Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ТЕЧЕНИИ В ДИФФУЗОРЕ В ПРИСУТСТВИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

А. Б. Ватажин

(Москва)

1. Установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости в присутствии магнитного поля $\mathbf{H}$ описывается системой уравнений магнитогидродинамики

$$(\mathbf{v}\Delta)\,\mathbf{v} = \nabla\left(\frac{p_0}{\rho} - \frac{p}{\rho}\right) + \nu\Delta\mathbf{v} + \operatorname{rot}\mathbf{h}\times\mathbf{h}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{h} = 0, \qquad \operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{h}) + \nu_m\Delta\mathbf{h} = 0 \tag{1.1}$$

$$\left(\mathbf{H} = \frac{\mathbf{h}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad \nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}\right)$$

Здесь ν_m — «магнитная» вязкость, σ — проводимость среды, c — скорость света в пустоте, p_0 — давление в какой-либо фиксированной точке потока; остальные обозначения общеприняты.

Система (1.1) служит для определения скорости $\mathbf{v}$, величины $\mathbf{h}$, имеющей размерность скорости, и величины $(p_0 - p)/\rho$.

В случае плоских движений независимыми переменными и определяющими величинами будут расстояние от начала координат r, полярный угол θ, коэффициенты кинематической и магнитной вязкости ν и ν_m.

Предположим, что рассматриваемые течения вполне определяются указанным набором параметров, некоторыми безразмерными константами ξ, а также размерными константами $Q_1, \ldots, Q_n$, имеющими размерность

$$[Q_i] = L^{p_i}T^{q_i}$$

Тогда, применяя соображения теории подобия и размерности [1], определяемые величины v_r, v_θ, h_r, h_θ и $(p_0 - p)/\rho$ можно выразить

$$v_r = \frac{\nu}{r}f, \quad v_\theta = \frac{\nu}{r}\varphi, \quad h_r = \frac{\nu}{r}\psi, \quad h_\theta = \frac{\nu}{r}\beta, \quad \frac{p_0 - p}{\rho} = \frac{\nu^2}{r^2}F \tag{1.2}$$

Здесь p_0 — давление на бесконечности, функции f, φ, ψ, β, F зависят от безразмерных величин: θ, ν_m/ν, ξ, $\delta_1, \ldots, \delta_n$

$$\delta_i = Q_i r^{-(p_i + 2q_i)}\nu^{q_i}$$

Как и в книге [1], предположим, что $p_i + 2q_i = 0$. Тогда размерности величин Q_i представляют некоторые степени размерности коэффициента кинематической вязкости ν, и функции f, φ, ψ, β и F не зависят от r. Подставляя выражения (1.2) в систему (1.1), получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\varphi = \varphi_0 \equiv \text{const}, \qquad \beta = \beta_0 \equiv \text{const}, \qquad f\beta_0 - \psi\varphi_0 + \nu_m\psi'/\nu = 0$$

$$f'' - \varphi_0 f' + f^2 + \varphi_0{}^2 - 2F + \beta_0\psi' = 0, \qquad F' + 2f' - \psi\psi' = 0 \tag{1.3}$$

Интегрирование последнего уравнения системы (1.3) дает

$$F + 2f - \frac{1}{2}\psi^2 = C \qquad (C = \mathrm{const}) \tag{1.4}$$

Исключая F, получим систему третьего порядка для определения функций $f(\theta)$ и $\psi(\theta)$

$$f'' - \varphi_0 f' + f^2 + 4f + \beta_0\psi' - \psi^2 + \varphi_0^2 - 2C = 0$$

$$f\beta_0 - \psi\varphi_0 + \nu_m\psi' / \nu = 0 \tag{1.5}$$

Исключив $f(\theta)$, систему (1.5) можно свести к одному нелинейному уравнению третьего порядка относительно функции $\psi(\theta)$.

Используя обобщенный закон Ома, можно показать, что рассматриваемый класс течений имеет равный нулю вектор электрического поля. Движение можно трактовать как течение жидкости в магнитном поле. создаваемом током в начале координат, протекающим перпендикулярно плоскости r, θ. В этом случае по закону Био — Саварра $h_\theta = h_0 / r$ и постоянная h_0 имеет размерность коэффициента кинематической вязкости.

