СТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОВАЯ КОНВЕКЦИЯ В КРУГЛОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ТРУБЕ С ГАРМОНИЧЕСКИ МЕНЯЮЩИМСЯ СЕЧЕНИЕМ

М. М. Фарзетдинов
(Стерлитамак)

1. Рассмотрим задачу о стационарной тепловой конвекции в горизонтальной трубе со слабо меняющимся вдоль оси по гармоническому закону сечением, являющейся полостью в бесконечном твердом массиве, в котором на бесконечности задан горизонтальный градиент температуры, перпендикулярный к оси трубы (подогрев сбоку).

Ось z направим вдоль оси трубы, а ось x — вертикально вверх. Уравнение поверхности трубы принимаем в виде

$$x^2 + y^2 = R^2 (1 + \varepsilon f)^2, \qquad \left(f(z) = \sin \omega z, \ \omega = \frac{2\pi}{\lambda}, \ \varepsilon = \frac{a}{R} < 1\right) \tag{1.1}$$

Здесь R — средний радиус трубы; λ — пространственный период неравности трубы; a — наибольшее абсолютное значение отклонения радиуса трубы от R (все дальнейшее рассмотрение остается в силе и в более общем случае, когда f есть любая периодическая функция от z, имеющая конечные производные до второго порядка).

Уравнения конвекции имеют вид [1]

$$\mathbf{V}\nabla\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p' + \nu\Delta\mathbf{V} + \beta g \gamma_0 T, \qquad \operatorname{div}\mathbf{V} = 0 \tag{1.2}$$

$$\mathbf{V}\nabla T = \chi\Delta T, \qquad \Delta T_e = 0 \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{V} = \{V_x, V_y, V_z\}$ — вектор скорости жидкости; T и T_e соответственно температура жидкости и массива, отсчитанные от некоторого среднего по полости значения температуры T_0; p' — давление, отсчитанное от значения P_0 при равновесии и при $T = T_0$; обозначим через

$$\eta_0, \ \varkappa, \ \beta_0, \ c_p, \ \nu = \eta_0/\rho_0, \quad \chi = \varkappa/\rho_0 c_p$$

соответственно коэффициенты вязкости, теплопроводности, теплового расширения жидкости, теплоемкость жидкости при постоянном давлении, коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности жидкости, причем все эти параметры будем считать не зависящими от температуры; g — величина ускорения силы тяжести, γ_0 — единичный вектор по направлению ускорения силы тяжести.

Уравнения (1.2), (1.3) будем решать при следующих граничных условиях [2]. Скорость жидкости на границе полости S равна нулю

$$[V_x]_S = [V_y]_S = [V_z]_S = 0 \tag{1.4}$$

В массиве на большом расстоянии от полости задан постоянный градиент температуры

$$\left[\frac{\partial T_e}{\partial x}\right] = A \qquad \text{при } r \to \infty \tag{1.5}$$

На границе полости температура и тепловой поток непрерывны

$$[T - T_e]_S = 0, \qquad \left[\varkappa\frac{dT}{dn} - \varkappa_e\frac{dT}{dn}\right]_S = 0 \tag{1.6}$$

где $\varkappa$, $\varkappa_e$ — соответственно коэффициенты теплопроводности жидкости и массива, а n — нормаль к поверхности трубы.

2. Неровность поверхности трубы влечет за собой значительные вычислительные трудности при удовлетворении граничным условиям. Оказывается, что задача решается легче, если от координат x, y, z перейти к новым координатам

$$\mathbf{x} = \frac{x}{1 + \varepsilon f(z)}, \qquad \mathbf{y} = \frac{y}{1 + \varepsilon f(z)}, \qquad \mathbf{z} = z \tag{2.1}$$

Легко видеть, что $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, как и x, y, z, независимы между собой, и в новых переменных уравнение поверхности переходит в уравнение круглового цилиндра радиуса R.

После замены координат (2.1) в уравнениях (1.2), (1.3) и граничных условиях (1.4) — (1.6) перейдем к безразмерным величинам, взяв за характеристическую длину средний радиус трубы R; таким образом, в уравнениях и граничных условиях нужно выполнить преобразования по формулам

$$x = l\xi, \qquad y = l\eta, \qquad z = R\zeta \qquad (l = R[1 + \varepsilon f(z)]) \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{\nu}{R} u, & V_y &= \frac{\nu}{R} v, & V_z &= \frac{\nu}{R} w \\ T &= AR\theta, & T_e &= AR\theta_e, & p' &= \frac{\nu^2}{R} \rho_0 p \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь u, v, w, θ, θ_e, p — функции от ξ, η, ζ.

В безразмерных координатах ξ, η, ζ уравнение поверхности трубы переменного сечения оказывается уравнением круглого цилиндра с радиусом, равным единице; при этом в результате преобразования (2.1) внутренние точки полости переходят снова во внутренние точки, граничные точки — в граничные.

Считая неровность трубы слабой, в результате простых вычислений получим приближенные уравнения задачи в новом виде с точностью до членов, содержащих в качестве множителя ε в первой степени, а также соответствующие граничные условия.

3. Рассматриваемая задача «беспороговая» [2,3]. Поэтому для решения этой задачи воспользуемся методом последовательных приближений, основанном на разложении решений по степеням [3] числа Грассхофа γ. Для решения полученных в каждом приближении по числу Грассхофа линейных уравнений применим метод последовательных приближений, основанный на разложении по степеням «параметра неравности» трубы ε.

