



Рассмотрим как меняется характер подхода характеристик к ударной волне при изменении угла  $\alpha$ . Обозначим через  $\sigma_0$  угол наклона характеристики набегающего потока к вектору скорости  $V_0$ . Рассматриваемой характеристике в течении с параллельными векторами скорости и поля соответствует характеристика с наклоном  $\sigma_{\parallel}$  и скорость  $V_{\parallel}$ , определяемые соотношениями [1]

$$V_0 = \frac{V_{\parallel}}{\cos \alpha} \frac{\operatorname{tg} \sigma_{\parallel}}{\operatorname{tg} \sigma_{\parallel} + \operatorname{tg} \alpha}, \quad \operatorname{tg} \sigma_0 = \frac{\operatorname{tg} \sigma_{\parallel} + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \sigma_{\parallel} \operatorname{tg} \alpha} \quad (1.2)$$

$$\operatorname{tg} \sigma_{\parallel} = \pm \sqrt{\frac{M_{\parallel}^2 - N^2(1 - M_{\parallel}^2)}{(1 - M_{\parallel}^2)(N^2 - M_{\parallel}^2)}} \quad \left(N^2 = \frac{H_0^2}{2\pi\kappa p_0}\right) \quad (1.3)$$

где  $M_{\parallel}$  — число Маха, соответствующее скорости  $V_{\parallel}$  и  $p_0$  — давление в набегающем потоке. С другой стороны,

$$V_0 = \frac{V_{0\parallel}}{\cos \alpha} \frac{\operatorname{tg} \sigma_{c\parallel}}{\operatorname{tg} \sigma_{c\parallel} + \operatorname{tg} \alpha}, \quad \operatorname{tg} \sigma_{0\parallel} = \pm \sqrt{\frac{M_{0\parallel}^2 - N^2(1 - M_{0\parallel}^2)}{(1 - M_{0\parallel}^2)(N^2 - M_{0\parallel}^2)}} \quad (1.4)$$

При малом  $\vartheta$ , очевидно,  $\sigma_{c\parallel} = \sigma_{0\parallel} + \delta$ ,  $\sigma_{\parallel} = \sigma_{0\parallel} + \tau$  и  $M_{\parallel} = M_{0\parallel} + \varepsilon$ , где  $\delta$ ,  $\tau$  и  $\varepsilon$  — величины порядка  $\vartheta$ . Подставляя эти выражения в первое соотношение (1.2) и (1.4), отбрасывая члены порядка  $\vartheta^2$  и исключая  $\varepsilon$ , с помощью (1.3) получим

$$\frac{\tau}{\delta} = \left\{ 1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \sigma_{0\parallel} (\operatorname{tg} \sigma_{0\parallel} + \operatorname{tg} \alpha) (M_{0\parallel}^2 - 1)^2 (M_{0\parallel}^2 - N^2)^2}{M_{0\parallel}^4 \operatorname{tg} \alpha [(N^2 - M_{0\parallel}^2) + N^2(1 - M_{0\parallel}^2)]} \right\}^{-1} \quad (1.5)$$

При  $\tau/\delta < 1$  характеристики, отходящие от линии тока  $AO_1B_1$ , упираются в скачок выше линии тока, и волна отходит от тела вверх; при  $\tau/\delta > 1$ , наоборот, характеристики, идущие от линии тока  $AO_1B_1$ , упираются в скачок ниже этой линии, и волна отходит от тела вниз.

Пусть  $\vartheta_{\parallel} > 0$  и  $M_{0\parallel} < 1$ . В этом случае  $\operatorname{tg} \sigma_{0\parallel} < 0$  [2]. При  $\alpha = 0$ , очевидно,  $\tau = 0$ . Характеристики подходят к волне снизу от линии тока  $AOB$ . При увеличении  $\alpha$  характеристики продолжают подходить снизу, но угол между ними и волной увеличивается, пока при некотором значении  $\alpha = \alpha_*$  они не станут перпендикулярными волне. При еще больших  $\alpha$  характеристики уже подходят к волне сверху. Критическое значение  $\alpha = \alpha_*$  соответствует  $\tau/\delta \rightarrow -\infty$ , т. е.

$$\operatorname{tg} \alpha_* = -\operatorname{tg} \sigma_{0\parallel} (1 - M_{0\parallel}^2) \frac{(N^2 - M_{0\parallel}^2) [M_{0\parallel}^2 - N^2(1 - M_{0\parallel}^2)]}{(N^2 - M_{0\parallel}^2) [M_{0\parallel}^2 - N^2(1 - M_{0\parallel}^2)] + N^4 M_{0\parallel}^2 (1 - M_{0\parallel}^2)} \quad (1.6)$$

Сравнивая это выражение с (1.1), видим, что  $\alpha_* < \omega$ , т. е. характеристики «выворачиваются» при меньших значениях  $\alpha$ , чем линия тока. Таким образом, при  $\alpha_* < \alpha < \omega$  ударные волны отходят от выпуклого угла. При  $-\operatorname{tg} \sigma_{0\parallel} > \operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \omega$  волна отходит от вогнутого угла, соответствующего  $\vartheta < 0$ . При  $\operatorname{tg} \alpha > -\operatorname{tg} \sigma_0$ , очевидно,  $\tau/\delta < 1$ . Та же картина получается и при  $M_{0\parallel} > 1$ .

Аналогичный анализ показывает, что для волн разрежения типа Прандтля — Майера точки  $\alpha = \alpha_*$  и  $\alpha = \omega$  также являются особыми точками (при  $\vartheta_{\parallel} < 0$ ). При  $\alpha = \alpha_*$  меняет свое направление на обратное веер характеристик, при  $\alpha = \omega$  меняет знак угол поворота вектора скорости. В интервале  $\alpha_* < \alpha < \omega$  поворот потока в вогнутом угле происходит в течении типа Прандтля — Майера.