2. Рассмотрим течение от источника (стока) между двумя плоскими стенками, наклоненными одна к другой под углом α (диффузоре). Пусть проводимость среды бесконечна. Магнитное поле создается током I_0, протекающим в вершине угла диффузора. Если отсутствует циркуляционная скорость v_θ, распространение жидкости в область, занятую полем, как следует из второго уравнения (1.5), невозможно: в силу $\nu_m = 0$, $\beta_0 \neq 0$, $\varphi_0 = 0$ получаем $f \equiv 0$. Если допустить возможность циркуляционной скорости $v_\theta = \Gamma / 2\pi r$ (например, в стенках угла сделаны поры для протекания жидкости по нормали к поверхности), то течение от источника (стока) может иметь место. Для функции $f(\theta)$ из системы (1.5) получаем уравнение второго порядка

$$f'' + f'(\beta_0^2 - \varphi_0^2) / \varphi_0 - f^2(\beta_0^2 - \varphi_0^2) / \varphi_0^2 + 4f + \varphi_0^2 - 2C = 0 \tag{2.1}$$

для решения которого и определения постоянной C служат условия прилипания жидкости к стенкам и задание расхода Q через диффузор

$$f(\pm {}^1/_2\alpha) = 0, \qquad \int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} f\, d\theta = \frac{Q}{\nu} \tag{2.2}$$

Решение задачи будет даваться формулами

$$v_r = \frac{\nu}{r} f(\theta), \qquad v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \qquad h_r = \frac{4\pi\nu I_0}{c\Gamma\sqrt{4\pi\rho}\, r} f(\theta), \qquad h_\theta = \frac{2I_0}{c\sqrt{4\pi\rho}\, r}$$

$$\frac{p_0 - p}{\rho} = \frac{\nu^2}{r^2}\left(C - 2f + \frac{2\pi I_0^2 f^2}{c^2\rho\Gamma^2}\right) \tag{2.3}$$

Величины β_0 и φ_0, входящие в уравнение (2.1), выражаются через ток I_0 и циркуляцию Γ

$$\varphi_0 = \Gamma / 2\pi\nu, \qquad \beta_0 = 2I_0 / c\nu\sqrt{4\pi\rho}$$

Уравнение (2.1) наиболее упрощается в случае $\beta_0 = \varphi_0$ ($\Gamma = \sqrt{4\pi} I_0 / c\sqrt{\rho}$) и легко интегрируется. Для скорости и семейства линий тока получаются выражения

$$v_r = \frac{Q}{r}\frac{\cos 2\theta - \cos\alpha}{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}, \qquad r(\theta) = A\exp\left(\frac{\pi Q}{\Gamma}\frac{\sin 2\theta - 2\theta\cos\alpha}{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}\right)$$

Как видно из (2.3), векторы скорости и напряженности магнитного поля коллинеарны.

3. Течение жидкости конечной электропроводности в диффузоре с углом раскрытия α описывается системой (1.5), в которой надо положить $\varphi_0 = 0$ (имеется только радиальная скорость). Для решения этой системы третьего порядка и определения постоянной C, входящей в выражение (1.4) для определения давления, необходимо иметь четыре условия. Три из них есть условия прилипания к стенкам и задания расхода (2.2). В качестве четвертого условия, налагаемого на индуцированное магнитное поле ψ, можно, например, принять, что компонента H_r магнитного поля принимает равные по величине и противоположные по знаку значения на линии $r = \mathrm{const}$ в точках пересечения со стенками диффузора.

