

ОБ ОДНОМ ВИДЕ ТОЧНЫХ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОГО БЕЗВИХРЕВОГО ДВИЖЕНИЯ ГАЗА

Е. Д. Томилев (Томск)

§ 1. Получение решений в плоскости годографа. Для функции тока  $\psi$  в плоском установившемся безвихревом движении невязкого газа, подчиненного адиабатическому закону, справедливо уравнение Чаплыгина [1]

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} + K \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad \left( \sigma = \int_{\tau}^{\tau_*} \frac{(1-\tau)^\beta}{2\tau} d\tau \right), \quad K = \frac{1 - (2\beta + 1)\tau}{(1-\tau)^{2\beta+1}} \quad (1.1)$$

Здесь 
$$\beta = \frac{1}{\kappa - 1}, \quad \tau = \frac{v^2}{v_m^2}, \quad \tau_* = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} = \frac{1}{2\beta + 1} \quad (1.2)$$

$\kappa$  — показатель адиабаты,  $v$  — скорость,  $v_m$  — предельная скорость в газе,  $\tau_*$  — значение  $\tau$ , отвечающее скорости звука,  $\theta$  — угол наклона скорости к оси  $x$ ,  $K$  — функция Чаплыгина. Будем искать решение уравнения (1.1) в виде

$$\psi = P_0(\sigma) + \theta P_1(\sigma) + \dots + \theta^\nu P_\nu(\sigma) + \dots + \theta^{2n+1} \bar{P}_{2n+1}(\sigma) \quad (1.3)$$

где  $P_\nu(\sigma)$  — функции только от  $\sigma$ , а  $n$  — произвольное целое неотрицательное число.

Уравнение (1.1) будет выполнено, если функции  $P_\nu$  удовлетворяют системе

$$P_\nu'' + (\nu + 2)(\nu + 1) K P_{\nu+2} = 0 \quad (\nu = 0, 1, \dots, 2n - 1), \quad P_{2n}'' = 0, \quad P_{2n+1}'' = 0 \quad (1.4)$$

Система (1.4) распадается на две независимые системы уравнений для функций  $P_\nu$  с четными и нечетными индексами. Их последовательное интегрирование дает

$$P_{2n-2k} = \frac{(-1)^k}{(2n-2k)!} \sum_{m=0}^k (a_{2m+1} G_{2k-2m} + b_{2m+1} F_{2k-2m}) \quad (1.5)$$

$$P_{2n-2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2n-2k+1)!} \sum_{m=0}^k (a_{2m} G_{2k-2m} + b_{2m} F_{2k-2m}) \quad (k = 0, 1, \dots, n) \quad (1.6)$$

где функции  $F_{2i}$  и  $G_{2i}$ , а также необходимые для дальнейшего функции  $F_{2i-1}$  и  $G_{2i-1}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) определяются формулами

$$F_{2i-1} = \int_{\sigma_0}^{\sigma} K F_{2i-2} d\sigma, \quad F_{2i} = \int_{\sigma_0}^{\sigma} F_{2i-1} d\sigma = \int_{\sigma_0}^{\sigma} (\sigma - s) K(s) F_{2i-2}(s) ds \quad (1.7)$$

$$G_{2i-1} = \int_{\sigma_0}^{\sigma} K G_{2i-2} d\sigma, \quad G_{2i} = \int_{\sigma_0}^{\sigma} G_{2i-1} d\sigma = \int_{\sigma_0}^{\sigma} (\sigma - s) K(s) G_{2i-2}(s) ds \quad (1.8)$$

причем

$$F_0 = 1, \quad G_0 = \sigma - \sigma_0 \quad (1.9)$$

Величины  $a_i$  и  $b_i$  являются постоянными интегрирования,  $\sigma_0$  есть значение  $\sigma$  при произвольно выбранном в (1.1) значении  $\tau = \tau_0$ . По уравнениям Чаплыгина

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = K \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = - \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \quad (1.10)$$