**2. Течения при малых  $\alpha$ .** В работе [1] показано, что соотношения (1.2) дают параметрическое (параметр  $M_{0\parallel}$ ) решение уравнения четвертого порядка, определяющего наклон характеристик. Задаваясь  $\alpha$  и  $M_{0\parallel}$ , находим  $M_0$  и  $\text{tg } \sigma_0$ .

Согласно классификации работы [1] области, в которых имеются четыре действительные характеристики, называются гиперболическими, а области с двумя действительными характеристиками—эллиптико-гиперболическими. Зная соотношения между параметрами потока вдоль характеристик [1], можно построить, вообще говоря, полностью решение в гиперболических течениях или выделить гиперболическую часть решения в эллиптико-гиперболических течениях [1].

Проще всего это сделать в рамках линейной теории. Однако для построения течения даже по линейной теории нужно выяснить возможную конфигурацию ударных волн, так как для расчета течения необходимо знать, вдоль каких характеристик возмущения затухают при удалении на бесконечность. В общем случае возмущения могут распространяться как вниз по течению, так и вверх; поэтому для ответа на поставленный вопрос необходимо выяснить, какие из характеристик в действительности не уходят на бесконечность, а упираются в скачки уплотнения. При удалении на бесконечность вдоль этих характеристик возмущения в линейном приближении могут не затухать.

Характеристики являются ударными волнами нулевой интенсивности, поэтому может существовать столько же ударных волн, сколько и характеристик. Однако часть из них может быть проходящими волнами, не обусловленными обтекаемым телом. Таких волн в невозмущенном на бесконечности потоке, очевидно, существовать не должно.

Ниже на примере тонкого профиля с помощью результатов п. 1 будет исследован характер течения при  $\alpha \ll 1$ . При малых  $\alpha$  имеются все типы течений и в то же время анализ существенно упрощается.

**3. Гиперболические течения.** Гиперболическое течение имеет место при  $M > M_3 = [1 - 1/2(1 - N^2) \text{tg}^2 \alpha] \text{csc } \alpha$ . Рассмотрим отдельно несколько областей<sup>1</sup>.

$$(A) \quad M > \sqrt{1 + N^2} \text{csc } \alpha$$

Здесь имеется четыре волны [1]

$$(A1) \quad M_{\parallel} < -1, \quad 0 > \text{tg } \sigma_{\parallel} > -\text{tg } \alpha, \quad \text{tg } \alpha > \text{tg } \sigma > 0$$

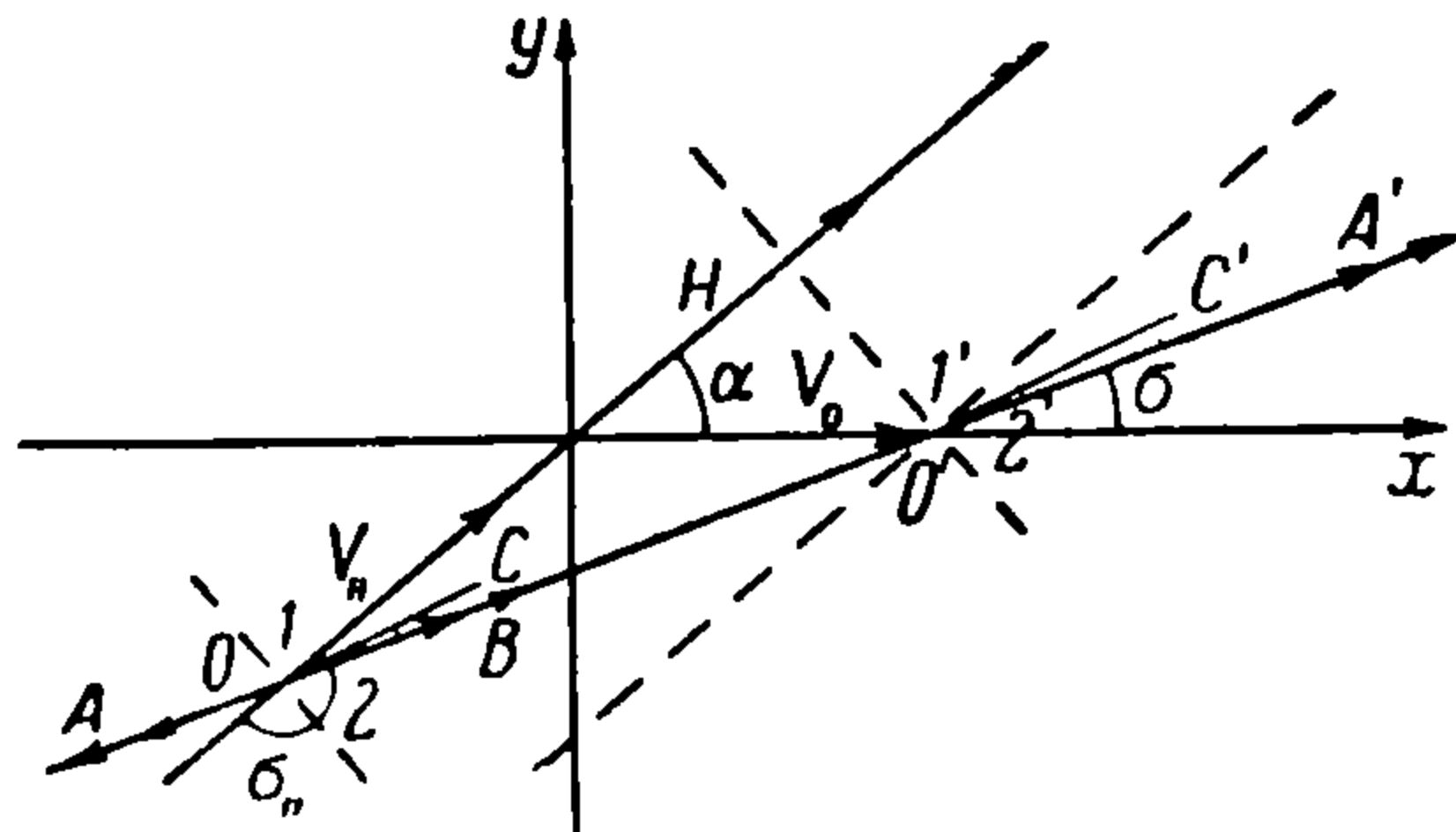
На фиг. 2 показана диаграмма скоростей, соответствующая этим параметрам. Согласно (1.1) при  $|M_{\parallel}| > 1$  конец вектора скорости после волны с наклоном  $\sigma_{\parallel} > 1/2 \pi$  окажется в квадранте I. Двойная стрелка A показывает характер подхода характеристик к волне, а следовательно, ее направление. В рассматриваемом случае волна отходит от излома в точке 0. Накладывая скорость, параллельную волне, найдем (фиг. 2), что вектор скорости после волны при  $\alpha \neq 0$  должен лежать в квадранте I'. Из (1.5) следует, что  $\tau/\delta > 1$ . Поэтому характеристики подходят к волне как

