АВТОМОДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ ГИПЕРЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА ВЯЗКИМ ТЕПЛОПРОВОДНЫМ ГАЗОМ

В. В. Лунев

(Москва)

Приводится пример обтекания тонкого осесимметричного тела потоком с большими сверхзвуковыми скоростями ($M \gg 1$), когда существенно влияние пограничного слоя на внешнее течение.

В работе Стюартсона [1] для пластины и в работе [2] для общего случая показано, что в этом случае область течения между поверхностью тела и скачком уплотнения делится на две, с достаточно четкой границей: вязкую, где справедливы уравнения пограничного слоя, и невязкую, течение в которой описывается уравнениями движения идеального сжимаемого газа, упрощенными на основании закона плоских сечений. Показано также, что расход массы через пограничный слой пренебрежимо мал по сравнению с общим расходом газа через возмущенную область, так что приближенно можно считать, что набегающий поток обтекает некоторое фиктивное тело, граница которого совпадает с границей пограничного слоя.

Внутри пограничного слоя возможны высокие температуры, поэтому при его рассмотрении термодинамические зависимости взяты по возможности в общем виде. Вне пограничного слоя будем считать газ совершенным с постоянным показателем адиабаты.

Уравнения гиперзвукового пограничного слоя на тонком осесимметричном теле в координатах xL, yL, где x отсчитывается от носка вдоль образующей тела, а y — от поверхности тела по нормали к ней, имеют вид [2]

$$\rho r\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-r\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial y}\left(r\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\rho r\left(u\frac{\partial i}{\partial x}+v\frac{\partial i}{\partial y}\right)=ru\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial y}\left(r\frac{\mu}{\sigma}\frac{\partial i}{\partial y}\right)+\frac{1}{R}r\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho ru)}{\partial x}+\frac{\partial(r\rho u)}{\partial y}=0 \qquad \left(R=\frac{U_\infty\rho_\infty L}{\mu_\infty}\right)$$

Здесь uU_∞, vU_∞ есть составляющие скорости по осям x и y соответственно, iU_∞^2, $p\rho_\infty U_\infty^2$, $\rho\rho_\infty$, $\mu\mu_\infty$ — энтальпия, давление, плотность и вязкость газа, σ — число Прандтля, rL — расстояние точки до оси тела. Индекс ∞ относится к одноименным размерным величинам набегающего потока. Для тонкого тела $r=r_w(x)+y$, где $r_w(x)$ — форма образующей.

Сделаем замену переменных x, y на x, r и введем затем обобщенные на осесимметричный случай переменные Дородницына

$$\xi=\frac{1}{2}\int_0^x pr_w^2dx, \qquad \eta=\int_{r_w}^r \rho r\,dr \qquad (2)$$

Тогда уравнения (1) примут вид

$$u\frac{\partial u}{\partial\xi}+v_1\frac{du}{\partial\eta}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\xi}+2\frac{M^2}{R}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(Yf\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)$$

$$u\frac{\partial i}{\partial\xi}+v_1\frac{\partial i}{\partial\eta}=\frac{u}{\rho}\frac{dp}{d\xi}+2\frac{M^2}{R}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(Y\frac{f}{\sigma}\frac{\partial i}{\partial\eta}\right)+2\frac{M^2}{R}Yf\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)^2 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial v_1}{\partial\eta}=0 \qquad \left(v_1=2\frac{u}{pr_w^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}\bigg|_r+\frac{2r(v+ur_w')}{pr_w^2},\ Y=\frac{r^2}{r_w^2},\ f=\frac{\mu\rho}{pM^2}\right)$$

Примем, что уравнение состояния имеет вид $p/\rho=F(i)$. Будем полагать также, что f и σ являются функциями лишь энтальпии [1].

Очевидно, что $f\sim 1$ и $F\sim[(\varkappa-1)/\varkappa]\,i$. Вблизи границы пограничного слоя, $r=r_\delta$, и вне его $F=[(\varkappa-1)/\varkappa]\,i$. На границе пограничного слоя $i=i_\delta\sim r_\delta^2$, внутри

[1] В действительности для диссоциированного воздуха функции f, F и σ слабо зависят от давления, но этой зависимостью будем пренебрегать.