находим выражение для потенциала скорости  $\varphi$  в виде

$$\varphi = \sum_{\nu=0}^{2n+2} \theta^\nu Q_\nu(\sigma) \quad (1.11)$$

где

$$Q_{2n-2k} = \frac{(-1)^k}{(2n-2k)!} \sum_{m=0}^{k+1} (a_{2m} G_{2k-2m+1} + b_{2m} F_{2k-2m+1}) \quad (k = -1, 0, 1, \dots, n) \quad (1.12)$$

$$Q_{2n-2k+1} = \frac{(-1)^{k+1}}{(2n-2k+1)!} \sum_{m=0}^k (a_{2m+1} G_{2k-2m+1} + b_{2m+1} F_{2k-2m+1}) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (1.13)$$

При этом

$$F_{-1} = 0, \quad G_{-1} = 1 \quad (1.14)$$

Может показаться, что данное решение не является новым, а получается из известного метода Бергмана [2], когда за «порождающую» гармоническую функцию берется сумма однородных гармонических полиномов. Однако это не так, ибо по методу Бергмана точное решение представится в этом случае в виде бесконечного, а не конечного степенного ряда по  $\theta$ .

§ 2. Некоторые свойства течений, отвечающих полученным решениям. Придавая числу  $n$  всевозможные значения и по произволу подбирая постоянные интегрирования, можем получить любое число различных решений. Так как система (1.4) распадается на две независимые системы, то решение (1.3) можно рассматривать как сумму двух решений — одного с четными степенями и другого с нечетными степенями  $\theta$ :

$$\psi = \sum_{r=0}^n \theta^{2r} P_{2r}(\sigma), \quad \varphi = \sum_{r=0}^n \theta^{2r+1} P_{2r+1}(\sigma) \quad (2.1)$$

Если в (1.5) и (1.13) взять отличной от нуля только постоянную  $a_{2n+1}$ , то останутся лишь функции  $P_0 = (-1)^n a_{2n+1} G_0 = aG_0$ ,  $Q_1 = (-1)^{n+1} a_{2n+1} = -a$ . Тогда первое решение (2.1) и равенство (1.11) дают  $\psi = aG_0$ ,  $\varphi = -a\theta$ , т. е. течение газа типа вихревой точки.

В дальнейшем примем всюду  $\sigma_0 = 0$ , т. е. значение, отвечающее критической скорости. Очевидно, что это несколько не ограничивает общности рассуждений и в то же время оказывается удобным для изучения околосвуковых движений, ибо при скорости течения, равной скорости звука, функции  $F$  и  $G$  с различными индексами, кроме  $F_0 = G_{-1} = 1$ , обращаются в нули.

Если тогда принять в (1.5) и (1.6) все коэффициенты  $b_i$  равными нулю, за возможным исключением  $b_{2n+1}$ , то все функции  $P_\nu$  на звуковой линии окажутся равными нулю, за исключением  $P_0 = (-1)^n b_{2n+1} = \text{const}$ . Следовательно, на линии перехода через скорость звука  $\psi = \text{const}$  и эта линия является линией тока. Таким образом, в этом частном случае течение обладает тем же свойством, что и течение, вызванное изолированным вихрем.

Точно так же, если в уравнениях (1.6) и (1.12) все коэффициенты, за исключением  $b_{2n}$ , положить равными нулю, то отличными от нуля окажутся лишь функции  $P_1 = (-1)^n b_{2n} = b$ ,  $Q_0 = (-1)^n b_{2n} F_1 = bF_1$ . Тогда второе решение по (2.1) и равенство (1.11) дают  $\psi = b\theta$ ,  $\varphi = bF_1$ , т. е. решение для источника в газе.

Известно, что для безударного перехода через звуковую линию необходимо, чтобы на ней производная  $\partial\psi/\partial\sigma$  была отлична от нуля. Из общего решения (1.3) и выражений (1.5) и (1.6) находим, что на звуковой линии

$$\frac{\partial\psi}{\partial\sigma} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \left\{ \frac{a_{2k}}{(2n-2k+1)!} \theta^{2n-2k+1} + \frac{a_{2k+1}}{(2n-2k)!} \theta^{2n-2k} \right\} \quad (2.2)$$

Отсюда следует, что переход газа через звуковую линию возможен лишь для сечений, для которых не все коэффициенты  $a_i$  одновременно равны нулю. В противном случае продолжение безвихревого течения за звуковую линию оказывается невозможным, что совпадает с известным свойством газового течения типа источника.