<sup>1</sup> В дальнейшем нет необходимости различать между собой  $\sigma_C$  и  $\sigma_0$ ;  $\sigma_{C\parallel}$ ,  $\sigma_{0\parallel}$  и  $\sigma_{\parallel}$ ;  $M_{0\parallel}$  и  $M_{\parallel}$ . Ниже для каждой из этих групп примем соответственно обозначения  $\sigma$ ,  $\sigma_{\parallel}$  и  $M_{\parallel}$ . Вместо  $M_0$  для простоты будет писать  $M$ .

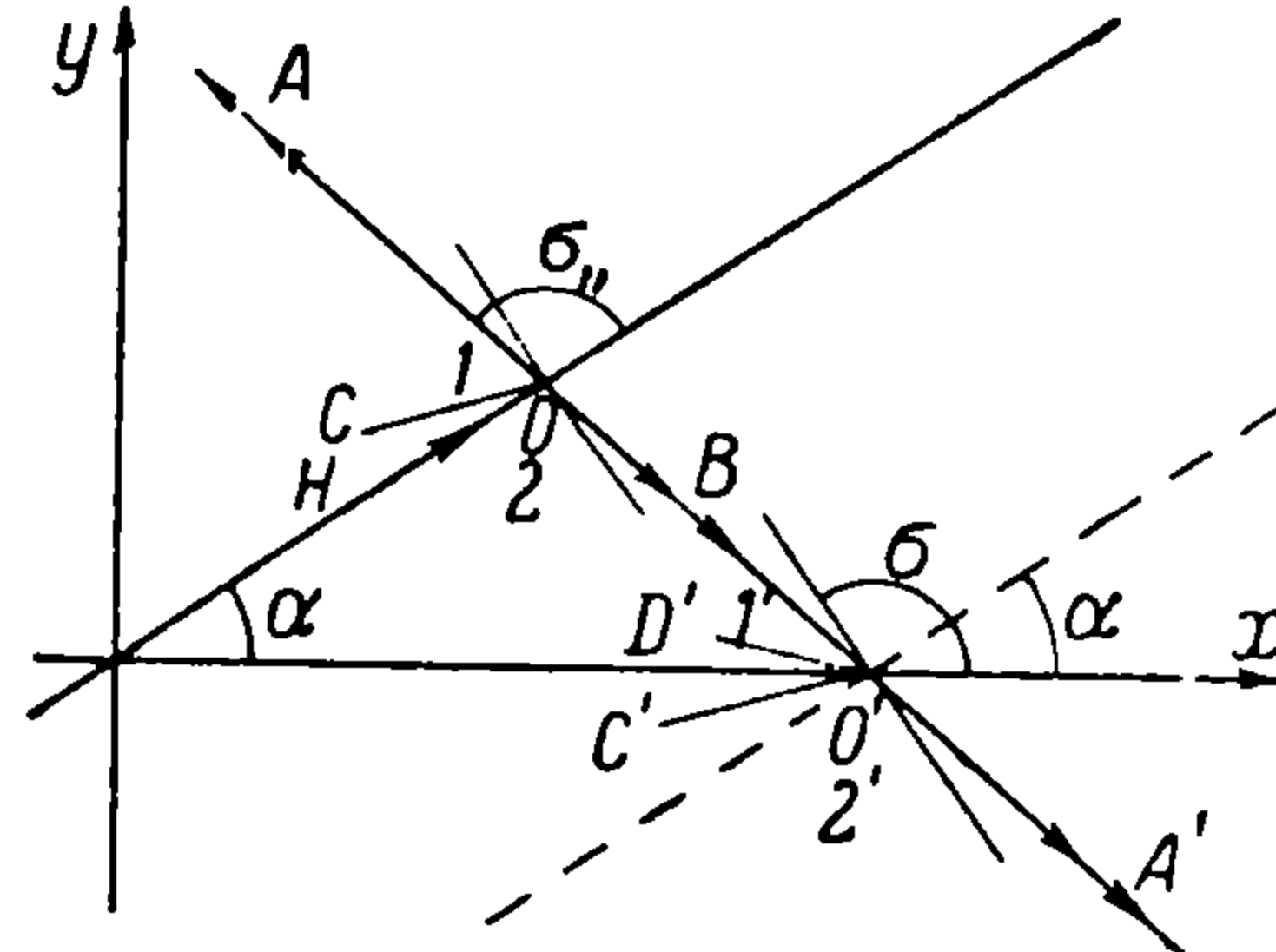
стрелки  $A'$ . Следовательно, волна уходит вниз по потоку от вогнутой линии тока на верхней поверхности тела.

$$(A2) \quad -1 < M_{\parallel} < 0, \quad 0 > \operatorname{tg} \sigma_{\parallel} > -\operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \sigma > 0$$

Поскольку здесь  $|M_{\parallel}| < 1$ , то согласно (1.1) вектор скорости после волны при  $\alpha = 0$  окажется на линии  $OC$  (фиг. 2) и направление волны