Введем обозначения

$$\frac{|Q|}{\nu} = R, \qquad \frac{|Q|}{\nu_m} = R_m, \qquad \frac{\beta_0^2\nu}{4\nu_m} = M^2$$

Здесь R имеет значение гидродинамического числа Рейнольдса, R_m — магнитного числа Рейнольдса, M — числа Гартмана. Так как для величин $f(\theta)$ и $\psi(\theta)$, входящих в систему (1.5), справедливы оценки $f(\theta) \sim R$, $\psi(\theta) \sim \beta_0 R_m$, удобно перейти к функциям $u(\theta)$ и $\lambda(\theta)$ по формулам

$$f(\theta) = Ru(\theta), \qquad \psi(\theta) = R_m\beta_0\lambda(\theta)$$

Уравнения (1.5) и граничные условия тогда приводятся к виду

$$u'' + Ru^2 + 4u + 4M^2\lambda' - 4R_mM^2\lambda^2 - D = 0, \qquad u + \lambda' = 0$$
$$u\left(\pm\frac{1}{2}\alpha\right) = 0, \qquad \lambda\left(+\frac{1}{2}\alpha\right) = -\lambda\left(-\frac{1}{2}\alpha\right), \qquad \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} u(\theta)\,d\theta = \pm 1 \tag{3.1}$$

В последнем выражении (3.1) верхний знак соответствует источнику, нижний — стоку. Скорость, магнитное поле и давление вычисляются по формулам

$$v_r = \frac{|Q|}{r}u(\theta), \qquad H_\theta = \frac{\sqrt{4\pi\rho}\,\nu\beta_0}{r}, \qquad \beta_0 = \frac{2I_0}{c\nu\sqrt{4\pi\rho}}$$
$$H_r = \frac{R_m\beta_0\nu\sqrt{4\pi\rho}}{r}\lambda(\theta), \qquad \frac{p_0 - p}{\rho} = \frac{\nu^2 R}{r^2}\left(\frac{D}{2} - 2u + 2M^2R_m\lambda^2\right) \tag{3.2}$$

В дальнейшем будут рассматриваться случаи малой проводимости $R_m \ll 1$), когда в первом уравнении (3.1) и соотношениях (3.2) можно пренебречь членами с коэффициентом R_mM^2. Величина же M^2 в случае сильных внешних полей может быть большой. Движение описывается системой

$$u'' + Ru^2 + 4(1 - M^2)u - D = 0, \quad u\left(\pm\tfrac{1}{2}\alpha\right) = 0, \quad \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} u\,d\theta = \pm 1 \tag{3.3}$$

а давление выражается

$$\frac{p_0 - p}{\rho} = \frac{\nu^2 R}{r^2}\left(\frac{D}{2} - 2u\right) \tag{3.4}$$

Уравнение (3.3) интегрируется в эллиптических функциях. Разберем простейшие случаи.

4. Рассмотрим течение жидкости, когда числа Рейнольдса R малы. Уравнение (3.3) упрощается и переходит в уравнение

$$u'' + 4(1 - M^2)u = D \tag{4.1}$$

При $M^2 < 1$ для функции $u(\theta)$ и постоянной D получим выражение

$$u = \pm\omega \frac{\cos 2\omega\theta - \cos\omega\alpha}{\sin\omega\alpha - \omega\alpha\cos\omega\alpha}, \qquad D = \mp\omega \frac{4\omega^2\cos\omega\alpha}{\sin\omega\alpha - \omega\alpha\cos\omega\alpha} \tag{4.2}$$

