ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ НА СИЛЬНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЕ, ВЫЗЫВАЮЩЕЙ СКАЧОК ПРОВОДИМОСТИ

Ю. Л. Жилин (Москва)

1. Явления, возникающие при движении ударных волн в средах с бесконечной проводимостью [1,2], достаточно изучены. Эти явления имеют важное значение в астрофизических проблемах, в которых магнитные числа Рейнольдса перед ударными волнами вследствие весьма больших характерных линейных размеров достигают очень больших значений. В работах [1,2] предполагалось, что перед и за ударной волной электрическое поле находится в равновесии с индуктивным

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{H}}{c_0} \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — напряженность электрического и магнитного полей; $\mathbf{v}$ и c_0 — скорость среды и света. Таким образом, вне волны отсутствуют токи.

Для аэродинамики больших скоростей представляет интерес рассмотрение сильных ударных волн в средах, в которых проводимость перед ударной волной отсутствует, а за волной она достигает больших значений в результате происходящей в волне ионизации. Эти явления имеют место, например, при движении тела с большой скоростью в атмосфере земли или при движении сильных ударных волн в трубах в присутствии электромагнитного поля. В этих случаях токи перед ударной волной отсутствуют и при нарушении условия (1.1), так как проводимость перед ударной волной равна нулю.

Известно, что в природе не существует идеальных изоляторов, и любой газ всегда в какой-то степени ионизован, и, следовательно, обладает некоторой проводимостью. Рассматриваемые ниже явления имеют место в тех случаях, когда магнитные числа Рейнольдса перед и за ударной волной удовлетворяют условиям

$$R_{m1} = \frac{4\pi\sigma_1 U_1 L_1}{c_0^2} \ll 1, \qquad R_{m2} = \frac{4\pi\sigma_2 U_2 L_2}{c_0^2} \gg 1$$

где U_1 и U_2, L_1 и L_2, σ_1 и σ_2 — соответственно характерные скорости, линейные размеры и проводимости до и после ударной волны. Заметим, что здесь существенно также предположение о малости пондеромоторных сил перед ударной волной, т. е.

$$\frac{H_1^2}{4\pi\rho_1 U_1^2} R_{m1} \ll 1$$

При этих предположениях рассмотрим движение сильной стационарной ударной волны в газе при заданном электромагнитном поле перед волной.

Будем считать, что перед ударной волной токи отсутствуют вследствие малой проводимости, а электрическое и магнитное поля могут быть произвольными. В самой волне благодаря ионизации происходит значительное увеличение проводимости и возникают токи, которые, как предполагается, быстро затухают; вдали за ударной волной электрическое и магнитное поля связаны условием (1.1).

Чтобы получить связь между параметрами газа и поля при прохождении такой волны, рассмотрим уравнения движения газа в присутствии электромагнитного поля. Газ будем считать невязким и нетеплопроводным, излучение учитывать не будем. Систему координат свяжем с самой волной, ось x направим перпендикулярно волне.

При этих предположениях уравнения сохранения массы, импульса и энергии можно записать соответственно в виде [1]

$$\operatorname{div} \rho\mathbf{v} = 0, \qquad \frac{\partial \pi_{ik}}{\partial x_k} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{g} = 0 \tag{1.2}$$

Здесь ρ и p — плотность и давление газа. $\mathbf{v}$ — скорость газа, π_{ik} — тензор плотности потока импульса, $\mathbf{g}$ — вектор плотности потока энергии

$$\pi_{ik} = \rho v_i v_k + p\delta_{ik} - \frac{1}{4\pi}\left[H_i H_k - \frac{1}{2} H^2\delta_{ik}\right] \tag{1.3}$$

$$\mathbf{g} = \rho\mathbf{v}\left(\frac{V^2}{2} + h\right) + \frac{c_0}{4\pi}\,\mathbf{E} \times \mathbf{H} \tag{1.4}$$

где h удельная энтальпия газа. К уравнениям движения газа (1.2) нужно еще присоединить уравнения Максвелла для электромагнитного поля

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0 \tag{1.5}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c_0}\mathbf{j}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho_e \tag{1.6}$$

Здесь $\mathbf{j}$ — плотность тока, ρ_e — плотность заряда $|\varepsilon = \mu = 1|$.