Фиг. 2

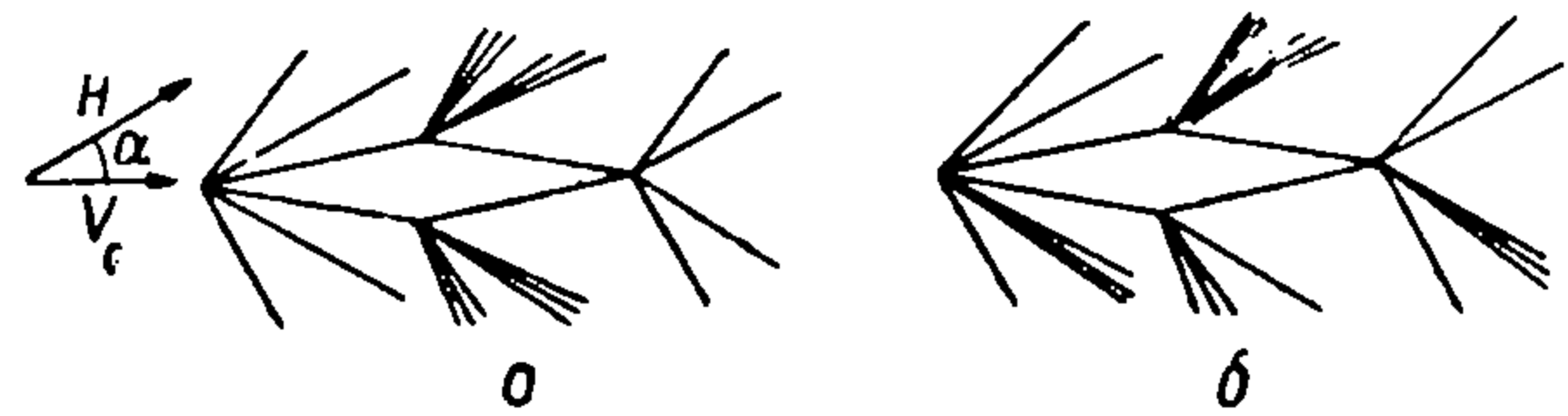


Фиг. 3

определяется стрелками  $B$ . В соответствующем течении при  $\alpha \neq 0$  вектор скорости после волны будет лежать на линии  $O'C'$ , а направление волны дается стрелками  $A'$ , так как здесь  $\tau/\delta < 1$ . Таким образом, эта волна имеет тот же характер, что и предыдущая.

$$(A3) \quad M_{\parallel} < 1, \quad \operatorname{tg} \sigma_{\parallel} = -k \operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{tg} \sigma = (1 - k) \operatorname{tg} \alpha, \quad 1 \leq k \leq 1 + N^2$$

Из (1.2), (1.3) и (1.1) легко находим, что  $0 < \operatorname{tg} \omega < \operatorname{tg} \alpha$  при  $k < 1 + N^2$  и  $\operatorname{tg} \omega > \operatorname{tg} \alpha$  при  $k > 1 + N^2$ . Следовательно, вектор скорости после волны (фиг. 3) должен лежать на линии  $O'C'$ , а волна отходит от вогнутого вниз излома  $O'$  в направлении стрелки  $A'$ , так как при  $\alpha = 0$  она была направлена по стрелке  $A$  и  $\tau/\delta > 1$ .



Фиг. 4

$$(A4) \quad M_{\parallel} > 1, \quad \operatorname{tg} \sigma_{\parallel} < -\operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{tg} \sigma < 0$$

Диаграмма скоростей дана на фиг. 3. Поскольку  $M_{\parallel} > 1$ , то конец вектора скорости после волны окажется в квадранте  $2'$ . Согласно (1.5) имеем  $\tau/\delta < 1$ , и, следовательно, снова волна направлена по стрелке  $A'$ , так как в соответствующем течении с  $\alpha = 0$  волна направлена по стрелке  $B$ .

Таким образом, последние две волны могут отходить вниз по потоку от вогнутых линий тока на нижней поверхности. Общий характер волн около профиля в рассматриваемом случае показан на фиг. 4,а.

$$(B) \quad \sqrt{1 + N^2}/(N \cos \alpha) < M < \sqrt{1 + N^2} \operatorname{csc} \alpha$$

Здесь снова имеется [1] четыре волны

$$(B1) \quad -1 < M_{\parallel} < 0, \quad 0 > \operatorname{tg} \sigma_{\parallel} > -\operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \sigma > 0$$

волна типа (A2)

$$(B2) \quad M_{\parallel} < 1, \quad \operatorname{tg} \sigma_{\parallel} = -k \operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{tg} \sigma = (1 - k) \operatorname{tg} \alpha, \quad 1 \leq k < 1 + N^2$$

волна типа (A3)

$$(B3) \quad M_{\parallel} > 1, \quad \operatorname{tg} \sigma_{\parallel} < -\operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{tg} \sigma < 0$$

волна типа (A4)

$$(B4) \quad M_{\parallel} > 1, \quad \operatorname{tg} \sigma_{\parallel} > 0, \quad \operatorname{tg} \sigma > \operatorname{tg} \alpha$$

В случае (В.4) диаграмма скоростей показана на фиг. 5. Легко видеть, что вектор скорости после волны должен лежать в квадранте 1'.

Далее из (1.1) и (1.3) видно, что  $\operatorname{tg} \omega \rightarrow \infty$  при  $M_{\parallel} \rightarrow \infty$ . Найдем значение  $M_{\parallel}$ , при котором  $\omega = \alpha$ . Имеем

