К ПРОБЛЕМЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ ВОЛНОПРОДУКТОРОМ СТОЯЧИХ ВОЛН В КАНАЛЕ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

В. С. Черкасов (Москва)

Рассматривается проблема возбуждения стоячих волн волнопродуктором в тяжелой несжимаемой жидкости в канале прямоугольного сечения. Основное внимание уделяется резонансному случаю, когда частота колебаний волнопродуктора близка к одной из собственных частот колебаний жидкости в канале. Для решения задачи используется схема, предложенная в работе [1].

1. Постановка задачи. Рассмотрим прямоугольный канал с вертикальными стенками (фиг. 1), одна из стенок которого (волнопродуктор), перемещаясь по нормали к своей плоскости, совершает гармонические колебания.

$$x = \varepsilon \sin \omega t$$

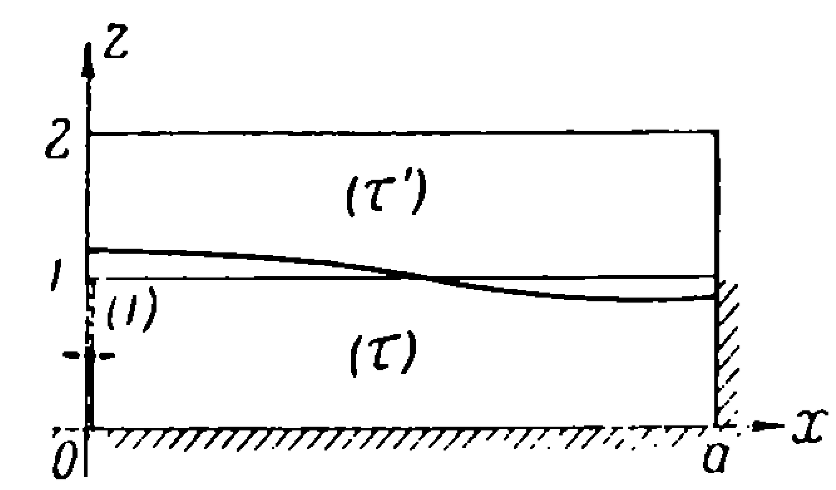
Здесь ω — частота, ε — амплитуда колебаний волнопродуктора, которая считается достаточно малой. В безразмерных переменных задача сводится к отысканию функции $\varphi(x, z, t)$ гармонической в области τ по условиям

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\bigg|_{x=\varepsilon \sin \omega t} = \varepsilon\omega \cos \omega t, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x}\bigg|_{x=a} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z}\bigg|_{z=0} = 0$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \zeta + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (\nabla\varphi \cdot \nabla\zeta) = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \qquad z = 1 + \zeta(x, t) \qquad (1.1)$$

Здесь $z = z(x, t)$ — уравнение свободной поверхности, в качестве характерного размера взята глубина h, а потенциал отнесен к $h\sqrt{gh}$.

Пусть собственные частоты соответствующей линейной задачи

$$\sigma_n = \sqrt{\lambda_n^* \operatorname{th} \lambda_n^*}, \qquad \lambda_n^* = \frac{n\pi}{a} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$



Фиг. 1

Будем отыскивать периодические решения с периодом $2\pi/\omega$, обращающиеся при $\varepsilon = 0$ в тривиальное решение задачи о свободных колебаниях.

2. Колебания вдали от резонанса ($\omega \neq \sigma_n$). Ищем решение в виде

$$\varphi = \sum_1^\infty \varepsilon^n \varphi_n, \qquad \zeta = \sum_1^\infty \varepsilon^n \zeta_n$$

Считая колебания малыми, можем записать ($z = 1$)

$$\varphi = \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\left(\varphi_2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\zeta_1\right) + \varepsilon^3\left(\varphi_3 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\zeta_2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\zeta_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2}\zeta_1^2\right) + \ldots$$

Функции φ_i и ζ_i удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \zeta_1 = 0, \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \zeta_2 = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\zeta_1\right] - \frac{1}{2}(\nabla\varphi_1)^2, \ldots \text{ при } z = 1 \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}, \qquad \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2}\zeta_1 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\frac{\partial \zeta_1}{\partial x}, \ldots \text{ при } z = 1 \qquad (2.2)$$

. . . .

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \omega \cos \omega t, \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}, \ldots \text{ при } x = 0 \qquad (2.3)$$

Из первого условия (2.1) и первого условия (2.2) получим

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t}\right)_{z=1} + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)_{z=1} = 0 \qquad (2.4)$$

Положим $\varphi_1 = \varphi_{11} \cos \omega t + \varphi_{12}$, где функция φ_{11} — гармоническая в области τ и удовлетворяет условиям

$$\left(\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x}\right)_{x=0} = \omega \qquad \left(\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x}\right)_{x=a} = 0, \qquad \left(\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial z}\right)_{z=0} = 0$$

Функция φ_{12} также гармоническая в области τ и удовлетворяет условиям

$$\left(\frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x}\right)_{x=0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x}\right)_{x=a} = 0, \qquad \left(\frac{\partial \varphi_{12}}{\partial z}\right)_{z=0} = 0$$

