О НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЯХ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ У НАКЛОННОГО БЕРЕГА

Б. Н. Румянцев (Москва)

Волны на поверхности бесконечно глубокой жидкости, а также жидкости конечной постоянной глубины, исследовались во многих работах. При этом для решения задач применялись большей частью преобразования Фурье.

Отметим, что в работах [1,2] исследовались системы стоячих волн у берегов различного наклона. В работе М. В. Келдыша [3] при помощи интегрирования по параметру решения задачи о стоячих волнах и построения формулы обращения получено решение нестационарной задачи для берега с углом наклона 45°.

Ниже рассматривается в аналогичной постановке линейная задача о неустановившихся движениях несжимаемой жидкости у наклонного берега. При помощи обобщенных преобразований Фурье получена более простая формула обращения. В качестве примера рассмотрена задача о волнах Коши—Пуассона у берега с углом наклона 45° и с малым наклоном в приближении мелкой воды.

1. Рассмотрим плоский случай. Пусть жидкость ограничена свободной поверхностью, совпадающей с осью x, и твердой стенкой, составляющей с ней угол β. Будем считать, что движение начинается из состояния покоя, поэтому существует потенциал скорости $\varphi(x, y; t)$, удовлетворяющий в области течения уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \tag{1.1}$$

На свободной поверхности φ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{1}{\rho g}\frac{\partial f_0(x, 0; t)}{\partial t} \qquad \text{при } y=0 \tag{1.2}$$

где f_0— известная функция, описывающая распределение давления по поверхности для различных моментов времени. На твердой границе должно выполняться условие непротекания

$$\partial\varphi/\partial n=0 \tag{1.3}$$

где n — направление нормали к твердой стенке. Функция φ может удовлетворять начальным условиям

$$\varphi(x, 0; 0)=\frac{1}{\rho}F(x), \qquad \frac{\partial\varphi(x, 0; 0)}{\partial t}=gf(x) \tag{1.4}$$

2. В дальнейшем будем рассматривать только задачу о волнах Коши—Пуассона с начальными условиями (1.4) и примем, что при $t>0$ на жидкость не действуют никакие внешние силы давления ($f_0\equiv 0$ в выражении (1.2)). Как известно из общей теории, задачу достаточно решить для случая $f(x)\equiv 0$. Будем искать решение уравнения (1.1) в следующем виде:

$$\varphi(x, y; t)=\int_0^\infty F_1(m)\cos\sqrt{mg}\,t\,\Phi(x, y; m)\,dm \tag{2.1}$$

где $F_1(m)$ — неизвестная функция, $\Phi(x, y; m)$ — функция, гармоническая внутри угла β, удовлетворяющая условиям

$$\Phi_y-m\Phi=0 \text{ при } y=0,\ x>0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial n}=0 \text{ на твердой границе} \tag{2.2}$$

Задача об отыскании функции $\Phi(x, y; m)$ при условиях (2.2) решена для углов $\beta=\pi/2n$, где n — целое число [2]. При $n=2$ это решение имеет вид

$$\Phi(x, y; m)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\operatorname{Re}\left[e^{1/_4 i\pi}e^{-m(x+iy)}+e^{-1/_4 i\pi}e^{-im(x+iy)}\right] \tag{2.3}$$

Будем выбирать функцию $F_1(m)$ так, чтобы $\varphi(x, y; t)$, определенная по формуле (2.1), удовлетворяла начальному условию (1.4). Подставив (2.1) в (1.4), получаем

$$\frac{1}{\rho}F(x)=\int_0^\infty F_1(m)\,\Phi(x, 0; m)\,dm \tag{2.4}$$

Таким образом, для определения функции $F_1(m)$ получилось интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода с ядром $\Phi(x, 0; m)$. Его решение при произвольном n имеет сложный вид [4], поэтому ограничимся рассмотрением случая $n=2$, т. е. угла наклона берега, равного 45° (при $n=1$ (2.4) превращается в обычное преобразование Фурье и задача сводится к отражению волн от вертикального берега или к задаче о волнах Коши—Пуассона на поверхности бесконечно глубокой жидкости) При этом (2.4) имеет вид

$$\frac{1}{\rho} F(x) = \frac{\pi}{2} A \int_0^\infty F_1(m)(e^{-mx} + \cos mx - \sin mx)\, dm \qquad (2.5)$$

где A — неопределенная пока константа.

