движения системы можно представить в виде уравнений Лагранжа второго рода

$$(A + A_1) \theta'' - (A + B_1 - C_1) \psi'^2 \sin \theta \cos \theta + C (\varphi' + \psi' \cos \theta) \psi' \sin \theta - P\zeta \sin \theta = M_1$$

$$\frac{d}{dt} [J\psi' + (A + B_1) \psi' \sin^2 \theta + C_1 \psi' \cos^2 \theta + C (\varphi' + \psi' \cos \theta) \cos \theta] = M_2 \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} (\varphi' + \psi' \cos \theta) = 0$$

Последнее уравнение, соответствующее циклической координате φ , дает первый интеграл

$$\varphi' + \psi' \cos \theta = r_0$$

Возьмем единичную сферу с центром в неподвижной точке O и будем изучать траектории точки пересечения оси ротора с поверхностью сферы.

Согласно Пэнлеве [4] значение M_1 при $\theta' = 0$ является величиной, лежащей на отрезке $[-B_1, +B_1]$, а значение M_2 , при $\psi' = 0$ — величиной, лежащей на отрезке $[-B_2, +B_2]$. Примем

$$M_1|_{\theta'=0} = \begin{cases} -B_1 & \text{при } f_1(\psi', \theta) < -B_1 \\ B_1 & \text{при } f_1(\psi', \theta) > B_1 \\ f_1(\psi', \theta) & \text{при } |f_1(\psi', \theta)| \leq B_1 \end{cases} \quad (2)$$

$$M_2|_{\psi'=0} = \begin{cases} -B_2 & \text{при } f_2(\theta', \theta) < -B_2 \\ B_2 & \text{при } f_2(\theta', \theta) > B_2 \\ f_2(\theta', \theta) & \text{при } |f_2(\theta', \theta)| \leq B_2 \end{cases} \quad (3)$$

где

$$f_1(\psi', \theta) = -(A + B_1 - C_1) \psi'^2 \sin \theta \cos \theta + Cr_0 \psi' \sin \theta - P\zeta \sin \theta$$

$$f_2(\theta', \theta) = -Cr_0 \theta' \sin \theta \quad (4)$$

Каждое из первых двух неравенств (2) соответствует наличию на траектории одной точки $\theta' = 0$, так как при этом $\theta'' \neq 0$ согласно (1). Третье неравенство (2) дает $\theta'' = 0$, что соответствует наличию участка траектории, идущего по параллели. Согласно той же системе (1) первые два равенства (3) дают $\psi'' \neq 0$; третье неравенство (3) приводит к $\psi'' = 0$, что соответствует участку траектории по меридиану.

Возьмем участок траектории, совпадающий с параллелью,

$$\theta = \theta_1, \quad \theta' = 0, \quad \theta'' = 0, \quad \psi_1' \neq 0 \quad (\psi_1, \theta_1 - \text{начало участка})$$

описываемый уравнениями

$$(J + (A + B_1) \sin^2 \theta_1 + C_1 \cos^2 \theta_1) \psi'' = \pm B_2, \quad |f_1(\psi', \theta_1)| \leq B_1 \quad (5)$$

Последнее неравенство дает $\psi^{\circ} \leq \psi' \leq \psi^{\circ\circ}$, где через ψ° , $\psi^{\circ\circ}$ обозначены (фиг. 2) корни уравнения $|f_1(\psi', \theta_1)| = B_1$. Угловая скорость ψ' зависит линейно от t

$$\psi'(t) = \begin{cases} \psi_1' - \frac{B_2 t}{J + (A + B_1) \sin^2 \theta_1 + C_1 \cos^2 \theta_1} & \text{при } \psi_1' > 0 \\ \psi_1' + \frac{B_2 t}{J + (A + B_1) \sin^2 \theta_1 + C_1 \cos^2 \theta_1} & \text{при } \psi_1' < 0 \end{cases}$$

Отсчет времени произведен для простоты от начальной точки участка (ψ_1, θ_1) , т. е. $\psi' = \psi_1'$ при $t = 0$. Легко видеть, что траектория может идти по параллели лишь в течение конечного промежутка времени $[0, T_1]$, где

$$T_1 = \frac{J + (A + B_1) \sin^2 \theta_1 + C_1 \cos^2 \theta_1}{B_2} |\psi_1'|$$

При $t = T_1$ гироскоп попадает в «зону застоя»: начиная с этого момента ось ротора занимает во все последующее время движения некоторое фиксированное положение в пространстве ($\psi = \text{const}$, $\theta = \text{const}$). Значит, при данной постановке задачи отсутствует регулярная прецессия, которая возможна при потенциальных силах.

