

РАСТЕКАНИЕ ЛИНЗЫ ГРУНТОВЫХ ВОД

Л. А. Галин, З. Ф. Карпычева, А. Р. Шкирич

(Москва)

Рассматривается одна неустановившаяся задача теории фильтрации, — растекание так называемой линзы, в которой находятся пресные грунтовые воды, причем линза расположена на поверхности грунтовых вод более высокой плотности (фиг. 1).

Приводятся решения плоской и осесимметричной задач; делаются следующие предположения: коэффициент фильтрации k в обеих областях одинаков; плотность пресной воды равна ρ_0 ; плотность засоленной воды ρ_1 , причем $\rho_0 < \rho_1$.

Будем полагать, что в случае плоской задачи скорость фильтрации в линзе в направлении оси x значительно превосходит скорость фильтрации в направлении оси y , т. е. $v_x^{(0)} \gg v_y^{(0)}$; в случае осесимметричной задачи $v_r^{(0)} \gg v_z^{(0)}$.

Кроме того, скорости фильтрации в подстилающей области, занятой грунтовыми водами более высокой плотности, на поверхности которой находится линза, будут значительно меньше, чем скорость движения в линзе. Таким образом, имеем:

В случае плоской задачи

$$v_x^{(0)} \gg v_x^{(1)}, \quad v_y^{(0)} \gg v_y^{(1)}$$

Для осесимметричной задачи

$$v_r^{(0)} \gg v_r^{(1)}, \quad v_z^{(0)} \gg v_z^{(1)}$$

На основании этого может быть сделано заключение, что потенциал скоростей в линзе ϕ_0 будет функцией только x (или r), а потенциал скоростей в подстилающей области, занятой грунтовыми водами, равен нулю.

В этом случае, когда $\phi_1 = 0$, выполняется равенство скоростей нулю, т. е.

$$v_x^{(1)} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = 0, \quad v_y^{(1)} = \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = 0$$

При таких предположениях не учитывается изменение уровня грунтовых вод в подстилающем слое, происходящее при образовании над ним линзы, и влияние этого обстоятельства на растекание линзы. Кроме того, предполагается, что грунтовая вода одной плотности полностью вытесняет грунтовую воду другой плотности.

Из приведенных предположений вытекает:

в области I , на внешней границе, где она граничит с внешней средой (в точке C)

$$p = 0, \quad y = h(x) \tag{1}$$

Следовательно, в силу того, что

$$\phi_0 = -k \left(\frac{p}{\rho_0 g} + y \right) \tag{2}$$

имеем

$$\phi_0 = -kh(x) \tag{3}$$

Определим условия на границе областей I и II . В области II потенциал $\phi = 0$; кроме того, сделаем предположение о том, что уравнение линии, разделяющей области I и II , будет иметь вид