§ 3. О вычислениях. Функции  $F$  и  $G$ , как не связанные с какими-либо конкретными условиями, могут быть вычислены наперед для всех задач.

Примем в дальнейшем  $\kappa = 1.4$ , так что  $\beta = 2.5$ . Тогда по (1.1) имеем

$$K = \frac{1 - 6\tau}{(1 - \tau)^6} \quad (3.1)$$

Выражение (1.1) с подстановкой  $\tau = 1 - z^2$  приводится к интегрируемому виду:

$$\sigma = \int_{z_*}^z \frac{z^6 dz}{1 - z^2} \quad (z_* = \sqrt{1 - \tau_*} = \sqrt{\frac{2}{\kappa + 1}} = \sqrt{\frac{5}{6}} = 0.91287092917) \quad (3.2)$$

В результате получаем

$$\sigma = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} - z - \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5} - A \quad (A = 0.2512511362) \quad (3.3)$$

где  $A$  — значение перемещенных членов при  $z = z_*$ .

Функции  $F_1$  и  $F_2$  могут быть получены непосредственным вычислением интегралов. На основании (3.1) и (3.2) находим

$$F_1 = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{3z^3} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} - B \quad (B = 1.5883027569) \quad (3.4)$$

$$F_2 = \frac{1}{5} [z^4 + 2z^2 - 3 \ln(1-z^2)] + \frac{1}{z} \left( \frac{1}{4} \ln \frac{1+z}{1-z} - z - \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5} - B \right) \ln \frac{1+z}{1-z} + \\ + B \left( z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} \right) - C \quad (C = 0.3435517463) \quad (3.5)$$

Интегрированием по частям можно все функции  $G_{2i-1}$  выразить через другие.

$$G_{2i-1} = \sum_{k=1}^{2i} (-1)^{k-1} F_k G_{2i-1-k} \quad (i = 1, \dots, n+1) \quad (3.6)$$

Таким образом, необходимо определить лишь все остальные функции  $F$  и функции  $G$  с четными индексами. Таблицы этих функций можно составить, пользуясь формулами приближенного вычисления интегралов или же пользуясь другими методами (например, разложением в ряд Тейлора в окрестности  $\sigma = 0$ ).

§ 4. Переход к плоскости течения. Подстановка (1.3) и (1.11) в формулы Чаплыгина

$$dx = \frac{1}{v_m \sqrt{\tau}} \left[ \cos \theta d\varphi - \frac{\sin \theta}{(1-\tau)^{5/2}} d\psi \right], \quad dy = \frac{1}{v_m \sqrt{\tau}} \left[ \sin \theta d\varphi + \frac{\cos \theta}{(1-\tau)^{5/2}} d\psi \right] \quad (4.1)$$

и интеграция приводит к следующим выражениям для координат плоскости течения:

$$x = -\frac{1}{v_m \sqrt{\tau}} (R \sin \theta + S \cos \theta) + C_1, \quad y = -\frac{1}{v_m \sqrt{\tau}} (S \sin \theta - R \cos \theta) + C_2 \quad (4.2)$$

Здесь  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные интегрирования, а  $R$  и  $S$  — функции от  $\sigma$  и  $\theta$ , определяемые формулами

$$R = \sum_{k=0}^{2n+1} (a_k e_k + b_k f_k), \quad S = \sum_{k=0}^{2n+1} (a_k g_k + b_k h_k) \quad (4.3)$$

где  $a_k$  и  $b_k$  — те же произвольные постоянные, что и ранее, а функции  $e_k$  и  $g_k$  имеют при  $k = 2m$  и  $k = 2m + 1$  вид:

$$e_{2m} = \sum_{r=0}^{n-m} \frac{(-1)^{n-r}}{(2r+1)!} P_{2r+1} \{G_{2(n-m-r)-1} - qG_{2(n-m-r-1)}\} \quad (4.4)$$

$$e_{2m+1} = \sum_{r=0}^{n-m} \frac{(-1)^{n-r}}{(2r)!} P_{2r} \{G_{2(n-m-r)-1} - qG_{2(n-m-r-1)}\}$$

$$g_{2m} = \sum_{r=0}^{n-m} \frac{(-1)^{n-r}}{(2r)!} P_{2r} \{G_{2(n-m-r)-1} - qG_{2(n-m-r)}\} \quad (4.5)$$

$$g_{2m+1} = \sum_{r=0}^{n-m} \frac{(-1)^{n-r-1}}{(2r+1)!} P_{2r+1} \{G_{2(n-m-r)-3} - qG_{2(n-m-r-1)}\}$$