Уравнения (1.2) (1.5) и (1.6) справедливы независимо от величины проводимости, и поэтому применимы как слева, так и справа от ударной волны. Применяя уравнения (1.2)—(1.5) к ударной волне, получаем

$$[\rho v_x] = 0, \qquad \left[p + \rho v_x^2 + \frac{H^2}{8\pi}\right] = 0, \qquad [H_x] = 0 \tag{1.7}$$

$$\left[\rho v_x v_y - \frac{H_x H_y}{4\pi}\right] = 0, \qquad \left[\rho v_x v_z - \frac{H_x H_z}{4\pi}\right] = 0 \tag{1.8}$$

$$\left[\rho v_x\left(\frac{V^2}{2} + h\right) + \frac{c_0}{4\pi}(E_y H_z - E_z H_y)\right] = 0 \quad [E_y] = 0, \tag{1.9}$$

$$[E_z] = 0 \tag{1.10}$$

Здесь и в дальнейшем квадратные скобки имеют смысл символа $[A] = A_1 - A_2$, где A_1 — значение A перед волной, A_2 — за волной. Уравнения (1.6) определяют плотность поверхностного тока и заряда на ударной волне и изменение составляющей электрического поля, нормальной к ударной волне. Эти величины не входят в другие уравнения и в дальнейшем не рассматриваются. Используя условие (1.1) за ударной волной, соотношения (1.10) можно записать еще в виде

$$c_0 E_{1y} = v_{2x} H_{2z} - v_{2z} H_{2x}, \qquad -c_0 E_{1z} = v_{2x} H_{2y} - v_{2y} H_{2x} \tag{1.11}$$

Для рассматриваемых ударных волн существенное значение имеют диссоциации и ионизации газа, поэтому при определении удельной энтальпии за ударной волной необходимо учитывать эти процессы. В общем случае можно считать, что

$$h = h(p, \rho) \tag{1.12}$$

где h — известная функция от давления и плотности. Уравнения (1.7)—(1.9) и (1.11), образуют замкнутую систему для определения параметров газа и поля за волной. Эта система уравнений отличается от рассмотренных в работах [1,2] соотношений на разрыве в среде с бесконечной проводимостью тем, что электрическое поле перед волной предполагается независимым от магнитного.

2. В некоторых случаях система (1.7)—(1.9), (1.11), (1.12) допускает упрощения.

1°. При $v_{1x} = v_{2x} = 0$ (тангенциальный разрыв) имеем движение непроводящей среды относительно бесконечно проводящей. В этом случае выполняются условия

$$\begin{gathered}\left[p + \frac{H^2}{8\pi}\right] = 0, \qquad H_x[H_y] = 0, \qquad H_x[H_z] = 0 \\ E_y[H_z] = E_z[H_y], \qquad c_0E_y = -v_{2z}H_x, \qquad c_0E_z = v_{2y}H_x\end{gathered} \tag{2.1}$$

Если $H_x = 0$, то и $E_y = E_z = 0$. При этом магнитное поле и скорость терпят произвольный скачок при переходе через разрыв. Если $H_x \neq 0$, то $[H_y] = 0$, $[H_z] = 0$, $[p] = 0$. Выбрав систему координат так, чтобы отсутствовало касательное к разрыву электрическое поле, получаем, что $v_{2z} = v_{2y} = 0$, а скорость в непроводящей среде может быть произвольна. Условия (2.1) должны выполняться при обтекании непроводящего тела средой, обладающей бесконечной проводимостью.

2°. При $H_x \neq 0$ всегда можно выбрать систему координат так, чтобы касательное к волне электрическое поле равнялось нулю. В этой системе координат:

$$\begin{gathered}[\rho v_x] = 0, \qquad \left[p + \rho v_x^2 + \frac{H^2}{8\pi}\right] = 0, \qquad [H_x] = 0 \\ \left[\rho v_x v_y - \frac{H_x H_y}{4\pi}\right] = 0, \qquad \left[\rho v_x v_z - \frac{H_x H_z}{4\pi}\right] = 0, \qquad \left[\frac{V^2}{2} + h\right] = 0 \\ v_{2x} H_{2z} = v_{2z} H_x, \qquad v_{2x} H_{2y} = v_{2y} H_x\end{gathered} \tag{2.2}$$

Из двух последних уравнений следует, что за ударной волной вектор скорости коллинеарен с вектором напряженности магнитного поля.