$$y = -\alpha h(x) \tag{4}$$

Тогда условия на границе между областями I и II

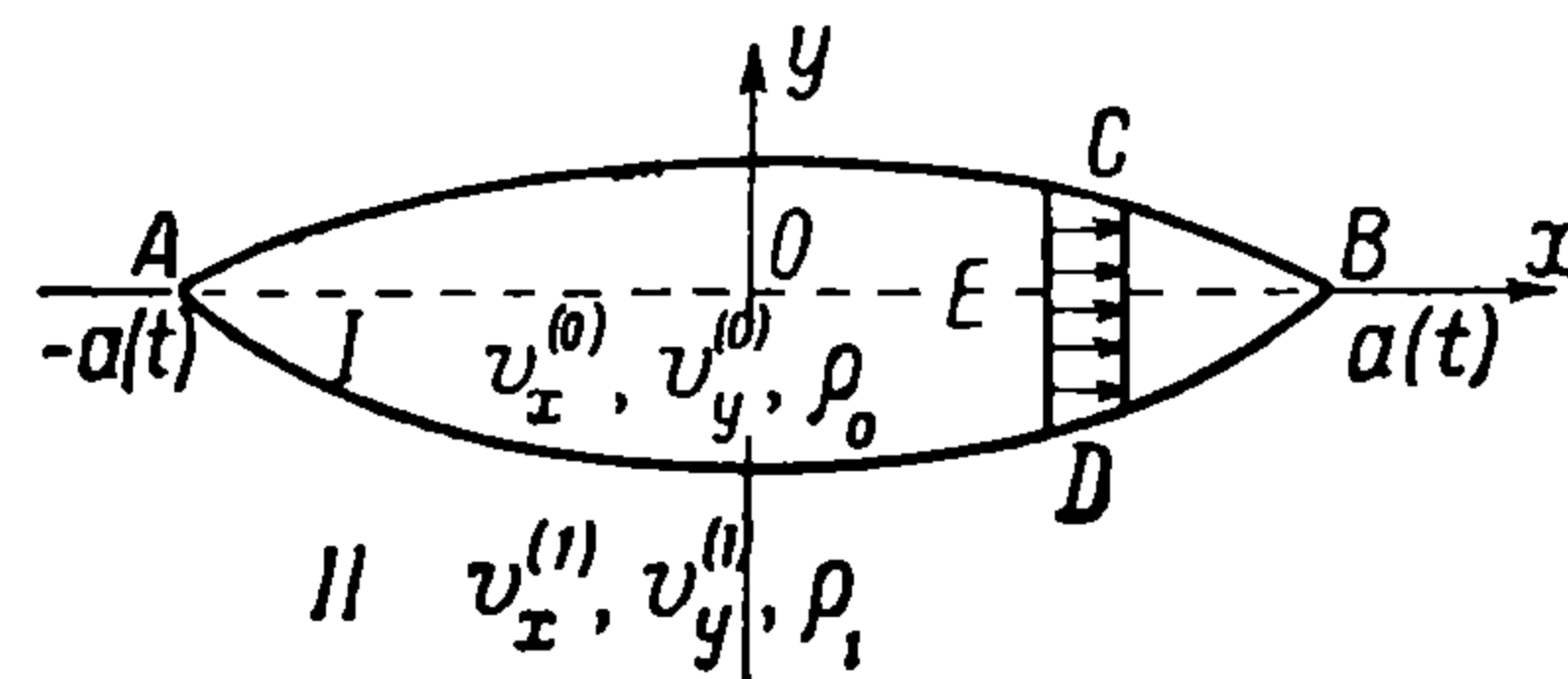
$$\phi = -kh(x), \quad y = -\alpha h(x) \tag{5}$$

Давление в точке D , расположенной на этой границе, определим из условия, что $\phi_1 = 0$. Из выражения, аналогичного (2), полагая $\phi_1 = 0$, находим

$$-k \left\{ \frac{p}{\rho_1 g} + [-\alpha h(x)] \right\} = 0, \quad \text{или} \quad p = \rho_1 g \alpha h(x) \tag{6}$$

Так как давление при переходе через линию $A DB$ меняется непрерывно, то в силу (2) в точке D будем иметь

$$-kh(x) = -k \left[\frac{\rho_1 g \alpha h(x)}{\rho_0 g} - \alpha h(x) \right], \quad \text{или} \quad \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} - 1 \right) \alpha = 1 \tag{7}$$



Фиг. 1

Следовательно, предположение относительно границы между областями I и II будет выполнено, если

$$\alpha = \frac{\rho_0}{\rho_1 - \rho_0} \quad (8)$$

При этом во время растекания линзы отношение отрезка ED к отрезку EC всегда остается постоянным.

Таким образом, жидкость, первоначально находящаяся выше оси x , движется всегда выше этой оси. Предположение о том, что $\varphi = -kh(x)$, приводит к тому, что $v_x = \partial\varphi / \partial x = -kh'(x)$. При этом скорость v_x^y не зависит от координаты y , т. е. постоянна вдоль вертикального отрезка.

Пусть в начальный момент времени линза имеет форму, изображенную на фиг. 1. Уравнения линий ACB и ADB будут соответственно

$$y = h(x), \quad y = -\alpha h(x)$$

Общее количество воды, заключенной в линзе, будет (m — пористость среды).

$$Q = m \left[\int_{-a}^{+a} h(x) dx + \alpha \int_{-a}^{+a} h(x) dx \right] = \frac{m\rho_1}{\rho_1 - \rho_0} \int_{-a}^{+a} h(x) dx \quad (9)$$

Для исследования движения линзы достаточно рассмотреть растекание некоторой области, занятой грунтовыми водами, по непроницаемому дну.