Ищем решение уравнений задачи в виде рядов по степеням γ

$$\begin{aligned} u &= \gamma u_1 + \gamma^2 u_2 + \ldots, & p &= \gamma p_1 + \gamma^2 p_2 + \ldots \quad (\gamma = \beta_0 \nu^{-2} g R^4 A) \\ v &= \gamma v_1 + \gamma^2 v_1 + \ldots, & \theta &= \theta_0 + \gamma\theta_1 + \gamma^2\theta_2 + \ldots \\ w &= \gamma w_1 + \gamma^2 w_2 + \ldots, & \theta_e &= \theta_0' + \gamma\theta_1' + \gamma^2\theta_2' + \ldots \end{aligned} \tag{3.1}$$

Подставляя ряды (3.1) в уравнения задачи, получим уравнения для последовательного нахождения функций θ_0, θ_0', u_1, v_1, w_1, p_1, θ_1, θ_1', u_2, v_2, w_2, p_2, θ_2, θ_2', ...

Ограничиваясь первым приближением относительно γ, будем искать решения уравнений для этих функций, в свою очередь, в виде линейных частей рядов по степеням параметра ε

$$\theta_0 = \theta_{00} + \varepsilon\theta_{01}, \qquad \theta_0' = \theta_{00}' + \varepsilon\theta_{01}' \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{10} + \varepsilon u_{11}, & v_1 &= v_{10} + \varepsilon v_{11}, & w_1 &= w_{10} + \varepsilon w_{11} \\ p_1 &= p_{10} + \varepsilon p_{11}, & \theta_1 &= \theta_{10} + \varepsilon\theta_{11}, & \theta_1' &= \theta_{10}' + \varepsilon\theta_{11}' \end{aligned} \tag{3.3}$$

Коэффициенты отрезков рядов (3.2) и (3.3) являются функциями ξ, η, ξ. Для нахождения этих функций получаются линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с соответствующими граничными условиями.

Точные решения уравнений для функций θ_{00}, θ_{00}', u_{10}, v_{10}, w_{10}, p_{10}, θ_{10}, θ_{10}' известны. Уравнения для функций θ_{01}, θ_{01}', u_{11}, v_{11}, w_{11}, p_{11}, θ_{11}, θ_{11}' были нами решены. Таким образом, найдены нулевые и первые приближения по обоим параметрам γ и ε для температуры, скорости и давления.

4. В каждом приближении по числу Грассхофа решения для температуры и скорости в нулевом приближении по параметру неровности совпадают с известными р зультатами для трубы постоянного сечения [2,3]: первые и следующие приближения по параметру неровности учитывают влияние неодинаковости сечения трубы на конвективные явления. Первое приближение по числу Грассхофа для скорости с учетом первого приближения по параметру неровности изображает движение жидкости, которое отличается от движения жидкости в ровной трубе тем, что появляются, кроме азимутальной составляющей, продольная и радиальная составляющие скорости, зависящие от двойного угла; все составляющие скорости изменяются вдоль оси по синусоидальному закону с частотой изменения сечения трубы. Первое приближение по числу Грассхофа для температуры с учетом первого приближения по параметру неровности зависит от тройного угла (для постоянного сечения такая зависимость возникает только лишь во втором приближении по числу Грассхофа); вдоль оси трубы температура меняется по гармоническому закону с фазой, смещенной на некоторую величину, которая обращается в нуль при $\varkappa = \varkappa_c$.

Дальнейшие приближения по параметру неравности изображают движения более мелкого масштаба; например, второе приближение для скорости периодически изменяется вдоль оси трубы с удвоенной частотой изменения сечения трубы.

Полученные результаты можно обобщить и использовать для изучения распределения температуры в горизонтальных трубах, сечения которых изменяются вдоль оси по более сложному периодическому закону, так как в каждом приближении приходится решать линейные уравнения и в силу этого можно пользоваться разложением уравнения поверхности трубы и искомых решений в ряды Фурье.

Поступило 30 I 1959 Пермский университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. ГИТТЛ, 1953.
2. Остроумов Г. А. Свободная конвенция в условиях внутренней задачи, ГИТТЛ, 1952.
3. Шапошников И. Г. К теории слабой конвекции. ЖТФ, 1952. XXII, вып. 5.

О ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. Х. Харасахал
(Алма-Ата)

Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений

$$(S_t)\ \frac{dx_s}{dt} = \omega_s(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

где функции $\omega_s^p(t, x_1, \ldots, x_n)$ в области $R\,(-\infty < t < +\infty,\ |x_s| \leqslant M < \infty)$ непрерывны по переменному t и удовлетворяют относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$ условию Липшица. При указанных условиях система (1) имеет и притом единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям: $x_1(0), \ldots, x_n(0)$.

Рассмотрим теперь последовательность систем дифференциальных уравнений

$$(S_t^{(p)})\ \frac{dx_s}{dt} = \omega_t^{(p)}(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n;\ p = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

где функции $\omega_s^{(p)}(t, x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяют тем же условиям, что и функции ω_s. Допустим, что в каждом конечном интервале изменения t функции $\omega_s^{(p)}$ при $p \to \infty$ стремятся равномерно, относительно t, к функциям ω_s. Пусть, кроме того, начальные значения $x_s^{(p)}(0)$ решений системы (2) стремятся к пределам $x_s(0)$. Тогда решения систем $(S_t^{(p)})$ стремятся равномерно, в каждом конечном интервале, к решению системы (S_t).

Будем предполагать далее, что функции $\omega(t, x_1, \ldots, x_n)$ — почти периодические (в смысле Бора) относительно независимого переменного t равномерно относительно $(x_1, \ldots, x_n) \in R$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такие функции $F_k^{(s)}(x_1, \ldots, x_n)$ и вещественные постоянные $\lambda_k^{(s)}$, что

$$\left| \omega_s(t, x_1, \ldots, x_n) - \sum_k e^{i\lambda_k^{(s)} t} F_k^{(s)}(x_1, \ldots, x_n) \right| < \varepsilon$$