Чтобы построить функцию φ_{11}, дополним область (τ) областью (τ') так (фиг. 1), чтобы выполнялось условие

$$\left(\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial x}\right)_{x=0} = \delta(z)\,\omega, \qquad \delta(z) = \begin{cases} 1 & (0 \leqslant z \leqslant 1) \\ -1 & (1 < z \leqslant 2) \end{cases}$$

Положим

$$\varphi_{11} = \sum_1^\infty A_n \varphi_{11n}, \qquad \varphi_{11n} = \operatorname{ch}\frac{n\pi(x-a)}{2}\cos\frac{\pi n z}{2}$$

Разлагая $\delta(z)$ в ряд Фурье по $\cos\frac{n\pi z}{2}$, находим, что

$$A_n = \frac{8\omega}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\operatorname{csh}\frac{n\pi a}{2}$$

Из (2.4) для φ_{12} имеем

$$\left(\frac{\partial^2\varphi_{12}}{\partial t^2}\right)_{z=1} + \left(\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial z}\right)_{z=1} = \left(\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial z}\right)_{z=1}\cos\omega t$$

Положим

$$\varphi_{12} = \sum_0^\infty f_{1k}(t)\,\varphi_k^* \qquad \left(\varphi_k^* = \sqrt{\frac{2}{a}}\operatorname{ch}\frac{k\pi z}{a}\operatorname{sch}\frac{k\pi}{a}\cos\frac{k\pi x}{a}\right)$$

Здесь φ_k^* — нормированная собственная функция линейной задачи. Разлагая $\operatorname{ch}[{}^1/_2\, n\pi(x-a)]$ в ряд по косинусам, получим уравнения

$$f_{1k}'' + \sigma_k^2 f_{1k} = \frac{4\omega}{\sqrt{2a}}\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin^2\frac{n\pi}{2}\cos k\pi}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2}\cos\omega t = C_k\cos\omega t \tag{2.5}$$

Следовательно,

$$f_{1k} = \frac{C_k}{\sigma_k^2 - \omega^2}\cos\omega t$$

$$\varphi_1 = \varepsilon\varphi_{11} + \varepsilon\sum_k \frac{C_k}{\sigma_k^2-\omega^2}\varphi_k^*\cos\omega', \quad \zeta_1 = -\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)_{z=1} = \varepsilon\omega\sum_k\frac{C_k}{\sigma_k^2-\omega^2}(\varphi_k^*)_{z=1}\sin\omega t \tag{2.6}$$

Нетрудно видеть, что, повторяя эти вычисления, можно получить любое следующее приближение.

3. Случай резонанса. Решение в форме (2.5) теряет смысл, если $\omega \to \sigma_k$. Чтобы изучить характер колебаний в этом случае, будем считать «расстройку» $\sigma_k^2 - \omega^2$ малой, т. е. $\sigma_k^2 - \omega^2 = \varepsilon\mu$. Решение ищем в виде

$$\varphi = \varepsilon^{1/3}\varphi + \varepsilon^{2/3}\varphi_2 + \varepsilon\varphi_3 + \cdots$$

Для определения φ_i и ζ_i снова имеем условия (2.1) и (2.2), а также условия

$$\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right)_{x=0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right)_{x=a} = 0, \qquad \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}\right)_{z=0} = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

Полагая

$$\varphi_1 = \sum_k f_k^{(1)}(t)\,\varphi_k^*$$

найдем, что

$$\varphi_1 = \varphi_k^* A\cos\psi \qquad (\psi = \omega t + \alpha)$$

постоянные A и α подлежат определению. Аналогично определяются функции φ_2 и ζ_2; получим

$$\varphi_2 = (a^{-1/2}d_0 + d_{2k}\varphi_{2k}^*)\sin 2\psi + A_1\cos(\omega t + \alpha_1)$$

$$\zeta_2 = -2\omega\left[a^{-1/2}d_0 + d_{2k}(\varphi_k^*)_{z=1} - A^2\lambda_k\omega^2(\varphi_k^*)_{z=1}^2\right]\cos 2\psi -$$
$$- \frac{1}{2}A^2(\nabla\varphi_k^*)_{z=1}^2\cos^2\psi + A_1\omega\sin(\omega t + \alpha_1)(\varphi_k^*)_{z=1}$$

$$\left(d_0 = \frac{A^2\omega(5\lambda_k^2 + \lambda_k^{*2})}{8\sqrt{2}\lambda_k a}, \quad d_{2k} = \frac{A^2\omega(5\lambda_k^2 - 3\lambda_k^{*2})}{2\sqrt{4a}(\lambda_{2k} - 4\lambda_k)}\right)$$

Здесь A_1 и α_1 — новые неизвестные постоянные. Для третьего приближения получим условие

$$\left(\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial t^2}\right)_{z=1}+\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right)_{z=1}=L_3\,(\varphi_1,\,\varphi_2,\,\zeta_1,\,\zeta_2)$$