Эта область (фиг. 2) будет соответствовать части грунтовых вод, находящейся выше оси абсцисс. Будем полагать, что при

$$t = 0 \quad h(x) = h_0(x) \quad (-a_0 < x < a_0)$$

Как известно, функция $h(x, t)$ удовлетворяет уравнению Буссинеска [1]. Для одномерного и осесимметричного случаев будем иметь соответственно

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{2m} \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) h^2$$

Дадим решение задачи о растекании линзы грунтовых вод для того случая, когда количество жидкости в ней остается постоянным. Рассмотрим одномерную задачу. Первое уравнение (10) в безразмерных переменных имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u^2}{\partial \xi^2} \quad \left(u = \frac{h}{h_0}, \quad \xi = \frac{x}{a_0} \right), \quad \tau = \frac{kh_0}{2ma_0^2} t \quad (11)$$

$$u(\xi, \tau) = u_0(\xi) \quad \text{при } \tau = 0$$

При этом функция $u_0(\xi)$ задается на отрезке $-1 < \xi < 1$; вне этого отрезка она равна нулю. Можно, очевидно, сделать вывод, что искомое решение будет стремиться к тому решению, которое будет иметь место для начальных условий типа импульса. Эта задача была рассмотрена в работе Г. И. Баренблатта [2]. В настоящей статье указанные результаты получены другим методом, причем исправлены некоторые неточности, содержащиеся в [2].

Будем искать функцию $u(\xi)$, для которой имеем начальные значения

$$u_0(\xi) = 1 - \xi^2 \quad \text{при } \tau = 0 \quad (-1 < \xi < 1) \quad (12)$$

В процессе движения будем иметь

$$u = \beta(\tau) [\alpha^2(\tau) - \xi^2] \quad (13)$$

Так как количество жидкости в линзе остается постоянным, то отсюда

$$2 \int_0^1 (1 - \xi^2) d\xi = 2 \int_0^{\alpha(\tau)} \beta(\tau) [\alpha^2(\tau) - \xi^2] d\xi = \frac{4}{3} \beta(\tau) \alpha^3(\tau)$$

Так как рассматриваемый интеграл должен сохранять постоянное значение, то

$$\beta(\tau) \alpha^3(\tau) = 1, \quad \text{или} \quad \beta(\tau) = \frac{1}{\alpha^3(\tau)} \quad (14)$$

Согласно (13) имеем

$$u(\xi, \tau) = \frac{1}{\alpha^3(\tau)} [\alpha^2(\tau) - \xi^2] = \frac{1}{\alpha(\tau)} - \frac{\xi^2}{\alpha^3(\tau)} \quad (15)$$

Подставляя полученное выражение в исходное уравнение (11), найдем

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u^2}{\partial \xi^2} = [4 - \alpha^2(\tau) \alpha'(\tau)] \left[\frac{1}{\alpha^4(\tau)} - \frac{3}{\alpha^6(\tau)} \xi^2 \right] = 0$$

Отсюда

$$4 - \alpha^2(\tau) \alpha'(\tau) = 0, \quad \text{или} \quad \alpha(\tau) = (C + 12\tau)^{\frac{1}{3}}$$

Так как $\alpha(\tau) = 1$ при $\tau = 0$, то

$$\alpha(\tau) = (1 + 12\tau)^{\frac{1}{3}}$$

На основании (15) имеем

$$u(\xi, \tau) = \frac{1}{1 + 12\tau} \left[(1 + 12\tau)^{\frac{2}{3}} - \xi^2 \right] \quad (16)$$

Вводя прежние переменные, находим следующее выражение для кривой, ограничивающей верхнюю часть линзы:

$$h(x, t) = \frac{h_0}{1 + (6kh_0 / ma_0^2) t} \left[\left(1 + \frac{6kh_0}{ma_0^2} t \right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{x}{a_0} \right)^2 \right] \quad (17)$$