В этом смысле при учете сухого трения происходит сужение класса характерных движений. Исследуем теперь участок траектории, идущий по меридиану,

$$\psi = \psi_1, \quad \psi' = 0, \quad \psi'' = 0, \quad \theta_1' \neq 0 \quad (\psi_1, \theta_1 - \text{начало участка})$$

описываемый уравнениями

$$(A + A_1) \theta'' - P\zeta \sin \theta = \pm B_1, \quad |f_2(\theta', \theta)| \leq B_2 \quad (6)$$

Обозначим

$$\frac{P\zeta}{A + A_1} = a, \quad \frac{B_1}{A + A_1} = b_1$$

Покажем, что через конечное время T_2 гироскоп попадет в «зону застоя», т. е. при $t = T_2$ скорость θ' обратится в нуль. Пусть $\theta_1' > 0$. Сделаем в (6) замену

$$\theta' = f(\theta), \quad \theta'' = \frac{df}{d\theta} f$$

Тогда получим

$$\frac{1}{2} (f^2 - f_1^2) = a (\cos \theta_1 - \cos \theta) + b_1 (\theta_1 - \theta), \quad f_1 = f(\theta_1) = \theta_1'$$

Обозначим через $\theta = \theta_T$ корень уравнения

$$\theta_1'^2 + 2a (\cos \theta_1 - \cos \theta) + 2b_1 (\theta_1 - \theta) = 0$$

Тогда искомое T_2 можно представить в виде

$$T_2 = \left| \int_{\theta_1}^{\theta_T} \frac{d\theta}{\sqrt{K - 2a \cos \theta - 2b_1 \theta}} \right|, \quad K = \theta_1'^2 + 2a \cos \theta_1 + 2b_1 \theta_1$$

Рассмотрим теперь вертикальное вращение

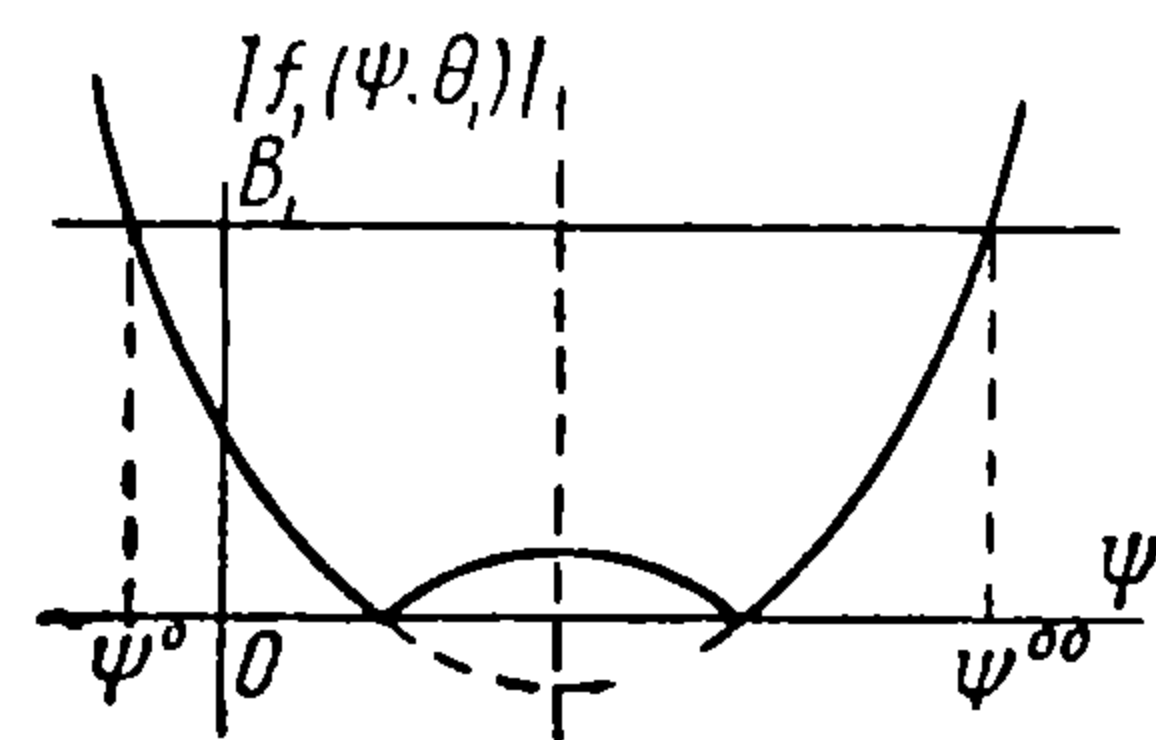
$$\theta = 0, \quad \theta' = 0, \quad \psi' = 0, \quad r_0 = \omega \quad (7)$$

