ОБ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЯХ В ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

А. М. Пирвердян (Баку)

Уравнение плоской изотермической фильтрации газа имеет вид [1]

$$\partial p \,/\, \partial t = a^2 \, \partial^2 p^2 \,/\, \partial x^2 \tag{1}$$

Для этого уравнения был найден ряд автомодельных решений и, в частности, решение вида $\exp(\alpha x_2) f(x_1 \exp(\beta x_2))$, где x_1 и x_2 — независимые переменные [2]. Последнее решение было получено на основе специальной группы непрерывных инвариантных преобразований $x_i + \xi_i \, (i = 1, 2)$, помимо преобразований подобия.

Ниже дается вывод указанных автомодельных решений, основанный только на представлениях теории подобия (без преобразований вида $x_i + \xi_i$).

Рассмотрим вначале случай, когда для уравнения (1) задаются условия в виде [2]

$$p(x, -\infty) \equiv 0, \qquad p(0, t) = p_0 e^{\sigma t} \tag{2}$$

Введем переменную $u = p_0 e^{\sigma t}$, уравнение (1) и краевые условия (2) примут вид

$$u \frac{\partial p}{\partial u} = \left(\frac{a^2}{\sigma}\right) \frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2}, \qquad p(x, 0) \equiv 0, \qquad p(0, u) = u \tag{3}$$

Из уравнения и краевых условий (3) следует, что давление p зависит от трех величин $x, u, a^2 / \sigma$, размерность которых следующая:

$$[x] = L, \qquad [u] = [p], \qquad \left[\frac{a^2}{\sigma}\right] = [p]^{-1} L^2 \tag{4}$$

Согласно П-теореме [3] имеем $p = u f_1 (a^2 u / \sigma x)$ или, в прежних переменных

$$p = p_0 e^{\sigma t} f \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 p_0 e^{\sigma t} \sigma^{-1}}} \right) \tag{5}$$

что совпадает с результатом [2], полученным другим путем. Аналогично получается решение, когда начальное распределение давления задается в виде

$$p(x, 0) = p_0 e^{\beta x} \tag{6}$$

Введем переменную $v = p_0 e^{\beta x}$; уравнение (1) и условие (6) примут вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a^2 \beta^2 v^2 \frac{\partial^2 p^2}{\partial v^2}, \qquad p(v, 0) = v \tag{7}$$

Три независимые величины v, t и $(a\beta)^2$ имеют размерность

$$[v] = [p], \qquad [t] = T, \qquad [(a\beta)^2] = [p]^{-1} T^{-1} \tag{8}$$

Отсюда анализ размерностей дает

$$p = v f(a^2 \beta^2 v t), \qquad \text{или} \qquad p = p_0 e^{\beta x} f(a^2 \beta^2 p_0 e^{\beta x} t) \tag{9}$$

что также совпадает с одним из результатов работы [2]. Для более общего уравнения фильтрации политропного газа в пористой среде (10)

$$\frac{\partial P}{\partial t} = b^2 \frac{\partial^2 P^n}{\partial x^2} \qquad \text{при } P(x, -\infty) \equiv 0, \ P(0, t) = P_0 e^{\sigma t}; \quad \text{или} \quad \text{при } P(x, 0) = P_0 e^{\beta x}$$

при помощи замен соответственно $u = P_0 e^{\sigma t}$ или $u = P_0 e^{\beta x}$ получим решения

$$P = P_0 e^{\sigma t} f \left(\frac{x}{\sqrt{b^2 P_0^{\,n-1} e^{(n-1)\sigma t} \sigma^{-1}}} \right) \quad \text{или} \quad P = P_0 e^{\beta x} f(b^2 \beta^2 P_0^{\,n-1} e^{(n-1)\beta x} t) \tag{11}$$

Из приведенных примеров вытекает, что для решения задачи новые переменные выбираются так, чтобы условия (3) и (7) не содержали размерных постоянных.

Поступила 10 III 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. ГИТТЛ, М.— Л., 1947.
2. Баренблатт Г. И. О предельных автомодельных движениях в теории нестационарной фильтрации газа в пористой среде и теории пограничного слоя. ПММ, 1954, т. XVIII, вып. 4.
3. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. ГИТТЛ, 1954.