Покажем, что ядро уравнения (2.5) есть ядро Фурье. Для этого достаточно [4] установить, что оно удовлетворяет функциональному уравнению

$$K(s) K(1-s) = 0 \qquad \left(K(s) = \int_0^\infty \varphi(x)\, x^{s-1} dx\right) \qquad (2.6)$$

Здесь K — преобразование Меллина функции $\varphi(x)$. Подставляя выражение $\varphi(x) = {}^1/_2\pi\, A(e^{-x} + \cos x - \sin x)$ в (2.6), убеждаемся, что это уравнение выполняется при значении константы $A = 2/\pi \sqrt{\pi}$. Следовательно, при этом выражение (2.5) представляет собой обобщенное преобразование Фурье, и его обращение имеет симметричный вид

$$F_1(m) = \frac{1}{\rho\sqrt{\pi}} \int_0^\infty F(x)(e^{-mx} + \cos mx - \sin mx)\, dx \qquad (2.7)$$

Подставляя (2.7) в (2.1), получаем решение задачи о волнах Коши — Пуассона (для угла $\beta = 45°$)

$$\varphi(x, y; t) = \frac{1}{\pi\rho} \int_0^\infty \cos \sqrt{mg}\, t\, [e^{-mx}(\cos my + \sin my) + e^{my}(\cos mx - \sin mx)] \times$$

$$\times \int_0^\infty (e^{-mx} + \cos mx - \sin mx)\, F(x)\, dx dm \qquad (2.8)$$

3. Перейдем к рассмотрению частных случаев. Пусть $F(x) = J\delta(x)$, где $\delta(x)$ — δ — функция Дирака. Это соответствует мгновенному импульсу величины J, приложенному в окрестности начала координат. Формула (2.8) при этом приобретает вид

$$\varphi(x, y; t) = \frac{2J}{\pi\rho} \int_0^\infty \cos \sqrt{mg}\, t\, [e^{-mx}(\cos my + \sin my) + e^{my}(\cos mx - \sin mx)]\, dm \qquad (3.1)$$

Умножая (3.1) на $1/g$, дифференцируя по t и полагая $y = 0$, получаем возвышение свободной поверхности η

$$\eta(x, t) = -\frac{2J}{\pi\rho g} \int_0^\infty \sqrt{mg} \sin \sqrt{mg}\, t (e^{-mx} + \cos mx - \sin mx) dm \qquad (3.2)$$

Путем таких же рассуждений легко получить решение, соответствующее начальному возвышению свободной поверхности, сосредоточенному вблизи начала координат. Обозначая через Q объем жидкости, заключенный между профилем начального возвышения и осью x, получаем выражения для φ и η (3.3)

$$\varphi(x, y; t) = \frac{2Q\sqrt{g}}{\pi} \int_0^\infty \sin \sqrt{mg}\, t\, [e^{-mx}(\cos my + \sin my) + e^{my}(\cos mx - \sin mx)] \frac{dm}{\sqrt{m}}$$

$$\eta(x, t) = \frac{2Q}{\pi} \int_0^\infty \cos \sqrt{mg}\, t (e^{-mx} + \cos mx - \sin mx) dm \qquad (3.4)$$