Функции  $f_k$  имеют вид функций  $e_k$ , а  $h_k$  — вид функции  $g_k$  с той лишь разницей, что функции  $G$  должны быть заменены функциями  $F$  с теми же индексами. В записанных выражениях

$$q = (1-\tau)^{-5/2} \quad (4.6)$$

$$P_{2r} = \theta^{2r} - 2r(2r-1)\theta^{2r-2} + \dots + (-1)^{r-1} 2r(2r-1)\dots 4 \cdot 3 \cdot \theta^2 + (-1)^r (2r)! \quad (4.7)$$

$$P_{2r+1} = \theta^{2r+1} - (2r+1) 2r \theta^{2r-1} + \dots + (-1)^r (2r+1)! \theta \quad (r = 0, 1, \dots, n)$$

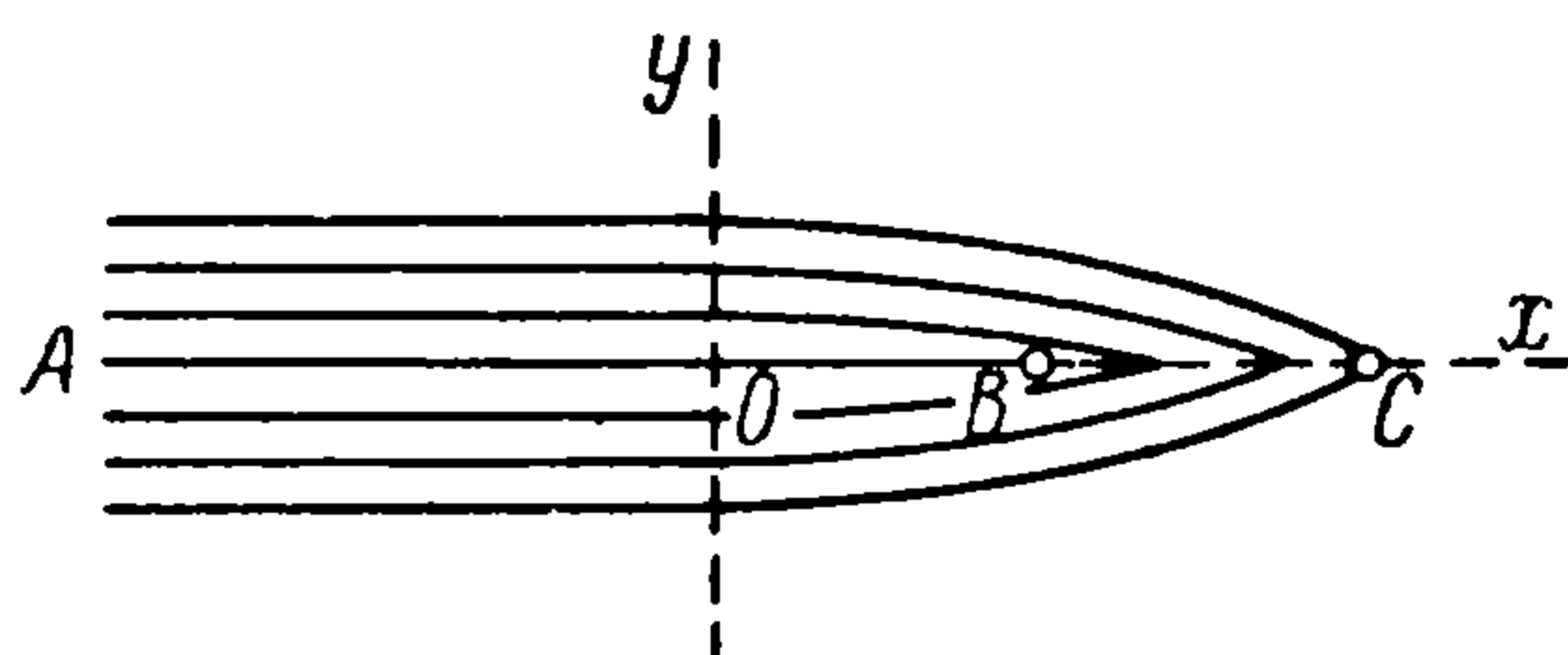
Кроме того, в (4.4) и (4.5) необходимо считать  $F_{-1} = F_{-2} = F_{-3} = G_{-2} = G_{-3} = 0$ .

