зависящие от двойного угла; все составляющие скорости изменяются вдоль оси по синусоидальному закону с частотой изменения сечения трубы. Первое приближение по числу Грассхофа для температуры с учетом первого приближения по параметру неровности зависит от тройного угла (для постоянного сечения такая зависимость возникает только лишь во втором приближении по числу Грассхофа); вдоль оси трубы температура меняется по гармоническому закону с фазой, смещенной на некоторую величину, которая обращается в нуль при $\varkappa = \varkappa_c$.

Дальнейшие приближения по параметру неравности изображают движения более мелкого масштаба; например, второе приближение для скорости периодически изменяется вдоль оси трубы с удвоенной частотой изменения сечения трубы.

Полученные результаты можно обобщить и использовать для изучения распределения температуры в горизонтальных трубах, сечения которых изменяются вдоль оси по более сложному периодическому закону, так как в каждом приближении приходится решать линейные уравнения и в силу этого можно пользоваться разложением уравнения поверхности трубы и искомых решений в ряды Фурье.

Поступило 30 I 1959 Пермский университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. ГИТТЛ, 1953.
2. Остроумов Г. А. Свободная конвенция в условиях внутренней задачи, ГИТТЛ, 1952.
3. Шапошников И. Г. К теории слабой конвекции. ЖТФ, 1952. XXII, вып. 5.

О ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. Х. Харасахал

(Алма-Ата)

Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений

$$(S_t)\ \frac{dx_s}{dt} = \omega_s(t,\ x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

где функции $\omega_s^p(t,\ x_1, \ldots, x_n)$ в области $R\ (-\infty < t < +\infty,\ |x_s| \leqslant M < \infty)$ непрерывны по переменному t и удовлетворяют относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$ условию Липшица. При указанных условиях система (1) имеет и притом единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям: $x_1(0), \ldots, x_n(0)$.

Рассмотрим теперь последовательность систем дифференциальных уравнений

$$(S_t^{(p)})\ \frac{dx_s}{dt} = \omega_t^{(p)}(t,\ x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n;\ p = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

где функции $\omega_s^{(p)}(t,\ x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяют тем же условиям, что и функции ω_s. Допустим, что в каждом конечном интервале изменения t функции $\omega_s^{(p)}$ при $p \to \infty$ стремятся равномерно, относительно t, к функциям ω_s. Пусть, кроме того, начальные значения $x_s^{(p)}(0)$ решений системы (2) стремятся к пределам $x_s(0)$. Тогда решения систем $(S_t^{(p)})$ стремятся равномерно, в каждом конечном интервале, к решению системы (S_t).

Будем предполагать далее, что функции $\omega(t,\ x_1, \ldots, x_n)$ — почти периодические (в смысле Бора) относительно независимого переменного t равномерно относительно $(x_1, \ldots, x_n) \in R$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такие функции $F_k^{(s)}(x_1, \ldots, x_n)$ и вещественные постоянные $\lambda_k^{(s)}$, что

$$\left| \omega_s(t,\ x_1, \ldots, x_n) - \sum_k e^{i\lambda_k^{(s)} t} F_k^{(s)}(x_1, \ldots, x_n) \right| < \varepsilon$$

Известно [1], что если функция $\varphi(t)$ почти периодическая в смысле Бора, то семейство функций $\{\varphi(t+h)\}$ компактно в смысле равномерной сходимости на всей действительной оси. Нетрудно показать, что при сделанных предположениях относительно функций $\omega_s(t, x_1, \ldots, x_n)$ семейство функций $\{\omega_s(t+h, x_1, \ldots, x_n)\}$ компактно в смысле равномерной сходимости на всей оси. Рассмотрим всевозможные последовательности действительных чисел $\{h_k\}$, для которых существуют, равномерно относительно t, пределы

$$\lim_{k\to\infty} \omega_s(t+h_k, x_1, \ldots, x_n) = \omega_s^*(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (s=1, \ldots, n)$$

Наряду с системой (1) будем рассматривать системы

$$(S_t^*)\ \frac{dx_s}{dt} = \omega_s^*(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (s=1, \ldots, n)$$

Будем говорить, что системы (S_{t+h_k}) сходятся к системе (S_t^*) и писать

$$(S_t^*) = \lim (S_{t+h_k})$$

Выбирая различные последовательности $\{h_k\}$, получим множество систем, которое обозначим через $H(S_{t+h})$. Заметим, что если

$$(S_t^*) = \lim (S_{t+h_k}), \quad \text{то} \quad (S_t) = \lim (S_{t-h_k}),$$

поэтому каждая из систем множества $H(S_{t+h})$ определяется какой-нибудь из систем (S_t^*).

Условимся говорить о двух системах (S_t^*) и (S_t^{**}) множества $H(S_{t+h})$, что их разности меньше, чем $\varepsilon > 0$, если

$$|\omega_s^* - \omega_s^{**}| < \varepsilon \quad (s=1, 2, \ldots, n)$$

и писать

$$|(S_t^*) - (S_t^{**})| < \varepsilon$$

Теорема 1. Если некоторая система из множества $H(S_{t+h})$ допускает почти периодическое решение, то это справедливо также и относительно всех систем множества.