$$(\omega^2 = 1 - M^2, \ \alpha \leqslant \pi/\omega)$$

При $M^2 = 1$ решение уравнения (4.1) имеет вид

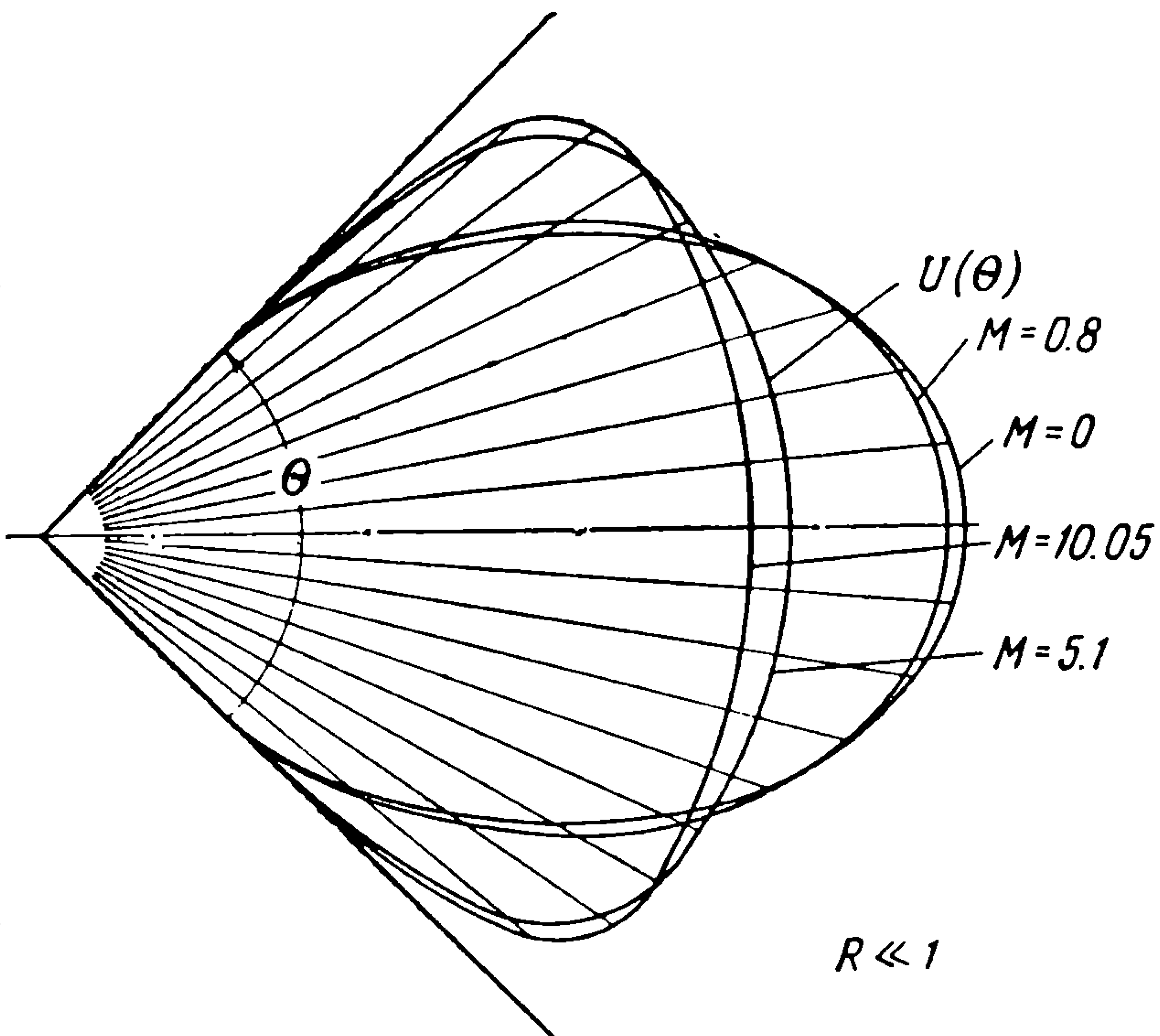
$$u = \pm\frac{3}{2\alpha^3}(\alpha^2 - 4\theta^2), \qquad D = \mp\frac{12}{\alpha^3} \tag{4.3}$$

При $M^2 > 1$ решение уравнения (4.1) дается формулами

$$u = \pm\omega \frac{\operatorname{ch}\omega\alpha - \operatorname{ch}2\omega\theta}{\alpha\omega\operatorname{ch}\omega\alpha - \operatorname{sh}\omega\alpha}$$

$$D = \mp\omega \frac{4\omega^2\operatorname{ch}\omega\alpha}{\alpha\omega\operatorname{ch}\omega\alpha - \operatorname{sh}\omega\alpha} \tag{4.4}$$

$$(\omega^2 = M^2 - 1)$$



Фиг. 1

Зависимость $u(\theta)$ при различных числах Гартмана для угла $\alpha = \pi/2$ приведена на фиг. 1. Магнитное поле, тормозя протекающую жидкость, делает профиль скорости более плоским. В предельном случае сильного воздействия магнитного поля ($M^2 \gg 1$) из (4.4) и (3.4) для ядра потока приближенно получаем

$$v_r = Q/\alpha r, \qquad (p - p_0)/\rho = \pm 2Q^2M^2/\alpha R r^2 \tag{4.5}$$

Заметим, что выражения (4.5) суть решение системы

$$\frac{dp}{dr} + \frac{\sigma H_0{}^2}{c^2\rho}v_r = 0, \qquad \frac{d}{dr}rv_r = 0, \qquad H_\theta = \frac{2I_0}{cr}$$

Действительно, в силу $R \ll 1$ инерционными силами можно пренебречь по сравнению с вязкими, а в силу $M^2 \gg 1$ вязкие силы в ядре потока намного меньше сил магнитного торможения.