Полученные интегралы не берутся в элементарных функциях. Вычислим значения (3.4) при больших расстояниях от начала координат. Разлагая подынтегральное выражение в ряд и проводя интегрирование, получаем

$$\eta(x, t) = \frac{4Q}{\pi x}\left(\frac{\omega}{1!!} - \frac{\omega^2}{3!} + \frac{\omega^5}{9!!} - \frac{\omega^6}{11!!} + \frac{\omega^9}{17!!} - \frac{\omega^{10}}{19!!} + \ldots\right) \tag{3.5}$$

где $\omega = gt^2/2x$. Для получения формулы, описывающей форму поверхности для случая начального импульса, нужно вычислить интеграл (3.1) или (3.2). Однако легко видеть, что ее можно получить и непосредственно, если продифференцировать (3.5) по t и помножить полученное выражение на $J/Q\rho g$. Степенной ряд (3.5) хорошо сходится только для малых значений ω. Можно получить асимптотическое выражение для η при больших ω. Оценивая интегралы по методу стационарной фазы, находим

$$\eta = \frac{2Q}{x\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left[\cos\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

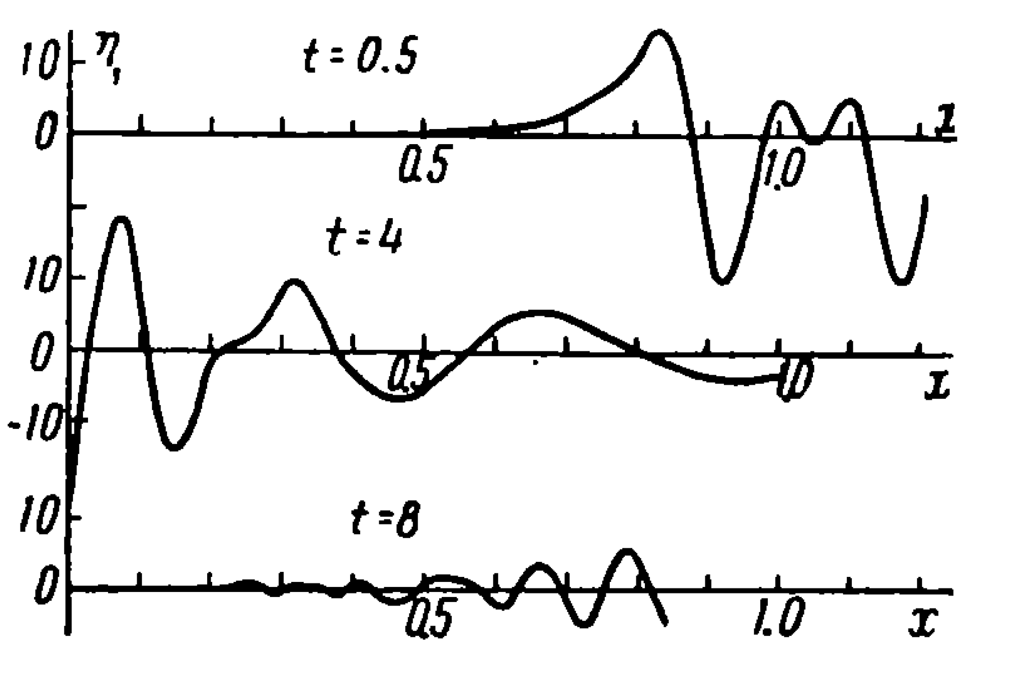
4. Рассмотрим задачу о волнах Коши — Пуассона, возникших от начального возвышения поверхности, расположенного на расстоянии x_1 от начала координат, При этом