Как показывает система (1), это движение возможно, так как в силу (2), (3), (4)

$$M_1 = 0 \quad \text{при } \theta' = 0, \quad \theta = 0, \quad M_2 = 0 \quad \text{при } \psi' = 0, \quad \theta = 0$$

Изучим устойчивость этого движения. Для этого рассмотрим, как обычно, возмущенное движение

$$\theta = \xi_1, \quad \theta' = \xi_1', \quad \psi' = \xi_2, \quad r_0 = \omega + \xi_3$$



Фиг. 2

В силу сказанного выше будем изучать поведение возмущенной траектории порознь на трех участках:

$$1^\circ. \quad \xi_1 \neq 0, \quad \xi_2 \neq 0, \quad 2^\circ. \quad \xi_1 = 0, \quad \xi_2 \neq 0, \quad 3^\circ. \quad \xi_1 \neq 0, \quad \xi_2 = 0$$

Для каждого участка можно построить знакоопределенную функцию в виде линейной связки интегралов, допускаемых соответствующими уравнениями возмущенного движения.

1°. На первом участке имеет место соотношение, аналогичное закону сохранения энергии при потенциальных силах

$$J\psi^2 + (A + A_1)\theta^2 + (A + B_1)\psi^2 \sin^2\theta + C_1\psi^2 \cos^2\theta + 2P\zeta \cos\theta + Cr_0^2 - 2M_1\theta - 2M_2\psi = h_1$$

Уравнения возмущенного движения допускают два интеграла

$$W_1 = \xi_3, \quad W_2 = (A + A_1)\xi_1^2 + (J + C_1)\xi_2^2 + C(\xi_3^2 + 2\omega\xi_3) - P\zeta\gamma_1^2 - 2M_1\gamma_1 - 2M_2\psi \quad (8)$$

Для угла ψ не ввели обозначение через γ_2 с тем, чтобы показать, что устойчивость по отношению к ψ не изучается.

Введем функцию

$$\Phi_1 = 2(M_1\gamma_1 + M_2\psi)$$

и составим связку

$$V_1 = \Phi_1 + W_2 - 2C\omega W_1$$

При $\zeta < 0$ функция V_1 является определенно-положительной квадратичной формой. Производная от V_1 по времени в силу уравнений возмущенного движения

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{d\Phi_1}{dt} = 2(M_1\xi_1 + M_2\xi_2)$$

отрицательна, так как

$$M_1\xi_1 = -B_1\xi_1 \operatorname{sign} \xi_1 < 0, \quad M_2\xi_2 = -B_2\xi_2 \operatorname{sign} \xi_2 < 0$$

2°. Уравнения возмущенного движения для второго участка представлены уравнениями (5), т. е.

$$(J + (A + B_1)\sin^2\theta_1 + C_1\cos^2\theta_1) \frac{d\xi_2}{dt} = \pm B_2, \quad |f_1(\xi_2, \theta_1)| \leq B_1 \quad (9)$$

Ввиду того что трение M_1 на рассматриваемом участке $\theta = \theta_1$ не работает, уравнения возмущенного движения допускают интеграл

$$W_2' = (J + (A + B_1)\sin^2\theta_1 + C_1\cos^2\theta_1)\xi_2^2 + C(\xi_3^2 + 2\omega\xi_3) - 2M_2\psi$$

Интеграл $W_1 = \xi_3$ остается без изменения. Составим связку

$$V_2 = \Phi_2 + W_2' - 2C\omega W_1, \quad \Phi_2 = 2M_2\psi$$

Производная от V_2 по времени в силу (9)

$$\frac{dV_2}{dt} = \frac{d\Phi_2}{dt} = 2M_2\xi_2 < 0$$

3°. Уравнения возмущенного движения для третьего участка

$$(A + A_1) \frac{d\xi_1}{dt} - P\zeta\gamma_1 = \pm B_1, \quad \frac{d\gamma_1}{dt} = \xi_1, \quad |f_2(\xi_1, \gamma_1)| \leq B_2 \quad (10)$$