Индуцированное же магнитное поле можно не учитывать вследствие $R_m \ll 1$. В узком пристеночном слое, где уже существенны силы вязкого трения, скорость убывает до нуля согласно (4.4). Расходящееся течение в рассматриваемом случае характеризуется большим отрицательным градиентом давления, сходящееся — большим положительным градиентом.

5. Из теории движения непроводящего газа в диффузоре известно, что симметричное расходящееся течение возможно лишь при числах Рейнольдса, меньших некоторого критического значения $R = R_*$, при котором трение на стенках диффузора обращается в нуль. Взаимодействие проводящей жидкости с магнитным полем приводит к возрастанию критического числа Рейнольдса. Для определения числа R_* из уравнения (3.3), опуская громоздкие выкладки, можно получить

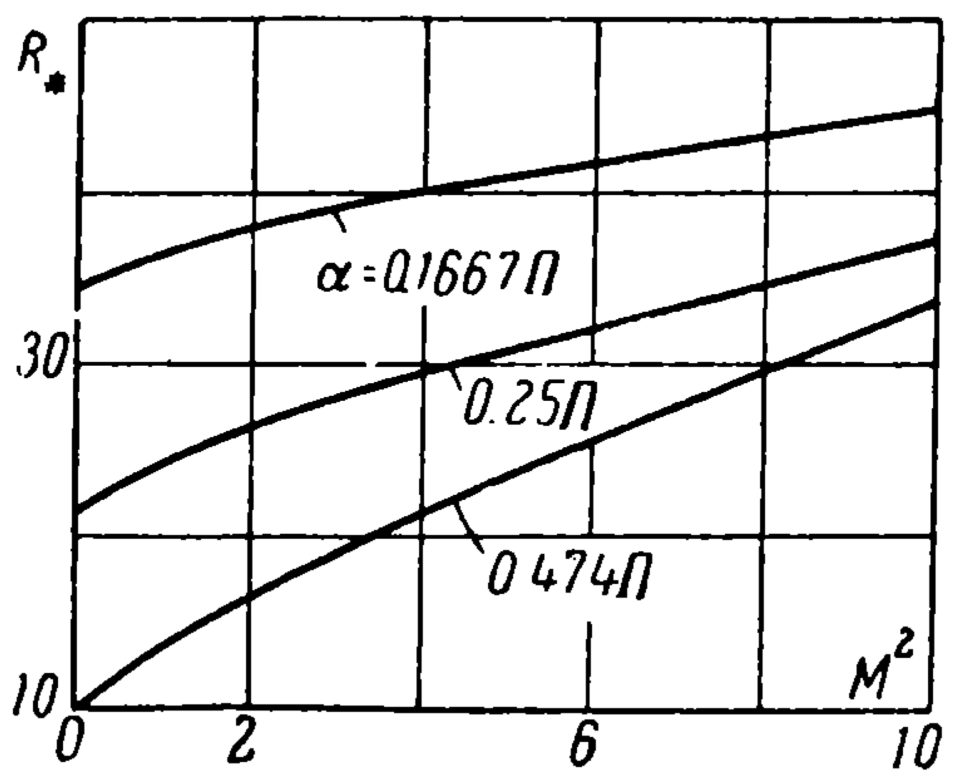
$$R_*\alpha = 24F(k, \pi/2)\,[E(k, {}^1/_2\pi) - F(k, {}^1/_2\pi)(1-k^2)] \qquad (5.1)$$

Параметр k находится из уравнений

$$\begin{aligned} &\alpha\sqrt{1-M^2} = 2\sqrt{1-2k^2}F(k, {}^1/_2\pi) && \text{при } M^2 < 1 \\ &\alpha\sqrt{M^2-1} = 2\sqrt{2k^2-1}F(k, {}^1/_2\pi) && \text{при } M^2 > 1 \qquad (5.2)\\ &k^2 = 0.5 && \text{при } M^2 = 1 \end{aligned}$$

$$F(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad E(k, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

Зависимость R_* от числа Гартмана M^2 для трех значений угла раскрытия α, полученная из (5.1), приведена на фиг. 2. Профиль скорости при $\alpha = {}^1/_4\pi$, $M^2 = 14.6$ ($R_* = 43.3$) изображен на фиг. 3. Критическое значение числа Рейнольдса растет с увеличением числа Гартмана и уменьшается с ростом угла α.



