О ТЕЧЕНИИ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ В ПРИСУТСТВИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПО ТРУБАМ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПРОФИЛЯ

С. А. Регирер

(Воркута)

Одной из задач магнитной гидродинамики является изучение течения проводящей вязкой жидкости в трубе, помещенной в магнитное поле. Известны ее решения для плоской и круглой цилиндрических труб [1-3]. Ниже общая задача о стационарном течении в бесконечно длинной трубе произвольного профиля сводится к последовательному решению двух линейных краевых задач. Результат такого рода был получен ранее [4] для узкого класса внешних магнитных полей.

Уравнения магнитной гидродинамики для несжимаемой среды имеют вид [2]:

$$(\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p^* + \frac{\varkappa}{\rho}(\mathbf{H}\nabla)\,\mathbf{H} + \nu\nabla\mathbf{v} \tag{1}$$

$$(\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v} = (\mathbf{H}\nabla)\,\mathbf{H} + \beta\triangle\mathbf{H}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \tag{2}$$

Здесь

$$p^* = p + {}^1\!/_2\varkappa H^2, \qquad \varkappa = \mu/4\pi, \qquad \beta = c^2/4\pi\sigma\mu \tag{3}$$

остальные обозначения общепринятые.

Рассмотрим бесконечную цилиндрическую трубу, образующие которой параллельны оси z, а сечение в плоскости $z=0$ — односвязная область B, ограниченная кусочно-гладким замкнутым контуром Σ.

В случае, когда линии тока параллельны образующим и внешнее магнитное поле не меняется вдоль оси z, система (1), (2) имеет решение вида

$$\mathbf{v}\,\{0, 0, v(P)\}, \qquad \mathbf{H}\,\{H_x(P),\ H_y(P),\ H_z(P)\}, \qquad p^* = p^*(P, z) \qquad (P \text{ в обл. } B)$$

причем неизвестные функции, очевидно, удовлетворяют системе

$$\frac{\partial p^*}{\partial x} = \varkappa\left(H_x\frac{H_x}{\partial x} + H_y\frac{\partial H_x}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial p^*}{\partial y} = \varkappa\left(H_x\frac{\partial H_y}{\partial x} + H_y\frac{\partial H_y}{\partial y}\right) \tag{4}$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial z} = \varkappa\left(H_x\frac{\partial H_z}{\partial x} + H_y\frac{\partial H_z}{\partial y}\right) + \eta\triangle v \qquad \left(\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tag{5}$$

$$\triangle H_x = 0, \qquad \triangle H_y = 0, \qquad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0, \qquad 0 = H_x\frac{\partial v}{\partial x} + H_y\frac{\partial v}{\partial y} + \beta\triangle H_z \tag{6}$$

Обозначая штрихом величины, относящиеся к области B', внешней по отношению к B, краевые условия для v и $\mathbf{H}$ можно сформулировать следующим образом:

$$v = 0, \qquad H_\tau = H_\tau', \qquad \mu H_n = \mu' H_n', \qquad H_z = f(P) \text{ на контуре } \Sigma \tag{7}$$

Будем также считать заданными значения H_x', H_y' на бесконечности, и расход жидкости Q через сечение трубы. В общем случае к системе (4) — (7) следует добавить уравнения плоского поля во внешней неподвижной среде, которые в силу предположения о неизменности $\mathbf{H}'$ вдоль оси z примут вид:

$$\triangle H_x' = 0, \qquad \triangle H_y' = 0, \qquad \frac{\partial H_x'}{\partial x} + \frac{\partial H_y'}{\partial y} = 0 \tag{8}$$

Введем векторные потенциалы плоского поля, полагая

$$H_x = \frac{\partial A}{\partial y}, \qquad H_x' = \frac{\partial A'}{\partial y}, \qquad H_y = -\frac{\partial A}{\partial x}, \qquad H_y' = -\frac{\partial A'}{\partial x} \tag{9}$$

Тогда из (6) и (8) получим для A и A' уравнения Пуассона, у которых правыми частями будут постоянные составляющие вектора плотности тока ω и ω' с обратными знаками. Величины ω и ω' не определяются из решения выведенных уравнений и должны быть заданы.

Таким образом, первый этап решения проблемы состоит в нахождении H_x, H_y, исходя из системы двух уравнений Пуассона с условиями сопряжения на границе и условием на бесконечности

$$\triangle A = -\omega, \quad \triangle A' = -\omega', \quad \left.\frac{\partial A}{\partial n}\right|_\Sigma = \left.\frac{\partial A'}{\partial n}\right|_\Sigma, \quad \mu\left.\frac{\partial A}{\partial \tau}\right|_\Sigma = \mu'\left.\frac{\partial A'}{\partial \tau}\right|_\Sigma, \quad A'_{r\to\infty} = A_\infty'. \tag{10}$$

Отметим, что в классической электродинамике часто встречаются подобного рода задачи при $\omega' = 0$ (задача о магнитном поле проводника с током) и при $\omega = \omega' = 0$ (задача о магнетике в магнитном поле).