него $i \sim 1$. Следовательно, без особой погрешности в решении в целом можно[1] принять $i_\delta \approx 0$. Ниже будет показано, что решение системы (3) в рассматриваемом случае носит асимптотический характер и что величина r_δ имеет при этом конечный предел при $\eta \to \infty$. На этом основании примем для системы (3) следующие граничные условия [2]:

$$u = 1, \qquad i = 0 \qquad \text{при } \eta \to \infty \tag{4}$$

$$u = r_1 = 0, \qquad i = i_w = \text{const} \qquad \text{или } \frac{\partial i}{\partial \eta} = 0 \qquad \text{при } \eta = 0$$

Будем искать условия, при которых решение будет иметь вид

$$u = \varphi'(\zeta), \qquad i = i(\zeta), \qquad \zeta = \frac{\sqrt{R}\eta}{2M\sqrt{\xi}} \tag{5}$$

Подставляя (5) в (3), получим, что функции $\varphi(\zeta)$ и $i(\zeta)$ должны в этом случае удовлетворять условиям (4) и системе

$$(Y f \varphi'')' + \varphi\varphi'' = 2mF(i) \qquad \left(m = \frac{\xi}{p}\frac{dp}{d\xi}\right) \tag{6}$$

$$\left(Y \frac{f}{\sigma} i'\right)' + \varphi i' + Y f \varphi''^2 = -2m\varphi' F(i) \tag{7}$$

Здесь функция Y согласно формулам (2) имеет вид

$$Y = \frac{r^2}{r_w^2} = 1 + kJ(\zeta) \qquad \left(k = \frac{4M\sqrt{\xi}}{\sqrt{R} r_w^2 p}, \; J(\zeta) = \int_0^\zeta F(i)\, d\zeta\right) \tag{8}$$

Как легко убедиться, анализируя уравнения (6) — (7), функции φ'' и i убывают при $\zeta \to \infty$ не медленней, чем $\exp(-h\zeta^2)$, где постоянная h равна значению величины $\sigma/2Yf$ на границе пограничного слоя. Следовательно, интеграл $J(\zeta)$ в формуле (8) сходится достаточно быстро, и использованное выше условие конечности величины r_δ при $\zeta \to \infty$ действительно имеет место.

Решение в виде (5) будет существовать, очевидно, в том случае, если выполняются условия

$$m = \frac{\xi}{p}\frac{dp}{d\xi} = \text{const}, \qquad k_0 = \frac{\sqrt{\xi}}{r_w^2 p} = \text{const} \tag{9}$$

Разрешая соотношения (9) и (2), получим (a и b — постоянные)

$$r_w = ax^n, \quad r_\delta = \alpha a x^n, \qquad p = bx^{1-2n} \qquad \left(n = \tfrac{1}{2} - m, \; \alpha = \sqrt{1 + kJ(\infty)}\right) \tag{10}$$

Таким образом, при произвольных значениях величин n, a и b в принятых допущениях существуют автомодельные решения уравнений осесимметричного пограничного слоя. Заметим, что при $k \ll 1$ для существования автомодельных решений достаточно одного условия $p = bx^{2m}$.

Выведем формулу для $v_0 = v + r_w' u$ — составляющей скорости в пограничном слое по оси r. В переменных x, r имеем

$$\rho r v_0 = -\frac{\partial}{\partial x}\int_{r_w}^{r} \rho u r dr = -\frac{2M}{\sqrt{R}}\frac{\partial}{\partial x}[\sqrt{\xi}\varphi] = -\frac{M}{2\sqrt{R}}\frac{p r_w^2}{\sqrt{\xi}}\varphi - \frac{2M}{\sqrt{R}}\sqrt{\xi}\varphi'\frac{\partial\zeta}{\partial x}$$

Определив производную $\partial\zeta/\partial x$ из (8), получим формулу

$$r v_0 = -\frac{2}{kp}F(i)\varphi + r_w r_w'(1 + kJ)\varphi'$$

При $\zeta \to \infty$ из этой формулы имеем $v_0 = r_\delta'$.

---

[1] Так как функции f и σ изменяются мало (обычно их принимают постоянными), то при $i_\delta \approx 0$ их можно принять постоянными, соответствующими истинным значениям.

[2] Условие $i_\delta \approx 0$ использовал Стюартсон при решении задачи о бесконечной пластине в газовом пространстве, внезапно приведенной в движение с большой сверхзвуковой скоростью [3]. Он показал, что использование этого условия не вносит существенной погрешности при определении параметров в основной части пограничного слоя и давлении на пластину.