Систему координат всегда можно повернуть таким образом, чтобы выполнялось условие

$$(\rho v_x) v_{1z} - \frac{H_x}{4\pi} H_{1z} = 0 \tag{2.3}$$

Действительно, пусть угол, образованный вектором $\mathbf{v}_{1\tau}$ с $\mathbf{H}_{1\tau}$, равен θ, а угол, образованный $\mathbf{H}_{1\tau}$ с осью z, равен φ ($\mathbf{v}_{1\tau}$ и $\mathbf{H}_{1\tau}$ — проекции $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{H}_1$ на плоскость $x = 0$). Тогда условие (2.3) можно выразить как

$$(\rho v_x) v_{1\tau} \cos(\varphi + \theta) - \frac{H_x}{4\pi} H_{1\tau} \cos\varphi = 0$$

Отсюда

$$\cos^2\varphi = \frac{(\rho v_x)^2 v_{1\tau}^2 \sin^2\theta}{(\rho v_x)^2 v_{1\tau}^2 \sin^2\theta + [(\rho v_x) v_{1\tau} - H_x H_{1\tau} / 4\pi]^2}$$

В новой системе координат за волной справедливы соотношения

$$(\rho v_x) v_{2z} - \frac{H_x}{4\pi} H_{2z} = 0, \qquad H_x v_{2z} - v_{2x} H_{2z} = 0$$

Из этой системы следует, что либо $(\rho v_x) v_{2x} = H_x^2/4\pi$, и v_{2z} и H_{2z} могут быть отличны от нуля, либо $(\rho v_x) v_{2x} \neq H_x^2/4\pi$, и $v_{2z} = H_{2z} = 0$.

В первом случае нормальная к волне скорость за ударной волной равняется альфвеновской скорости. Нетрудно показать, что в этом случае

$$\frac{v_{1y}}{H_{1y}} = \frac{v_{1z}}{H_{1z}}$$

т. е. перед ударной волной вектор скорости и вектор напряженности магнитного поля лежат в плоскости, нормальной к волне, а за волной вектор скорости может выходить из этой плоскости. Этот случай аналогичен волне Альфвена.

Во втором случае вектор скорости за ударной волной лежит в плоскости $z = 0$.

3°. При $H_x = 0$ из уравнений (1.9) следует, что касательная к волне скорость непрерывна. Поэтому систему координат можно выбрать так, чтобы она вообще отсутствовала; ось y направим вдоль касательного к волне электрического поля. В этой системе координат соотношения на ударной волне можно записать в виде[1]

$$[\rho v_x] = 0, \qquad \left[p + \rho v_x^2 + \frac{H^2}{8\pi}\right] = 0, \left[\rho v_x \left(\frac{V^2}{2} + h\right) + \frac{c_0}{4\pi} (E_y H_z - E_z H_y)\right] = 0 \tag{2.4}$$

$$c_0 E_y = v_{2x} H_{2z}, \qquad H_{2y} = 0, \qquad h = h(p, \rho)$$

Этот случай аналогичен перпендикулярной волне, рассмотренной в [1].

3. В предыдущих параграфах предполагалось, что взаимодействие сильной ударной волны в газе с электромагнитным полем можно свести к стационарной волне. Однако, при произвольном задании электромагнитного поля перед ударной волной, несмотря на существование решений системы (1.7)—(1.9), (1.11), (1.12), удовлетворяющих условию возрастания энтропии, стационарная волна не всегда осуществима. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующий пример. Пусть

$$v_{1x} \neq 0, \qquad H_{1y} \neq 0, \qquad E_{1z} = H_x = 0$$

Как только в ударной волне появится проводимость, то согласно закону Ома возникнут токи

$$\mathbf{j} = \sigma \left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{H}}{c_0}\right]$$

[1] Аналогичная система уравнений рассмотрена в работе [3], вышедшей в свет после отправления в печать настоящей статьи. В работе [3] содержится также анализ адиабаты Гюгонио для случая, в котором, как показывается в п. 3 настоящей работы, не существует стационарной волны.