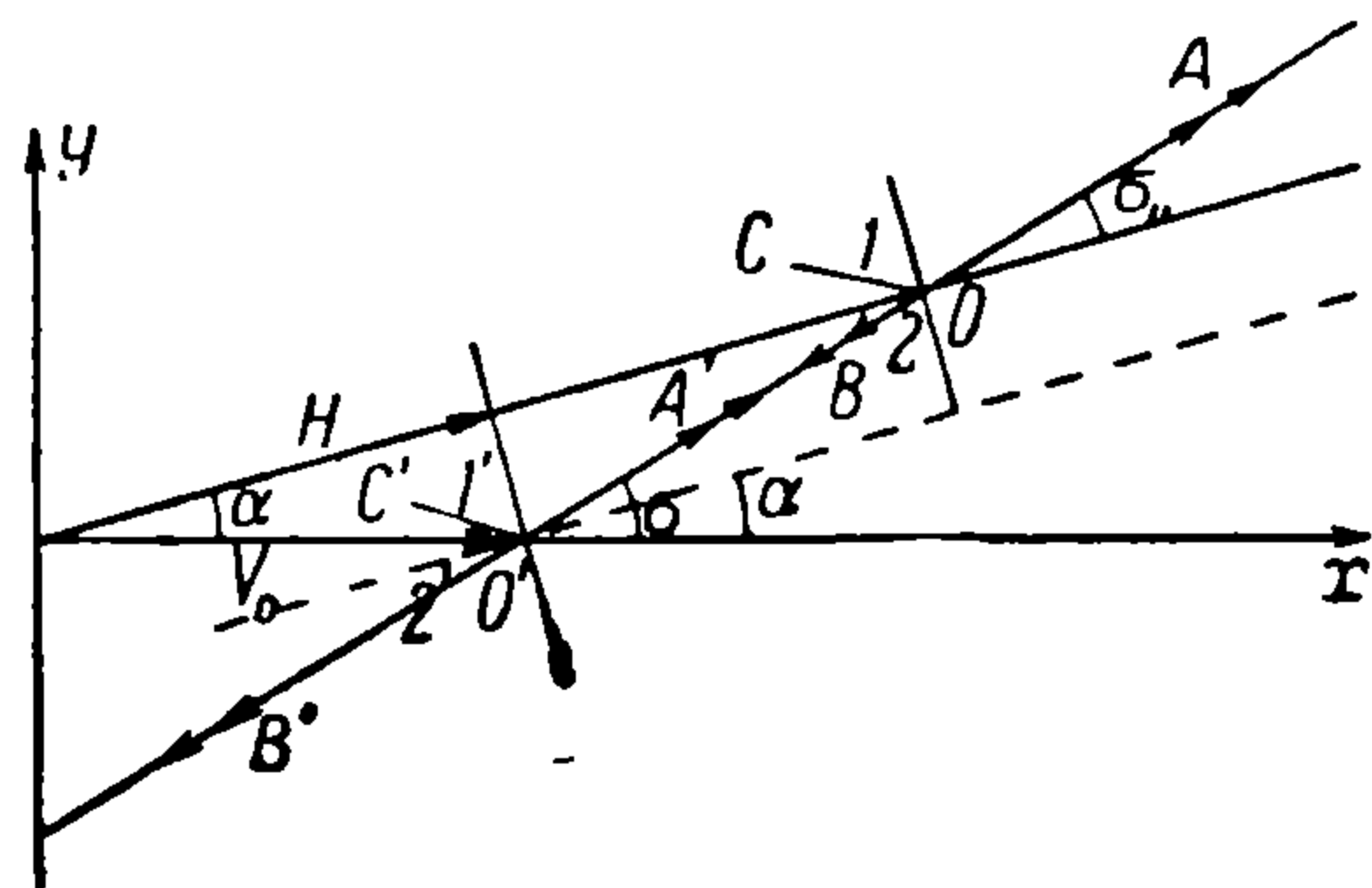
$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{[M_{\parallel}^2(1+N^2) - N^2](M_{\parallel}^2 - 1)}{M_{\parallel}^2 - N^2}}$$

Очевидно, что это равенство при  $M_{\parallel} > 1$  может выполняться, если  $M_{\parallel} = 1 + 0(\alpha^2)$ . Отбрасывая величины высшего порядка малости, получим

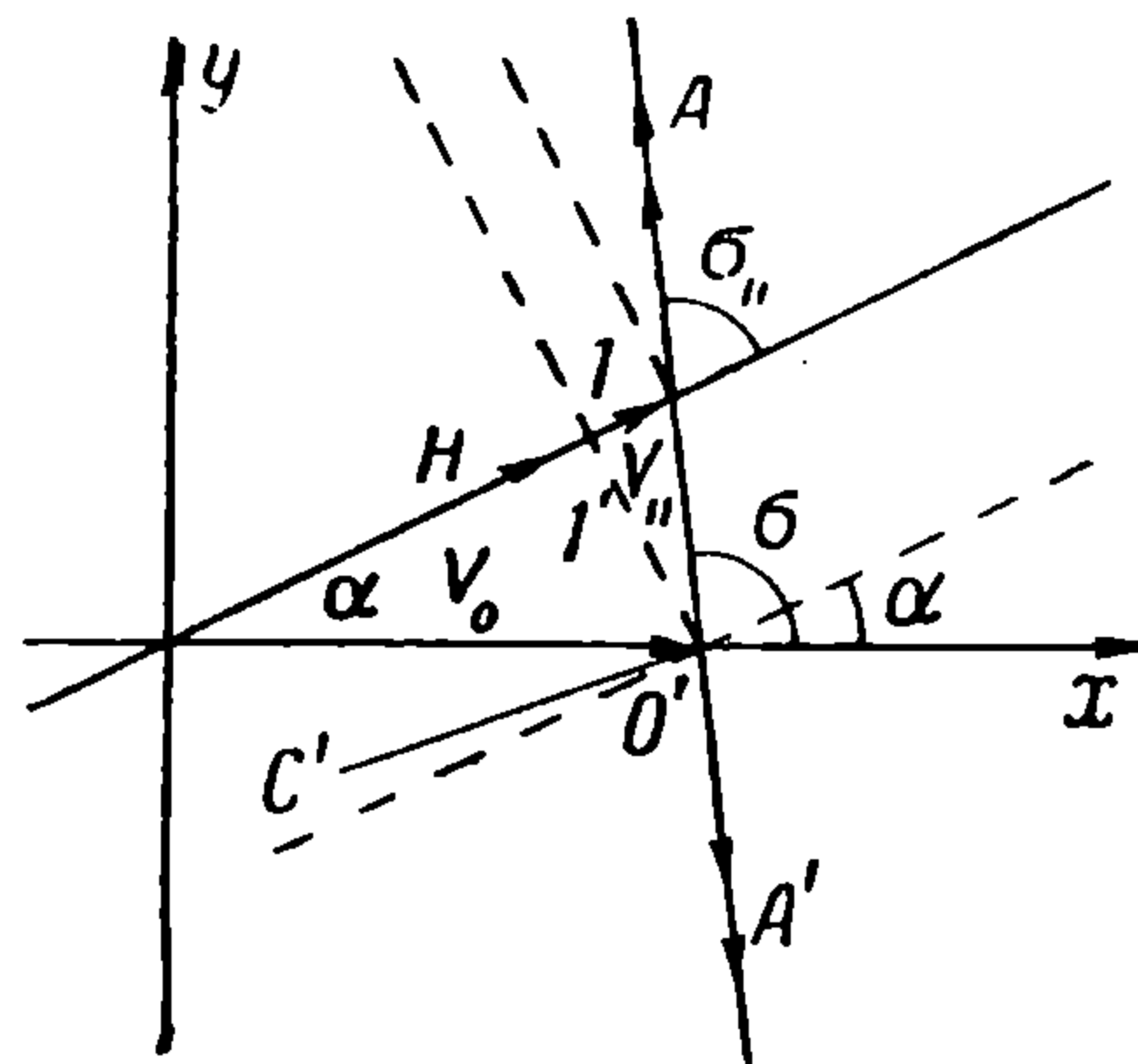
$$M_{\parallel} = 1 + \frac{1}{2}(1 - N^2) \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad \operatorname{tg} \sigma_{\parallel} = [(1 - N^2) \operatorname{tg} \alpha]^{-1}$$