Действительно, пусть система (S_t) допускает почти периодическое решение $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ и пусть (S_t^*) другая система множества

$$H(S_{t+h}), \text{ т. е. } (S_t^*) = \lim (S_{t+h_k})$$

Для множества различных систем (S_{t+h_k}) $(k=1, 2, \ldots)$ получаем множества решений $x_s(t+h_k)$ $(s=1, 2, \ldots, n;\ k=1, 2, \ldots)$. При фиксированном h_k каждое решение $x_s(t+h_k)$ $(s=1, 2, \ldots, n)$ является совокупностью почти периодических функций. Таким образом получаем n последовательностей почти периодических функций

$$x_s(t+h_1), \qquad x_s(t+h_2), \ldots, \qquad x_s(t+h_k), \ldots$$

Но так как почти периодические функции $x_s(t)$ являются нормальными [1], то из указанных последовательностей можно выбрать равномерно сходящиеся на всей оси последовательности $x_s(t+l_1), x_s(t+l_2), \ldots, x_s(t+l_k), \ldots, (s=1, \ldots, n)$, т. е.

$$x_s(t+l_k) \to x_s^*(t) \qquad (-\infty < t < \infty)$$

Так как $x_s^*(t)$ есть решение системы (S_t^*), то теорема доказана.

Замечание. Если $x_s^{(1)}$ и $x_s^{(2)}$ два различных почти периодических решения системы (S_t), то можно определить таким же образом два почти периодических решения системы (S_t^*), которые также будут различными. Отсюда вытекает также, что если некоторая система из множества $H(S_{t+h})$ допускает одно единственное почти периодическое решение, то это будет так и относительно всех систем множества.

Теорема 2. Если каждая система из множества $H(S_{t+h})$ имеет единственное ограниченное решение, то это решение состоит из почти периодических функций.

Действительно, ограниченное решение $x_s = u_s(t)$ системы (S_t) определяется своими начальными условиями $u_s(0)$. Пусть $(S_t^*) = \lim (S_{t+h_k})$. Можно всегда считать, что числа $u_s(h_k)$ стремятся к пределам $u_s^* = \lim u_s(h_k)$. Тогда решение $u_s^*(t)$ системы (S_t^*), которое при $t=0$ принимает систему значений u_s^*, является ограниченным и сходимость $u_s(t+h_k)$ к $u_s^*(t)$ будет равномерной в каждом интервале конечной длины. Для доказательства теоремы нужно показать, что эта сходимость равномерна в $(-\infty < t < +\infty)$, т. е. что ограниченное решение $u_s(t)$ составлено из нормальных функций.

Допустим, что равномерной сходимости в $-\infty < t < +\infty$ нет. Тогда можно определить:

1) положительное число α,

2) последовательность возрастающих по абсолютной величине чисел вместе с индексами

$$t_1, t_2, \ldots, t_p, \ldots$$

3) две последовательности индексов

$$k_1, k_2, \ldots, k_p, \ldots, \qquad r_1, r_2, \ldots, r_p, \ldots$$

4) функцию $u_j(t)$ среди n функций $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ такую, что

$$|u_j(t_p + h_{k_p}) - u_j(t_p + h_{r_p})| \geqslant \alpha \qquad (p = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

Но из каждой последовательности чисел $u_s(t_p + h_{k_p})$ и $u_s(t_p + h_{r_p})$ и из каждой последовательности систем

$$(S_{t+t_p+h_{k_p}}) \text{ и } (S_{t+t_p+h_{r_p}})$$

можно выделить другие последовательности, по меньшей мере такие, что эти числа и эти системы стремятся к пределам $u_s^{(1)}$ и $u_s^{(2)}$, $(S^{(1)})$ и $(S^{(2)})$.

Чтобы не усложнять обозначений, предположим, что сами предыдущие последовательности обладают этим свойством. Системы чисел $u_s^{(1)}$ и $u_s^{(2)}$ являются тогда начальными значениями ограниченных решений систем $(S^{(1)})$ и $S^{(2)})$. Но легко показать, что системы $(S^{(1)})$ и $(S^{(2)})$ совпадают. По условию система $(S^{(1)})$ имеет только одно ограниченное решение, а мы нашли две системы различных начальных значений для системы $(S^{(1)})$ и ее единственного ограниченного решения. В силу (3) необходимо имеем $|u_j^{(1)} - u_j^{(2)}| \geqslant \alpha$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Следствие. Рассмотрим автономную систему

$$\frac{dx_s}{dt} = \omega_s(x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

В данном случае множество $H(S_{t+h})$ состоит из одного элемента. Поэтому доказана следующая теорема.

Теорема 3. Если система (4) имеет единственное ограниченное решение, то это решение состоит из почти периодических (в частности периодических) функций.

Замечание. Теоремы 1 и 2 являются распространением на нелинейные системы теорем, которые были указаны Фаваром [2] для линейных систем дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами.

В теоремах Фавара требуется выполнение определенных условий для всего множества систем дифференциальных уравнений. Б. М. Левитан ввел новый класс почти периодических функций [1],— так называемые N-почти периодические функции. Он показал, что если искать N-почти периодические решения линейных систем дифференциальных уравнений, то нет надобности требовать выполнения определенных условий для всего множества систем. Аналогично обстоит дело и с нелинейными системами. Нетрудно убедиться, повторяя доказательство Б. М. Левитана, что справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Если система (S_t) имеет единственное ограниченное решение, то это решение состоит из N-почти периодических функций.

Поступила 12 XI 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Левитан Б. М. Почти периодические функции. ГИТТЛ, 1953.
2. Favard. I. Sur les équations différentielles à coefficients presque — périodiques, Acta math. 51 (1927).