Уравнение кривой, ограничивающей нижнюю часть линзы, на основании (4)

$$h_1(x, t) = - \frac{\rho_0}{\rho_1 - \rho_0} h(x, t) \quad (18)$$

Координата крайней точки линзы, расположенной на оси абсцисс

$$a(t) = a_0 \left(1 + \frac{6kh_0}{ma_0^2} t \right)^{\frac{1}{3}} \quad (19)$$

Рассмотрим теперь осесимметричный случай (фиг. 3). Исходное дифференциальное уравнение в полярных координатах будет (10)

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) u^2, \quad \eta = \frac{r}{a_0} \quad (20)$$

При $\tau = 0$ имеем начальное условие $u_0 = 1 - \eta^2$ для интервала $-1 < \eta < +1$. Будем полагать

$$u(\eta, \tau) = \beta(\tau) [\alpha^2(\tau) - \eta^2]$$

Сохранение объема жидкости приводит к равенствам

$$\int_0^1 (1 - \eta^2) 2\pi\eta d\eta = \beta(\tau) \int_0^{\alpha(\tau)} [\alpha^2(\tau) \eta - \eta^3] 2\pi\eta d\eta, \quad \beta(\tau) \alpha^4(\tau) = 1$$

отсюда $\beta(\tau) = \alpha^{-4}(\tau)$; следовательно,

$$u(\eta, \tau) = \frac{1}{\alpha^4(\tau)} - \frac{\eta^2}{\alpha^2(\tau)} \quad (21)$$

Подставляя это выражение в уравнение (20), получим

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) u^2 = [-4\alpha^3(\tau) + 16] \left[\frac{1}{2\alpha^6(\tau)} - \frac{\eta^2}{\alpha^8(\tau)} \right] = 0$$

Равенство будет удовлетворено, если

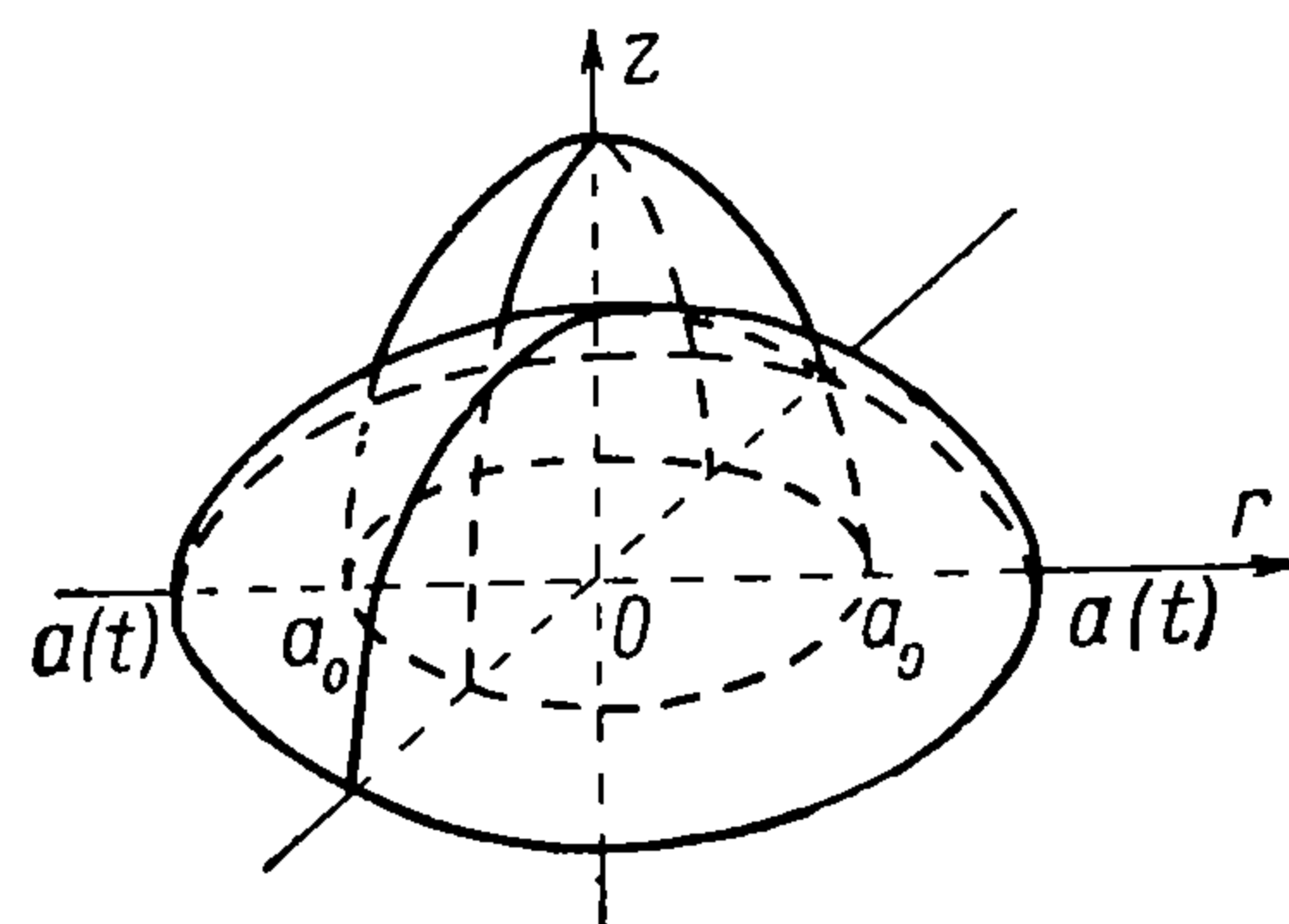
$$- \alpha^3(\tau) \alpha'(\tau) + 14 = 0, \quad \alpha^4(\tau) = 16\tau + C \quad (22)$$