Используя уравнения Максвелла и предполагая, что внутри волны все величины зависят только от x, имеем

$$\nu_m \frac{dH_y}{dx} = v_x H_y \qquad \left(\nu_m = \frac{c_0^2}{4\pi\sigma}\right), \qquad \text{или} \qquad H_y(x) = H_{1y} \exp \int_{-\infty}^{x} \frac{v_x\, dx}{\nu_m}$$

Так как $v_x / \nu_m > 0$ при $x \to \infty$, то отсюда следует, что

$$\frac{H_y(x)}{H_{1y}} \to \infty \qquad \text{при } x \to \infty$$

т. е. в этом случае не существует стационарного решения уравнений структуры ударной волны при $H_{1y} \neq 0$, несмотря на то, что существует решение системы (2.4).

Аналогичное явление имеет место в случае, когда

$$E_y \neq 0, \qquad v_{1x} \neq 0, \qquad H_x = H_{1z} = 0$$

В этом случае индуктивное поле всегда увеличивает первоначальное электрическое поле при $v_x > 0$, и поэтому электрические токи не затухают в ударной волне при $x \to \infty$.

Приведенные примеры показывают, что электромагнитное поле перед ударной волной должно удовлетворять некоторым специальным условиям. Эти условия можно получить только лишь из рассмотрения уравнений структуры ударной волны.

Поступила 4 VI 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Сыроватский С. М. Магнитная гидродинамика. Успехи физ. наук, 1957, том LXII, вып. 3.
2. Ландау Л. Д. и Лившиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Физматиздат, 1959.
3. Любимов Г. А. Ударная волна со скачком проводимости газа в электромагнитном поле. ДАН СССР, 1959, т. 126, № 2.

О КВАЗИОДНОМЕРНОМ СТАЦИОНАРНОМ ТЕЧЕНИИ СЖИМАЕМОГО ПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА В КАНАЛЕ ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ПОПЕРЕЧНЫХ МАГНИТНОГО И ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЕЙ

И. Б. Чекмарев

(Ленинград)

Квазиодномерное стационарное течение сжимаемого проводящего газа при наличии поперечных магнитного и электрического полей было рассмотрено Реслером и Сирсом в работах [1,2]. В настоящей заметке уравнения квазиодномерного стационарного течения проводящего газа интегрируются в частном случае, когда напряженность внешнего электрического поля пропорциональна напряженности магнитного поля.

Положим, что газ движется параллельно оси x, магнитное поле параллельно оси y, а электрическое поле — оси z. Вязкость и теплопроводность газа не учитываются. Напряженность внешнего электрического поля пропорциональна напряженности магнитного поля и изменяется по закону $E = -\mu u_m H$, где u_m — постоянный коэффициент пропорциональности. За масштабы скорости газа u, давления p, плотности ρ, температуры T и напряженности магнитного поля H выберем их значения u_0, p_0, ρ_0, T_0, H_0 в сечении $x = 0$. За масштаб координаты x выберем характерный размер канала L. Тогда исходные уравнения задачи в безразмерной форме будут

$$\rho u \frac{du}{dx} + \frac{1}{kM_0^2}\frac{dp}{dx} + SH\frac{dH}{dx} = 0, \qquad \frac{d}{dx}\rho u = 0 \tag{1}$$

$$\frac{1}{k-1}\rho u \frac{dT}{dx} + p\frac{du}{dx} = \frac{SkM_0^2}{R_m}\left(\frac{dH}{dx}\right)^2, \qquad p = \rho T, \qquad \frac{dH}{dx} = R_m(u - u_m)H. \tag{2}$$

где

$$M_0^2 = \frac{u_0^2}{kp_0/\rho_0}, \qquad k = \frac{C_p}{C_v}, \qquad S = \frac{\mu H_0^2}{\rho_0 u_0^2}, \qquad R_m = \sigma\mu u_0 L$$