$$F(x) = Q\delta(x - x_1)$$

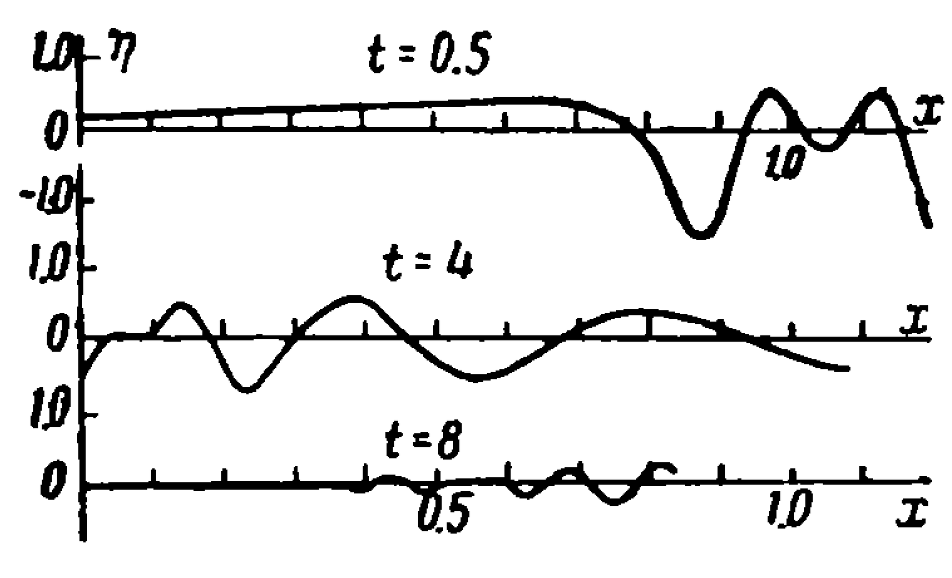
Воспользовавшись формулой (2.8), получаем выражение для $\eta(x, t)$

$$\eta(x, t) = \frac{2Q}{\pi}\int_0^\infty \cos\sqrt{mg}\,t\,(e^{-mx} + \cos mx - \sin mx)(e^{-mx_1} + \cos mx_1 - \sin mx_1)\,dm \tag{4.1}$$

Аналогичная формула получается для случая начального импульса величины J, приложенного в точке $(x_1, 0)$. Интеграл в (4.1) сходится очень медленно, поэтому для расчетов по этой формуле необходимо применять вычислительные машины.



Фиг. 1



Фиг. 2

Чтобы получить представление о явлении возникновения волн и их отражении от наклонного берега, был произведен расчет на счетной машине «Стрела» при помощи формулы (4.1) при значениях $g = 9.81$ *м/сек*^{2} и при $t = 0.5$; 4 и 8 сек. Начальное возвышение было задано в виде ступенчатой функции, равной нулю при $x < 1$ *м* и при $x > 1.1$ *м* и равной единице при 1 *м* $< x <$ 1.1 *м*.

Результаты расчета представлены в виде графиков на фиг. 1, где $\eta_1 = \pi\eta/2Q$. Аналогичный расчет был проделан для случая начального импульса такой же формы при тех же значениях параметров. Соответствующие графики построены на фиг. 2, где $\eta_1 = \pi\rho g\eta/2J$.

Получим асимптотическое выражение для (4.1) при больших значениях величины gt^2 и при $x < x_1$. Применяя метод стационарной фазы, находим

$$\begin{aligned}\eta^*(x, t) = Q\sqrt{\frac{g}{\pi}}\,t\,\Bigg\{&\frac{1}{\sqrt{(x_1 - x)^3}}\cos\frac{1}{4}\left(\frac{gt^2}{x_1 - x} - \pi\right) + \frac{1}{\sqrt{(x_1 + x)^3}}\sin\frac{1}{4}\left(\frac{gt^2}{x_1 + x} - \pi\right) + \\ &+ \frac{1}{x^{3/2}}\exp\left(-\frac{gt^2x_1}{4x^2}\right)\left[\cos\frac{1}{4}\left(\frac{gt^2}{x} - \pi\right) - \sin\frac{1}{4}\left(\frac{gt^2}{x} - \pi\right)\right] + \\ &+ \frac{1}{x_1^{3/2}}\exp\left(-\frac{gt^2x}{4x_1^2}\right)\left[\cos\frac{1}{4}\left(\frac{gt^2}{x_1} - \pi\right) - \sin\frac{1}{4}\left(\frac{gt^2}{x_1} - \pi\right)\right]\Bigg\}\end{aligned} \tag{4.2}$$