Принимая во внимание начальное условие $\alpha(\tau) = 1$, при $\tau = 0$ получим

$$\alpha(\tau) = (1 + 16\tau)^{\frac{1}{4}}$$

Следовательно,

$$u(\tau, \eta) = \frac{1}{1 + 16\tau} \left[(1 + 16\tau)^{\frac{1}{2}} - \eta^2 \right]$$



Фиг. 3

Переходя к прежним переменным, найдем уравнение поверхности, ограничивающей верхнюю часть линзы,

$$h(t, r) = \frac{h_0}{1 + (8kh_0/ma_0^2)t} \left[\left(1 + \frac{8kh_0}{ma_0^2}t \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{r}{a_0} \right)^2 \right] \quad (23)$$

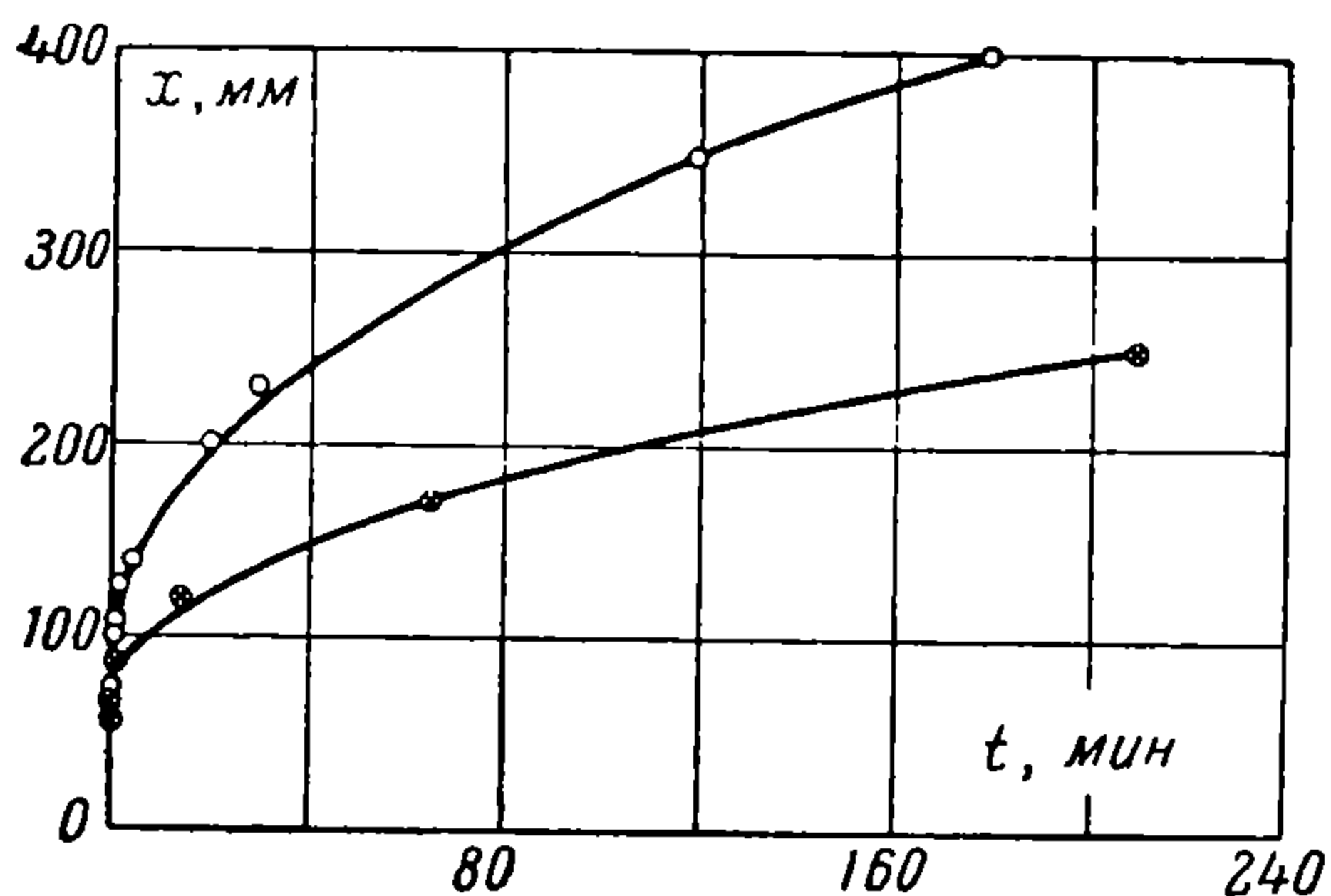
Уравнение поверхности, которая ограничивает нижнюю часть линзы, примет вид

$$h_1(t, r) = -\frac{\rho_0}{\rho_1 - \rho_0} h(t, r) \quad (24)$$

Координата крайней точки линзы будет

$$a(t) = a_0 \left(1 + \frac{8kh_0}{ma_0^2}t \right)^{\frac{1}{4}} \quad (25)$$

Для проверки полученных результатов были проведены опыты на целевом лотке ($l = 1250$ мм, $b = 1.5$ мм, $a = 100$ мм).



Фиг. 4

Более плотная жидкость ($\rho_1 = 1.225$) имитировалась в первом опыте смесью глицерина с подсоленной водой из расчета 75 см³ глицерина на 25 см³ подсоленной воды; подсоленная вода получалась путем растворения 30 г поваренной соли в 100 м³ пресной воды.

Во втором опыте более плотная жидкость ($\rho_1 = 1.27$) имитировалась подсоленным глицерином из расчета 100 см³ глицерина на 10 г поваренной соли.

Менее плотная жидкость ($\rho_0 = 1.18$) в первом опыте имитировалась подкрашенным водным раствором глицерина из расчета 25 см³ пресной воды на 75 см³ глицерина. Во втором опыте менее плотная жидкость ($\rho_0 = 1.23$) имитировалась подкрашенным глицерином.