5. **Примеры.** Рассмотрим течения газа, отвечающие решениям первого типа (2.1) при  $n = 1$  и  $a_k = 0$  и второго типа (2.1) при  $n = 0$  и  $b_k = 0$ . В первом случае можно выразить безразмерную функцию тока  $\psi^\circ$  в виде

$$\psi^\circ = \theta^2 - 2F_2 \quad \left( \psi^\circ = \frac{2\psi}{b_1} \right) \quad (5.1)$$

и во втором

$$\psi^\circ = \theta\sigma \quad \left( \psi^\circ = \frac{\psi}{a_0} \right) \quad (5.2)$$

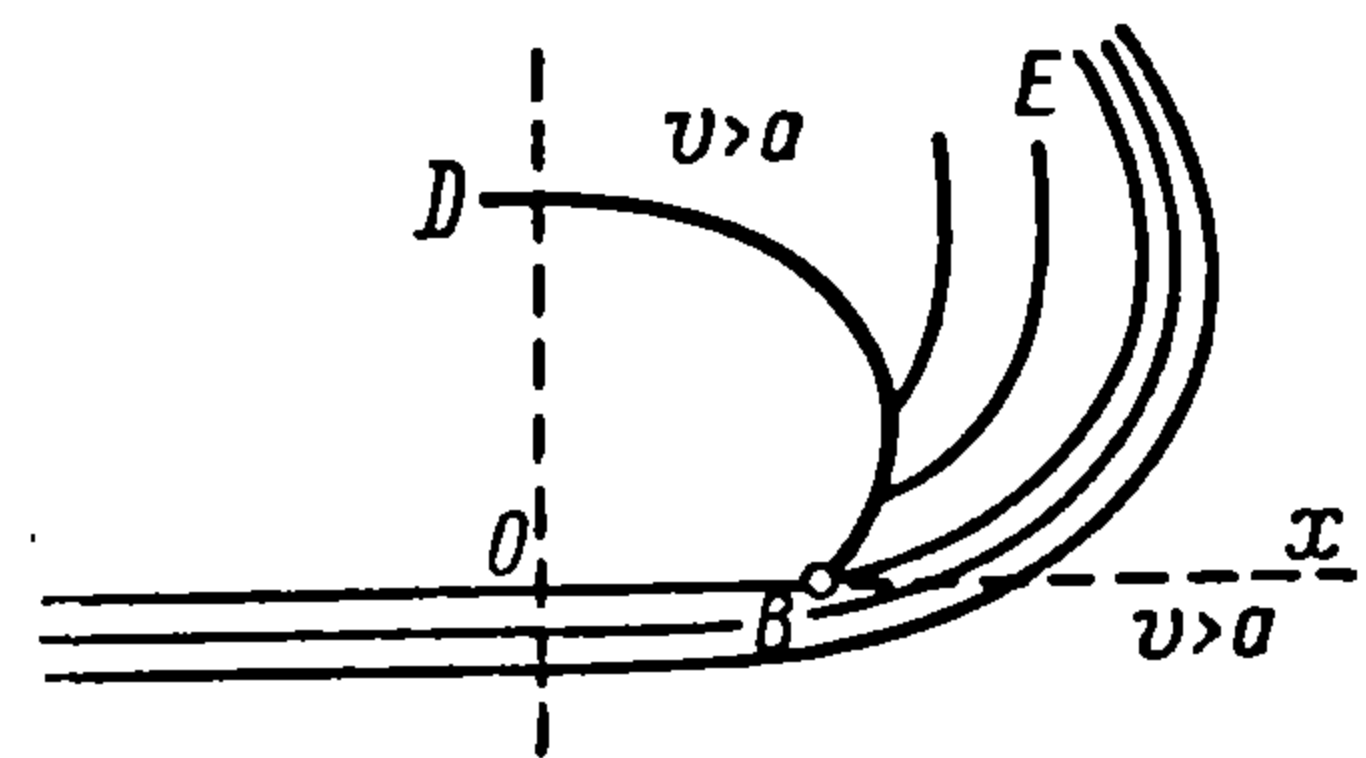


Фиг. 1

Для расчетов по формулам (3.3), (3.4) и (3.5) были составлены таблицы функций  $\sigma$ ,  $F_1$  и  $F_2$  в зависимости от  $\tau$  с шагом  $\Delta\tau = 0.005$  для  $0 \leq \tau \leq 0.4$  и  $\Delta\tau = 0.05$  для  $\tau > 0.4$ .

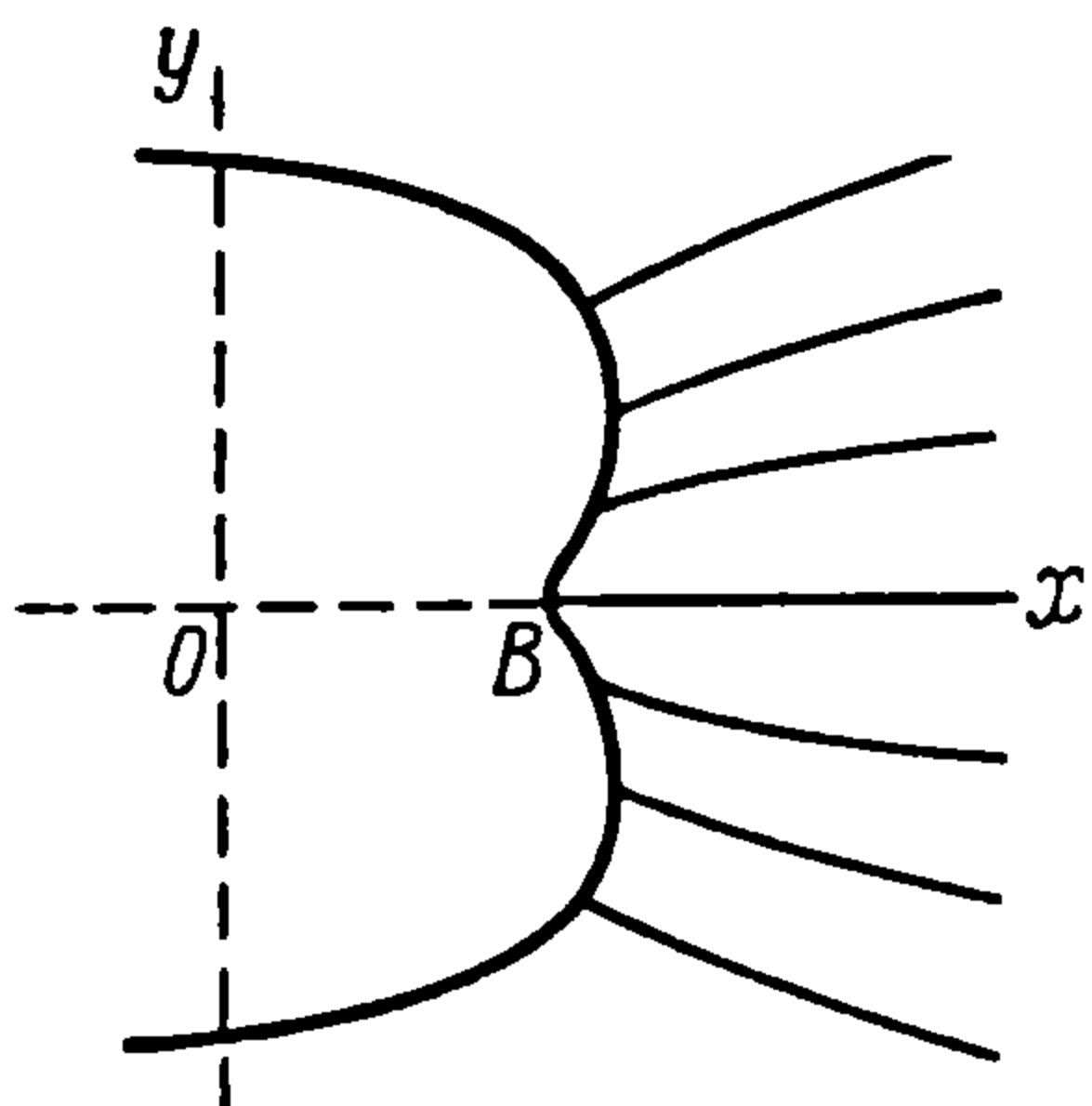
В расчетах и определении вида течений принимали участие В. И. Микута и Л. А. Донская.