$$M = [1 - \frac{1}{2}(1 - N^2) \operatorname{tg}^2 \alpha] \sec \alpha$$

Легко проверить, что эти значения соответствуют точке  $M = M_3$ , в которой кривая  $M = f(M_{\parallel})$  имеет минимум [1]. Следовательно, в рассматриваемом диапазоне чисел  $M$  имеем  $\omega > \alpha$  и конец вектора скорости после



Фиг. 5



Фиг. 6

волны лежит на линии  $O'C'$  (фиг. 5). Далее легко проверить, что вдоль рассматриваемой кривой  $\tau/\delta < 1$ . Поэтому волна направлена по стрелке  $A'$ . Таким образом, общая картина волн около профиля (фиг. 4, а) будет той же, что и в случае (А)

$$(C) \quad \sec \alpha \leq M \leq \sqrt{1 + N^2} / N \cos \alpha$$

В этом случае имеются три волны (С1), (С3), (С4) такие же, как волны (В1), (В3) и (В4). Волна (С2) отличается от волны (В2) или (А3) лишь тем, что здесь  $k > 1 + N^2$ , а следовательно, согласно сказанному выше (случай (А3)),  $\operatorname{tg} \omega > \operatorname{tg} \alpha$ . Следовательно, конец вектора скорости (фиг. 3) после волны лежит на линии  $O'D'$ , т. е. в волне происходит поворот на положительный угол  $\vartheta$ . Таким образом, эта волна может отходить вниз по потоку от выпуклых изломов нижней поверхности профиля, и общая картина течения будет как на фиг. 4, б, где  $|\operatorname{tg} \sigma_3| > \operatorname{tg} |\sigma_2|$

$$(D) \quad [1 - \frac{1}{2}(1 - N^2) \operatorname{tg}^2 \alpha] \sec \alpha < M < \sec \alpha$$

Волны (D1), (D2) и (D4) совпадают соответственно с (С1), (С2) и (С4).

$$(D3) \quad M_{\parallel} > 1, \quad \operatorname{tg} \sigma_{\parallel} > \operatorname{ctg} \alpha, \quad \operatorname{tg} \sigma < -\operatorname{ctg} \alpha$$

(в точке  $M = M_3$  имеем  $\operatorname{tg} \sigma_{\parallel} = \operatorname{ctg} \alpha$ )

Соответствующая диаграмма скоростей дана на фиг. 6.

Выше (случай (В4)) показано, что на кривой  $M = f(M_{\parallel})$  правее точки  $M = M_3$  всегда  $\omega > \alpha$  и  $\tau/\delta < 1$ . Можно показать, что левее этой точки  $\omega < \alpha$  и  $\tau/\delta > 1$ . Следовательно, конец вектора скорости после волны лежит на  $O'C'$  (фиг. 6), а волна отходит от вогнутого угла по стрелке  $A'$  и картина течения опять представляется фиг. 4, б.

4. **Эллиптико-гиперболические течения.** Эти течения имеют место [1] при  $M_3 > M > M_2$ , область (E), и при  $0 < M < M_1$ , область (F). В каждой из этих областей имеется по две характеристики<sup>1</sup>.

В работе [1] показано, что в этой области течение можно разбить на гиперболическую незатухающую на бесконечности и эллиптическую затухающую части. Незатухающие возмущения распространяются вдоль характеристик, упирающихся в ударные волны.

В области (E) могут существовать волны типа (C1) и (C2). Картина течения показана на фиг. 7,а.