где

$$L_3=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\zeta_1+\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\zeta_1^2+\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\zeta_2\right]-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\varphi_1\cdot\nabla\varphi_2)-\qquad(z=1)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\zeta_1\frac{\partial}{\partial z}(\nabla\varphi_1)^2\right]-\frac{\partial\varphi_1}{\partial z^2}\zeta_2-\frac{1}{2}\frac{\partial^3\varphi_2}{\partial z^3}\zeta_1^2-\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2}\zeta_1+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\zeta_2}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial z}\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\zeta_1$$

На границе для φ_3 имеем условия

$$\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}\right)_{x=0}=\omega\cos\omega t,\qquad\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}\right)_{x=0}=0,\qquad\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right)_{z=0}=0$$

Будем искать функцию φ_3 в виде $\varphi_3=\varphi_{11}\cos\omega t\;\varphi_{32}$, где φ_{11} определена в $n2$, а φ_{32} — гармоническая в области (τ), удовлетворяющая условиям

$$\left(\frac{\partial\varphi_{32}}{\partial x}\right)_{x=0}=0,\qquad\left(\frac{\partial\varphi_{32}}{\partial x}\right)_{x=a}=0,\qquad\left(\frac{\partial\varphi_{32}}{\partial z}\right)_{z=0}=0$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial^2\varphi_{32}}{\partial t^2}\right)_{z=1}+\left(\frac{\partial\varphi_{32}}{\partial z}\right)_{z=1}=L_3+\left(\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial z}\right)_{z=1}\cos\omega t\qquad(3.1)$$

Полагая

$$\varphi_{32}=\sum_0^\infty f_n^{(3)}\varphi_n^*$$

и подставляя в (3.1), получим

$$\sum_{n=0}^\infty\left(\frac{d^2}{dt^2}f_n^{(3)}+\lambda_nf_n^{(3)}\right)(\varphi_n^*)=$$

$$=A^3P\,(a,\,k)\,(\varphi_k^*)_{z=1}(\cos\omega t\cos\alpha-\sin\omega t\sin\alpha)+\cdots+\left(\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial z}\right)_{z=1}\cos\omega t\qquad(3.2)$$

где

$$P=\left[\frac{\lambda_k}{8a\,(\lambda_{2k}-4\lambda_k)}\left(\lambda_k^2+\lambda_k\lambda_{2k}+\lambda_k^{*2}\right)(5\lambda_k^2-3\lambda_k^{*2})-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{a}\left(\lambda_k^2\lambda_k^{*2}-\frac{11}{16}\lambda_k^4+\frac{13}{16}\lambda_k^{*4}\right)\right]$$

Для существования периодических решений (3.2) необходимо и достаточно, чтобы

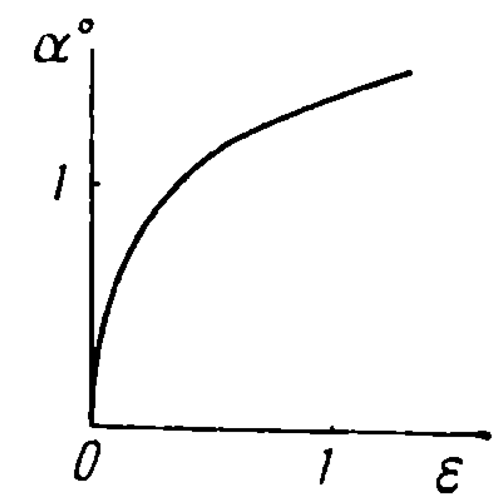
$$A^3P\cos\alpha+C_k=0,\qquad A^3P\sin\alpha=0$$

где C_k определены формулой (2.5). Отсюда

$$A=C_k^{1/3}P^{-1/3},\qquad\alpha=0$$

и

$$\varphi=\varepsilon^{1/3}\varphi_{11}\cos\omega t+\varepsilon^{1/3}C_k^{1/3}P^{-1/3}\sqrt{\frac{2}{a}}\,\mathrm{ch}\frac{k\pi z}{a}\,\mathrm{sch}\frac{k\pi}{a}\cos\frac{k\pi}{a}\cos\omega t+\cdots$$



Фиг. 2

Таким образом, получаем связь между величиной амплитуды колебаний волнопродуктора и амплитудой отыскиваемого резонансного колебания

$$a^0=\varepsilon^{1/3}\sqrt{\frac{2}{a}}\,\omega C_k^{1/3}=\omega\sqrt[3]{\varepsilon\frac{4\omega th\,k\pi/a}{k\pi a\,P}}$$

Пример. Пусть $a=5\pi$, $k=1$, тогда (фиг. 2)

$\lambda_1^*=0.2,\quad\lambda_k=0.04088,\quad\lambda_{2k}=0.15196,\quad P=0.00015,\quad\omega=0.202,\quad a^0=0.562\varepsilon^{1/2}$

Поступила 1 III 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н. Н. К теории нелинейных колебаний ограниченного объема жидкости. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 5.