Уравнения (4) с учетом (10) легко преобразуются к виду

$$\frac{\partial p^*}{\partial x} = \varkappa\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(H_x^2 + H_y^2) - \omega H_y\right], \qquad \frac{\partial p^*}{\partial y} = \varkappa\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(H_x^2 + H_y^2) + \omega H_x\right]$$

Отсюда

$$p + \mu H_z^2 / 8\pi = \varkappa\omega A + C(z)$$

причем нетрудно установить, что p и C линейно зависят от z. Поэтому в уравнении (5) следует полагать

$$\partial p^* / \partial z = \partial p / \partial z = \mathrm{const}$$

Следовательно, второй этап решения проблемы состоит в нахождении v, H_z, $\partial p^* / \partial z$ из линейной системы

$$\frac{\partial p^*}{\partial z} = \varkappa\left(H_x\frac{\partial H_z}{\partial x} + H_y\frac{\partial H_z}{\partial y}\right) + \eta\triangle v, \qquad H_x\frac{\partial v}{\partial x} + H_y\frac{\partial v}{\partial y} + \beta\triangle H_z = 0 \tag{11}$$

$$v\,|_\Sigma = 0, \qquad \int\limits_B v\,dB = Q, \qquad H_z\,|_\Sigma = f(P) \tag{12}$$

Полагая

$$u_1 = v + \lambda\beta H_z, \qquad u_2 = v - \lambda\beta H_z \qquad (\lambda = \sqrt{\varkappa / \eta\beta})$$

получим симметричные выражения с разделенными неизвестными:

$$\frac{1}{\eta}\frac{\partial p^*}{\partial z} = \lambda\left(H_x\frac{\partial u_1}{\partial x} + H_y\frac{\partial u_1}{\partial y}\right) + \triangle u_1, \quad \frac{1}{\eta}\frac{\partial p^*}{\partial z} = -\lambda\left(H_x\frac{\partial u_2}{\partial x} + H_y\frac{\partial u_2}{\partial y}\right) + \triangle u_2 \tag{13}$$

$$u_1\,|_\Sigma = \lambda\beta f(P), \qquad u_2\,|_\Sigma = -\lambda\beta f(P), \qquad \int\limits_B (u_1 + u_2)\,dB = Q \tag{14}$$

Для полученных эллиптических систем, по-видимому, могут быть полезными представления решений при помощи функций комплексных переменных.

В частном случае, если во внешней среде и в жидкости отсутствуют токи в направлении оси z, т. е. $\omega = \omega' = 0$, и, кроме того, магнитные свойства обеих сред одинаковы, т. е. $\mu = \mu'$, то система (10) имеет тривиальное решение $H_x = H_x' = H_{x\infty} = \mathrm{const}$, $H_y = H_y' = H_{y\infty} = \mathrm{const}$. Тогда система координат может быть выбрана так, чтобы ось x совпала с направлением плоского вектора $\{H_x, H_y, 0\}$, и из (11) получаются уравнения, выведенные Шерклиффом в работе [4]:

$$\frac{\partial p^*}{\partial z} = \varkappa H_x\frac{\partial H_z}{\partial x} + \eta\triangle v, \qquad H_x\frac{\partial v}{\partial x} + \beta\triangle H_z = 0.$$

Если область B есть прямоугольник, то целесообразно применение конечных интегральных преобразований. Для круговой области эффективным оказывается представление решения в виде тригонометрического ряда.

Отметим в заключение, что все приведенные выше суждения легко распространяются на случай, когда в бесконечной вертикальной трубе, помимо вынужденного течения, имеет место свободная тепловая конвекция при постоянном (в том числе и нулевом) вертикальном градиенте температуры на стенках.

Поступила 14 IX 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Hartmann J. Hg-Dynamics I. Kgl. Danske Vidensk. Selskab. Math.-fys. Medd. 1937, vol. 15, No 6.
2. Ландау Л. А., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., 1957.
3. Pai S. J. Laminar flow of an electrically conducting incompressible fluid in a circular pipe. J. Appl. Phys., 1954, vol. 25, No 9, p. 1205—1207.
4. Shercliff J. A. Steady motion of conducting fluids in pipes under transverse magnetic fields. Proc. Cambr. Phil. Soc., 1953, vol. 49, pt. 1, p. 136—144.