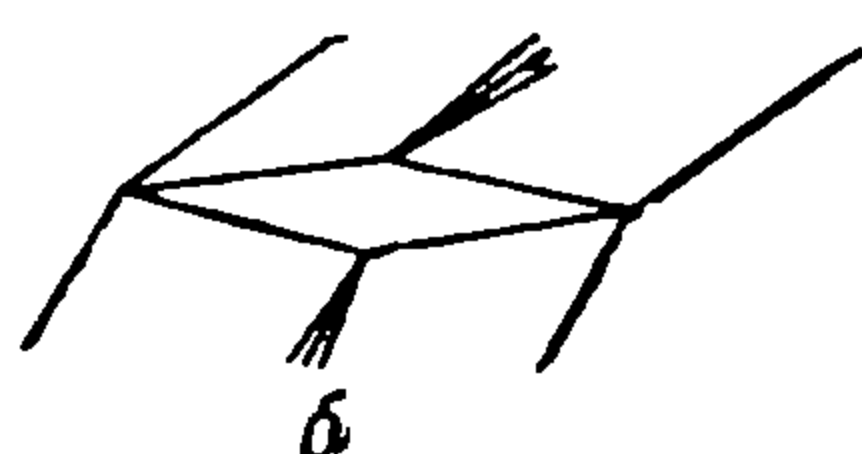
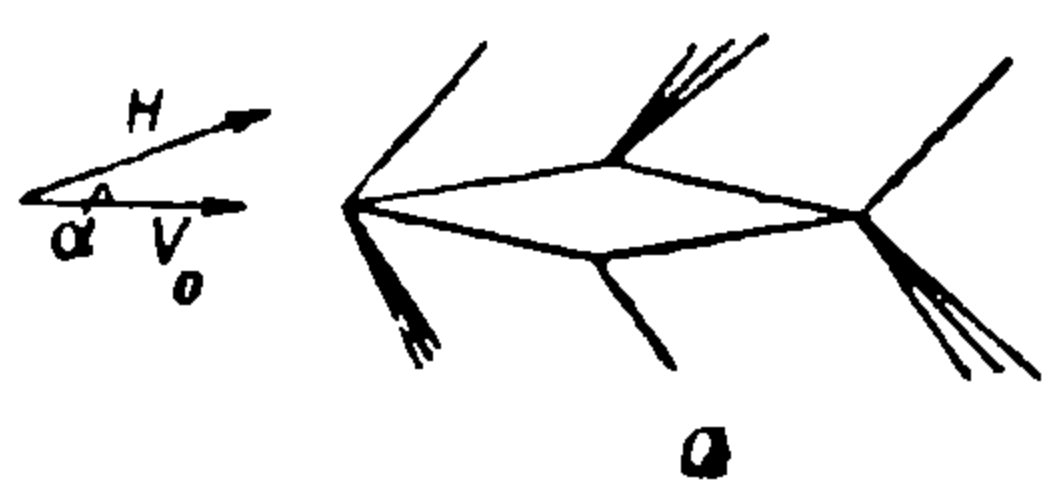
В области (F) также имеется две волны

$$(F1) \quad \text{(волны типа (B1))}$$

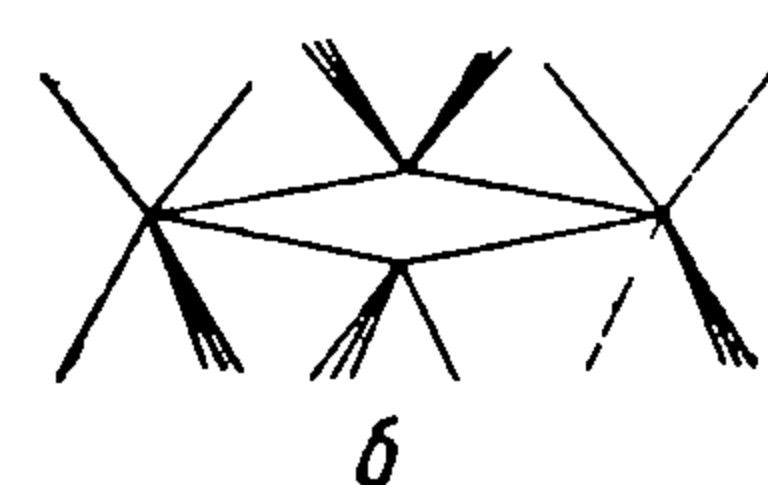
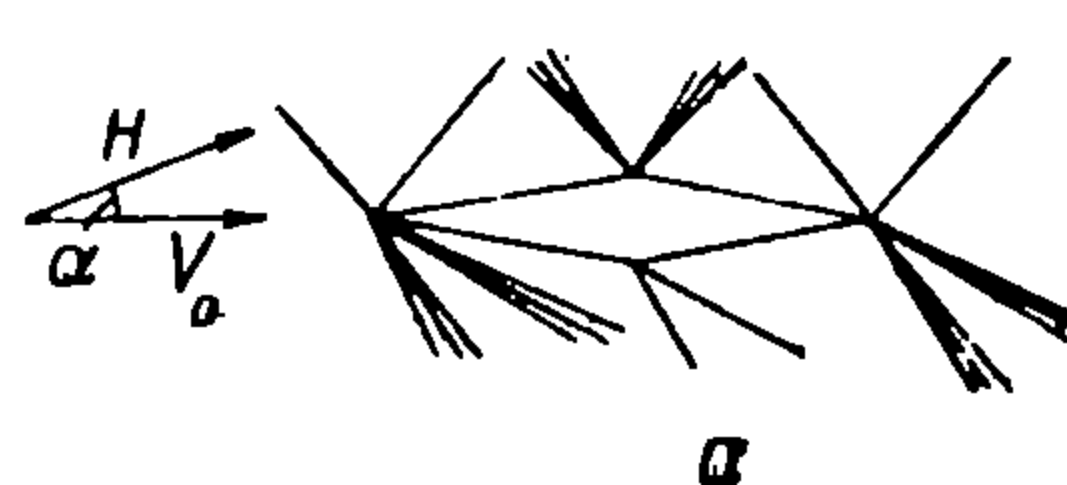
$$(F2) \quad 1 > M_{\parallel} > 0, \quad \operatorname{tg} \sigma_{\parallel} > 0, \quad \operatorname{tg} \sigma > \operatorname{tg} \alpha$$

Из диаграммы скоростей (фиг. 5) видно, что конец вектора скорости после волны должен лежать в квадранте 2', и так как по (1.5) имеем  $\tau/\delta < 1$ , то волна направлена по стрелке B.

Общий характер течения в этом случае показан на фиг. 7,б. Здесь также на разрывную гиперболическую часть течения накладывается затухающее эллиптическое течение [1].