5. Если угол наклона берега мал ($< 6°$ согласно [2]), то для не очень больших расстояний от начала координат можно пользоваться теорией мелкой воды. В работе [2] получена соответствующая система стоячих волн

$$\varphi(x, 0; t) = A \cos \sqrt{mg}\, t J_0 (2 \sqrt{mx/q}) \tag{5.1}$$

где q — угол наклона берега, J_0 — функция Бесселя нулевого порядка. Построим более общее решение, умножая (5.1) на произвольную функцию $F_1(\sqrt{m})$ и интегрируя по m от 0 до ∞

$$\varphi(x, 0; t) = \int_0^\infty \cos \sqrt{mg\, t}\, J_0 (2 \sqrt{mx/q})\, F_1 (\sqrt{m})\, dm \tag{5.2}$$

Полагая в (5.2) $t = 0$, производя замену переменных $\sqrt{m} = \sigma$ и используя начальное условие (1.4), получаем интегральное уравнение для определения $F_1(\sigma)$

$$\frac{1}{\rho} F(x) = 2 \int_0^\infty F_1(\sigma) J_0 \left(2\sigma \sqrt{\frac{x}{q}} \right) \sigma d\sigma$$

Как видим, $F(x)$ является преобразованием Ханкеля нулевого порядка функции $F_1(\sigma)$. Используя формулу обращения и подставляя в (5.2), получаем

$$\varphi(x, 0; t) = \frac{1}{\rho q} \int_0^\infty \cos \sigma \sqrt{g}\, t J_0 \left(2\sigma \sqrt{\frac{x}{q}} \right) \sigma d\sigma \int_0^\infty F(x) J_0 \left(2\sigma \sqrt{\frac{x}{q}} \right) \sqrt{x}\, d\sqrt{x} \tag{5.3}$$

Подсчитаем поднятие свободной поверхности $\eta(x, t)$, возникшее под действием начального импульса величины J, приложенного в окрестности начала координат Из (5.3) при $F(x) = J\delta(x)$ находим

$$\eta(x, t) = -\frac{4\Gamma(^3/_2)\, J}{\sqrt{\pi g}\, \rho q\, x^{3/2}} \left(\frac{gt^2}{x} + \frac{2}{q} \right) \left(\frac{gt^2}{x} - \frac{4}{q} \right)^{-3/2} \tag{5.4}$$

Соответствующая формула для случая, когда импульс приложен на расстоянии x_1 от начала координат, имеет вид

$$\varphi(x, 0; t) = \frac{J}{\rho q} \int_0^\infty \cos \sigma \sqrt{g}\, t J_0 \left(2\sigma \sqrt{\frac{x}{q}} \right) J_0 \left(2\sigma \sqrt{\frac{x_1}{q}} \right) \sigma d\sigma \tag{5.5}$$

Легко подсчитать смещение поверхности в начале координат в зависимости от времени. Полагая в (5.5) $x = 0$, убеждаемся, что полученная формула по виду совпадает с (5.3) для рассмотренного выше случая. Следовательно, искомая зависимость дается формулой (5.4), где следует заменить x на x_1.

В заключение приношу глубокую благодарность Н. Н. Моисееву за ценные советы, а также пользуюсь случаем поблагодарить Э. П. Борисову за помощь при выполнении численных расчетов.

Поступила 26. 1. 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Lewy H. Water waves on sloping beaches. Bulleten of the American Mathematical Society, Vol. 52, 1946.
2. Stoker J. J. Surface waves in water of variable depth. Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 5, 1947, 1—54.
3. Келдыш М. В. К задаче об отражении волн на поверхности тяжелой жидкости. Техн. заметки ЦАГИ, 1935, № 52, вып. 2, 3—4.
4. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. ОГИЗ, М.— Л. 1948.