Были введены безразмерные координаты, получившиеся в первом случае делением на  $b_1/v_m$ , а во втором — на  $-a_0/v_m$ . Тогда для решения (5.1) оказалось, что звуковая линия, совпадающая с предельной, имеет вид эвольвенты окружности радиуса  $q_*/\sqrt{\tau_*}$ , начинающейся в точке  $x^\circ = 0$ ,  $y^\circ = q_*/\sqrt{\tau_*}$ , где  $q_*$  и  $\tau_*$  отвечают критической скорости. Линии тока выходят из точек предельной линии ортогонально к ней со стороны ее выпуклости и в случае дозвукового течения закручиваются в ту же сторону, что и предельная линия, а в случае сверхзвукового течения слабо отклоняются в противоположную сторону. Значениям  $\theta > 0$  и  $\theta < 0$  отвечают две предельные линии, симметричные относительно оси  $y$ . Возможно лишь течение с одной из этих предельных линий, так как линии тока, отвечающие двум различным эвольвентам, взаимно пересекаются.



Фиг. 2

Более интересным оказалось течение, отвечающее решению (5.2). Здесь, во-первых, получается симметричное относительно оси  $x$  течение, качественно представленное на фиг. 1. В бесконечности слева скорости равны нулю, затем постепенно течение ускоряется, а линии тока очень медленно сближаются и оканчиваются на участке  $BC$  оси  $x$ , где можно считать распределенными стоки. В точке  $B$  скорость равна скорости звука, а в других точках  $BC$  она убывает от  $B$  к  $C$ , на  $AB$  функция  $\psi^\circ = 0$ .



Фиг. 3

Звуковая линия оказывается здесь состоящей из двух эвольвент окружности радиуса  $1/\sqrt{\tau_*}$ , начинающихся в точке  $x^\circ = 1/\sqrt{\tau_*}$ ,  $y^\circ = 0$  (точка  $B$  на фиг. 1) и являющихся ветвями линии тока  $\psi^\circ = 0$ . Из той же точки  $B$  под прямым углом к оси  $x$  выходит и предельная линия. Тогда оказывается возможным несимметричное смешанное течение газа, характеризуемое фиг. 2. Здесь  $ABE$  — линия тока  $\psi^\circ = 0$ , являющаяся на участке  $BE$

звуковой линией,  $BD$  — предельная линия. Ниже и правее  $ABE$  течение дозвуковое, причем линии тока постепенно сближаются вследствие роста скорости на них. В области  $DBE$  имеем сверхзвуковое течение. Зеркальным отображением в оси  $x$  можем получить еще одно такое же течение, отвечающее отрицательным  $\theta$ .

Наконец, при переходе на следующий лист римановой поверхности получаем чисто сверхзвуковое течение, представленное качественно на фиг. 3. При этом течение можно взять симметричным, участок оси  $x$  правее  $B$  будет линией тока  $\psi = 0$ .

Поступила 20 VII 1959

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. О газовых струях. Собр. соч., т. II, Гостехиздат, 1948.
2. Мизес Р., Шиффер М. О методе Бергмана интегрирования уравнений плоского движения сжимаемой жидкости. Сб. статей «Проблемы механики», стр. 489—518, 1955.