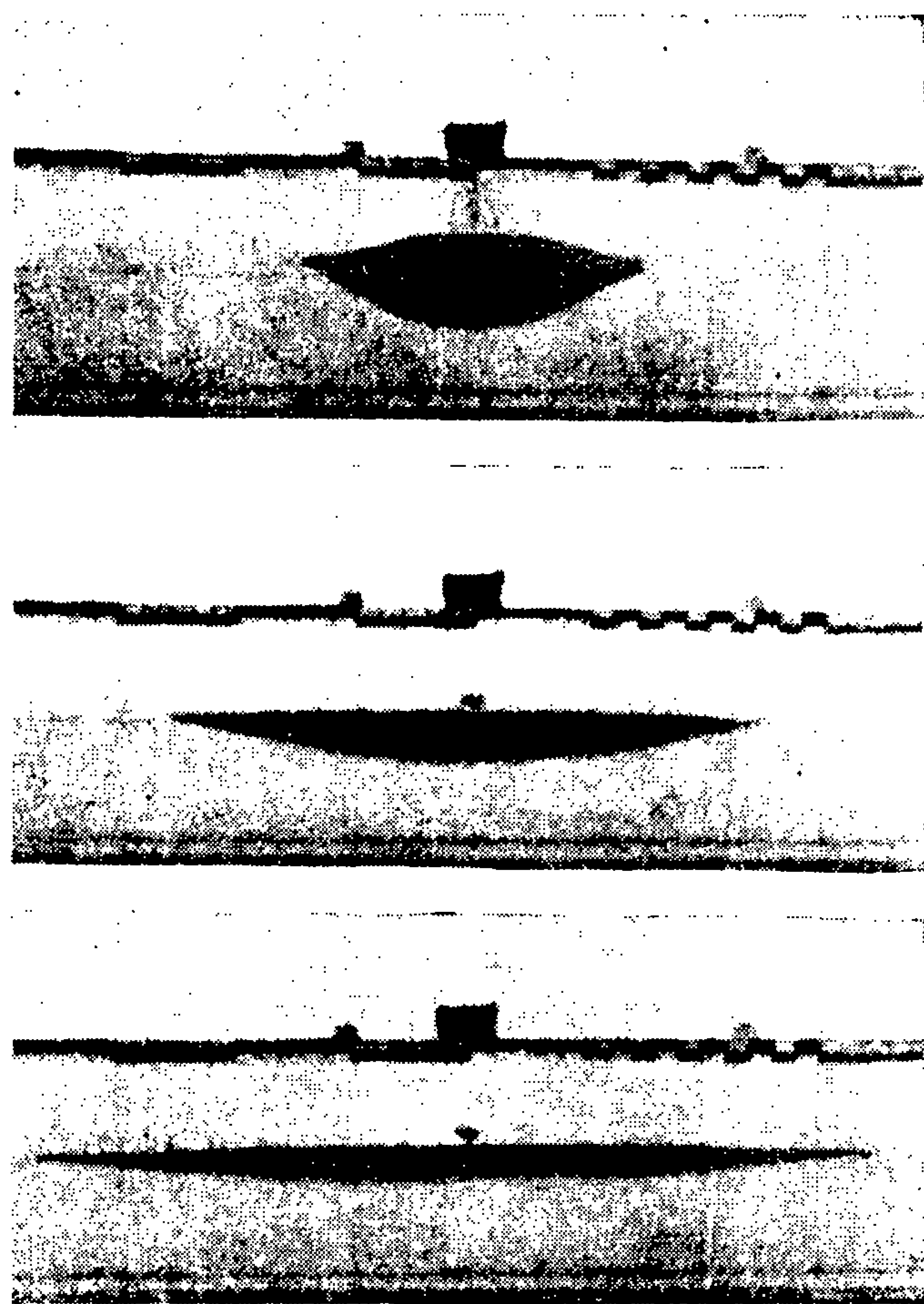
Более плотная жидкость, по объему около 100 см³, заливалась в целевой лоток. После того как поверхность ее принимала горизонтальное положение, сверху заливалось некоторое количество (от 6 до 2 см³) менее плотной жидкости.

Были обработаны опытные данные для двух опытов, причем установлен закон перемещения края линзы.

На фиг. 4 приведены результаты вычислений по формуле (19): верхняя кривая соответствует значениям $\rho_0/\rho_1 = 0.964$, нижняя — значениям $\rho_0/\rho_1 = 0.969$; точками даны результаты экспериментов. Совпадение в обоих случаях позволяет заключить, что исходные предположения, положенные в основу решения задачи, оправдываются.

На фиг. 5 приведены фотографии трех последовательных форм линзы, которые качественно хорошо подтверждают результаты вычислений.

Поступила 13 II 1960



Фиг. 5

ЛИТЕРАТУРА

1. П о л у б а р и н о в а - К о ч и н а, П. Я. Теория движения грунтовых вод, Гостехтеориздат, 1952.
2. Б а р е н б л а т т Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. ИММ, 1952, том XVI, вып. 1.