допускают интеграл

$$W_2'' = (A + A_1)\xi_1^2 + C(\xi_3^2 + 2\omega\xi_3) - P\zeta\gamma_1^2 - 2M_1\gamma_1$$

При условии $\zeta < 0$ связка

$$V_3 = \Phi_3 + W_2'' - 2C\omega W_1, \quad \Phi_3 = 2M_1\gamma_1$$

является определенно-положительной функцией, производная по времени от которой в силу (10) отрицательна

$$\frac{dV_3}{dt} = \frac{d\Phi_3}{dt} = 2M_1\xi_1 < 0$$

Итак, каждому участку возмущенной траектории соответствует функция, являющаяся определенно-положительной при выполнении условия

$$\zeta < 0 \quad (11)$$

Производная по времени от каждой функции в силу соответствующей системы уравнений возмущенного движения отрицательна. Рассматриваемое движение (7) при указанном условии устойчиво, причем имеет место асимптотическая устойчивость по ξ_1 и ξ_2 . Это требует некоторого пояснения.

Нужно показать, что для любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что если начальные возмущения не выходят из сферы δ

$$\eta_1^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \leq \delta$$

то во все время движения возмущенные траектории не выйдут из сферы ε

$$\eta_1^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \leq \varepsilon$$

В силу замечаний, сделанных выше, возмущенные траектории при малых начальных возмущениях могут быть двух типов (фиг. 3.). Траектории изображены в проекции на касательную плоскость, проведенную к

северному полюсу единичной сферы с центром в точке 0; точки E_0' , E_0'' — начальные; в точке E_1' обращается в нуль ξ_1 , в точке E_2' обращается в нуль скорость ξ_2 и гироскоп попадает в «зону застоя». Участок траектории $E_1'E_2'$ идет по параллели. В точке E_1'' обращается в нуль ξ_2 , в точке E_2'' исчезает ξ_1 и гироскоп снова попадает в «зону застоя»; участок траектории $E_1''E_2''$ идет по меридиану.

Для данного $\varepsilon > 0$ можно построить $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, соответствующие двум типам траекторий. Тогда искомое

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$$

В результате оценок, проведенных при помощи функций V_1, V_2, V_3 , получим,

$$\delta = \min \left\{ \frac{K_2 K_2'}{K_1 (K_1' + \varkappa)} \varepsilon, \frac{K_2 K_2''}{K_1 K_1''} \varepsilon \right\}$$

где

$$K_1 = \max(A + A_1, J + C_1, C, -P\zeta), \quad K_2 = \min(A + A_1, J + C_1, C, -P\zeta)$$

$$K_1' = \max(J + C_1, C) \quad K_2' = \min(J + C_1, C)$$

$$K_2' = \max(A + A_1, C, -P\zeta), \quad K_2'' = \min(A + A_1, C, -P\zeta), \quad \varkappa = \frac{K_2'(K_2' - K_2)}{K_2}$$

Значит, изучаемое движение устойчиво.

Полученный результат допускает обобщение. Рассмотрим движение

$$\theta = \theta_0, \quad \theta' = 0, \quad \psi' = 0, \quad r_0 = \omega \quad (12)$$

представляющее собой перманентное вращение относительно оси, наклоненной под углом $\theta = \theta_0$ к вертикали. При отсутствии трения ($M_1 \equiv 0, M_2 \equiv 0$) такое движение, как показывает (1), невозможно. Условия (2), (4) показывают, что при условии

$$|P\zeta \sin \theta_0| \leq B_1 \quad (13)$$

это движение возможно. Таким образом, (13) есть условие существования движения (12).

Исследование устойчивости этого движения проводится аналогично. Достаточное условие устойчивости сводится к неравенству (11).

Поступила 28 XII 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В. В. Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 3.
2. Кузнецов Л. И. О движении гироскопа в сопротивляющейся среде с учетом трения в подвесе. Вестник ЛГУ, 1958, № 19, сер. мат., мех., вып. 4.
3. Крементуло В. В. Исследование устойчивости гироскопа с учетом сухого трения на оси внутреннего карданова кольца (кожуха). ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 5.
4. Пэнлеве П. Лекции о трении. Гостехиздат, 1954.