Фиг. 7



Фиг. 8

5. **Квазигиперболические течения.** Эти течения имеют место [1] при  $M_1 < M < M_2$ . Здесь вновь имеются четыре действительные характеристики. Кривая  $M = f(M_{\parallel})$  для  $\operatorname{tg} \sigma_{\parallel} < 0$  имеет максимум в точке  $M_2$  и минимум в точке  $M_1$ . При малых  $\alpha$  значения  $M_{\parallel}$ , соответствующие точкам  $M_1$  и  $M_2$ , лежат соответственно вблизи  $M_{\parallel} = N/\sqrt{1+N^2}$  и  $M_{\parallel} = N$ .

Пусть  $M_{\parallel}^2 = N^2 - k^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$ . При  $k = 0$ , очевидно,  $M = N \sec \alpha$ . При  $k > 0$

$$\operatorname{tg} \sigma_{\parallel} = \frac{-N^2}{k(1-N^2)\operatorname{tg} \alpha}, \quad \operatorname{tg} \sigma = \frac{-N^2}{[N^2 + (1-N^2)k]\operatorname{tg} \alpha}$$

$$M = \frac{N}{\cos \alpha} \left\{ 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \left[ \frac{k^2}{2N^2} - \frac{k(1-N^2)}{N^2} \right] \right\} \quad (5.1)$$

Легко проверить, что точке  $M_2$  соответствует  $k = 1 - N^2$ . При  $k = 2(1 - N^2)$  снова имеем  $M = N \sec \alpha$ .

Рассмотрим характер течения вблизи точки  $M_2$

$$(G) \quad N \sec \alpha < M < N \sec \alpha [1 + 1/2(1 - N^2)N^{-2} \operatorname{tg}^2 \alpha]$$

Очевидно, что волны (G1) и (G2) будут типа (C1) и (C2)

$$(G3) \quad M_{\parallel} = N(1 - 1/2 k^2 N^{-2} \operatorname{tg}^2 \alpha)$$

при этом  $\operatorname{tg} \sigma_{\parallel}$  и  $\operatorname{tg} \sigma$  определяются (5.1) при  $1 - N^2 < k < 2(1 - N^2)$

<sup>1</sup> Значения  $M_1$  и  $M_2$  даны в § 5.

Диаграмма скоростей дана на фиг. 3. При достаточно малых  $\alpha$  вдоль части кривой  $M = f(M_{\parallel})$  (при  $\operatorname{tg} \sigma_{\parallel} < 0$ ), лежащей в квазигиперболической области,  $\omega > \alpha$ . Подстановкой (5.1) в (1.5) легко проверить, что  $\tau/\delta < 1$  левее точки  $M_2$ . Следовательно, рассматриваемая волна направлена по стрелке  $A$  и может отходить вверх по потоку от вогнутых изломов на верхней поверхности профиля.

Волна (G4) отличается от предыдущей лишь тем, что здесь  $0 < k < (1 - N^2)$  и  $\tau/\delta > 1$ . Поэтому согласно фиг. 3 волна должна быть направлена по стрелке  $A'$  и может отходить вниз по потоку от выпуклых изломов нижней поверхности профиля. Таким образом, картина течения в этом случае будет такой, как на фиг. 8, а.

Рассмотрим теперь окрестность точки  $M_1$ . Пусть  $M_{\parallel}^2 = N^2(1 + N^2)^{-1} + \varepsilon^2$  и  $\operatorname{tg} \sigma_{\parallel} = -k \operatorname{tg} \alpha$ . Тогда из (1.3) имеем

$$M = \frac{N}{\cos \alpha} \frac{2k(1 + N^2)^2 + k^3 N^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{2(1 + N^2)^{3/2}(k - 1)}, \quad \varepsilon = k N^2 (1 + N^2)^{-1/2} \operatorname{tg} \alpha \quad (5.2)$$

Точке  $M_1$  соответствует

$$k = (B \operatorname{tg} \alpha)^{-2/3} \quad \left( B = \frac{N}{(1 + N^2)} \right)$$

Тогда

$$M_1 = N (\cos \alpha \sqrt{1 + N^2})^{-1} [1 + 1/2 (B \operatorname{tg} \alpha)^{2/3}] [1 - (B \operatorname{tg} \alpha)^{2/3}]^{-1}$$

$$(H) \quad M_1 < M < N \sec \alpha$$

Волны (H1) и (H2) совпадают с волнами (C1) и (C2). Легко проверить, что правее точки  $M_1$ , должно быть  $\tau/\delta < 1$  и волна (H3) имеет тот же характер, что и (C3)

$$(H4) \quad M_{\parallel} < 1, \quad \operatorname{tg} \sigma_{\parallel} > 0, \quad \operatorname{tg} \sigma > 0$$

Диаграмма скоростей здесь соответствует фиг. 5. Поскольку здесь  $\tau/\delta < 1$  и конец вектора скорости после волны должен лежать в квадранте  $2'$ , то волна направлена по стрелке  $B'$  и картина течения имеет вид, показанный на фиг. 8, б.

Заметим, что приведенная на фиг. 4, 7 и 8 картина течения построена в предположении, что в любой угловой точке в каждой из волн имеет место поворот потока в одну и ту же сторону. Вообще говоря, это не всегда так, и пример этому имеется в работе [1]. Может оказаться, например, что в первом скачке уплотнения поток поворачивается на угол, больший, чем угол тела, тогда за ней вместо второй ударной волны может пройти волна разрежения. Этот вопрос решается для каждого конкретного случая отдельно. В приведенном рассмотрении важно лишь то, что вдоль характеристик, совпадающих с ударными волнами, возмущения могут не затухать.

Отметим также, что если контур не имеет точки излома, то на некотором расстоянии от профиля образуется «висячая» ударная волна.

Поступила 14 XI 1959

#### ЛИТЕРАТУРА

1. К о г а н М. Н. Плоские течения идеального газа с бесконечной электропроводностью в магнитном поле, не параллельном скорости потока. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 1.
2. К о г а н М. Н. Магнитодинамика плоских и осесимметричных течений газа с бесконечной электрической проводимостью. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 1.