Отсюда из условия непрерывности поля скоростей следует, что в нашей постановке граница пограничного слоя является, как уже упоминалось выше, линией тока для внешнего течения. В этом случае решение уравнений невязкой области будет, как известно, автомодельным при $r_\delta = \mathrm{const}\, x^n$ и давление на границе пограничного слоя равно $p = cr_\delta'^2$, где c зависит лишь от n. Сравнивая с (10), будем иметь

$$n = \frac{3}{4}, \qquad b = c\alpha^2 a^2 n^2 \tag{11}$$

Для $\varkappa = 1.4$ согласно работе [4] постоянная $c = 0.91$. По ньютонианской теории $c = 1$.

Таким образом, при обтекании с большими сверхзвуковыми скоростями тонких осесимметричных тел с образующей $r_w = \mathrm{const}\, x^{3/4}$ решение задачи о взаимодействии пограничного слоя с внешним потоком является автомодельным. Заметим, что в плоском случае уравнение профиля, приводящее к автомодельным решениям, будет также $r_w = \mathrm{const}\, x^{3/4}$.

Уравнения (6) — (7) в отличие от плоского случая являются интегродифференциальными. Параметр k, входящий в уравнения, определяется согласно (8) — (11) соотношением

$$k\sqrt{1 + kJ(\infty)} = \frac{8}{3\sqrt{c}}\,\frac{\chi}{M^2 a^2} \qquad \left(\chi = \frac{M^3}{\sqrt{R}}\right) \tag{12}$$

Так как величина $J(\infty)$ зависит от k, то уравнения (6) — (7), вообще говоря, должны решаться совместно с (12). Если в уравнениях (6) — (7) положить $j = \mathrm{const}\,(i)^k$, $\sigma = \mathrm{const}$ и $F = [x/(x-1)]\, i$, то согласно (12) решение задачи в рассматриваемом случае в соответствии с законом подобия [2]. определится лишь параметрами χ и Ma,

При малых x указанное выше решение несправедливо, так как там не будет выполняться условие $u \approx 1$ в невязкой области. Кроме того, в окрестности носка ударная волна будет отошедшей, и газ, прошедший через участок ее, определяемый условием $r_\delta' \gtrsim 1$, образует в идеальном газе на поверхности тела высокоэнтропийный слой с расходом массы $\psi_0 \sim \rho_\infty U_\infty L^2 (\alpha a)^8$. В этом слое [5] имеем $i \approx 1$, и пока пограничный слой, расход массы в котором $\psi \approx \rho_\infty U_\infty L^2 k\alpha^2 a^4 x$, развивается внутри высокоэнтропийного, автомодельное решение не будет иметь места. При $\psi \gg \psi_0$ и, следовательно, при $x \gg \alpha^6 a^4 / k$, высокоэнтропийный слой не будет, очевидно, влиять на характеристики пограничного слоя, и полученное выше решение будет справедливо.

Примечание (при корректуре). После поступления заметки в печать автор познакомился с работой [6].В ней та же задача рассмотрена путем увеличения толщины тела на толщину вытеснения пограничного слоя (при $\sigma = 1$ и отсутствии теплопередачи), которая, в свою очередь, связывается с давлением методом интегральных соотношений. В этой работе сделан неверный при строгом рассмотрении вывод о существовании, кроме случая $n = 3/4$, автомодельных решений при $r_w = \mathrm{const}\, x_k \ll r_\delta$, где $k > 0$ — любое.

Поступила 3 II 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Stewertson. On the Motion of a Flat Plat at High Speed in Viscous Compressible Fluid. JAS, No 5, 1955.
2. Лунев В. В. О подобии при обтекании тонких тел вязким газом при больших сверхзвуковых скоростях. ПММ, 1959, вып. 1.
3. Stewertson. On the Motion of a Flat Plat at High Speed in Viscous Compressible Fluid. Proceedings Cambridge Philosophical Society, No 1, 1955.
4. Гродзовский Г. Л., Крашенинникова Н. Л. Автомодельные движения газа с ударными волнами, распространяющимися по степенному закону по покоящемуся газу. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 5.
5. Лунев В. В. О движении в атмосфере тонкого затупленного тела с большими сверхзвуковыми скоростями. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 4.
6. Yasuhara. On the Hypersonic Viscous Plow Past Slender Bodies of Revolution. Journal Physical Society of Japan, 1956, No 8.