Фиг. 2

6. Симметричное расходящееся течение, не имеющее места при больших числах Рейнольдса в отсутствие магнитного поля, возможно при больших числах Рейнольдса и Гартмана: $R \gg 1$, $M^2 \gg 1$, $M^2 \sim R$.

Исследуя уравнение (3.3) при указанных предположениях и опуская длинную выкладку, можно найти выражение для профиля скорости и давления

$$v_r = \frac{Q}{r\alpha}\left[1 - \frac{4(\gamma-3)}{(\sqrt{\gamma-2}+\sqrt{\gamma-3})^2 e^{2\psi} + (\sqrt{\gamma-2}-\sqrt{\gamma-3})^2 e^{-2\psi} - 2}\right] \qquad (6.1)$$

$$\gamma = \frac{6\alpha(M^2-1)}{R} = O(1), \qquad \psi = (\alpha/2 - \theta)\sqrt{\frac{R(\gamma-3)}{6\alpha}}, \qquad \frac{p-p_0}{\rho} = \frac{(2\gamma-3)Q^2}{6\alpha^2 r^2}$$

Указанное течение возможно, если $6\alpha(M^2-1)/R > 3$. Из выражений (6.1) видно, что течение обладает отрицательным градиентом давления, а скорость почти во всем потоке равна значению $Q/r\alpha$ и лишь у стенок убывает до нуля. Результат для ядра потока [1]

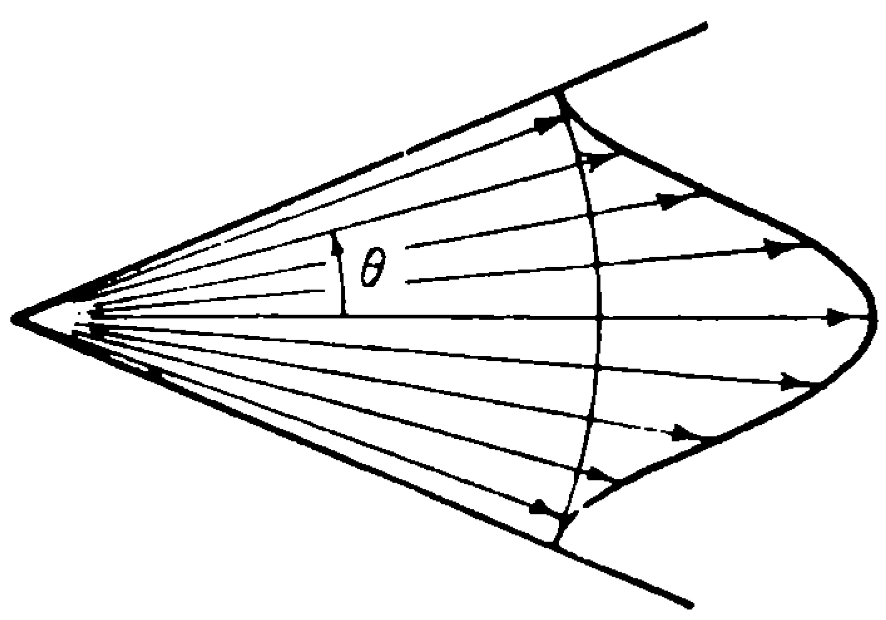
$$v_r = \frac{Q}{\alpha r}, \qquad \frac{p-p_0}{\rho} = \frac{(2\gamma-3)Q^2}{6\alpha^2 r^2}$$

[1] При больших числах Рейнольдса течение в диффузоре в рамках теории пограничного слоя исследовалось Гайлитисом [3].

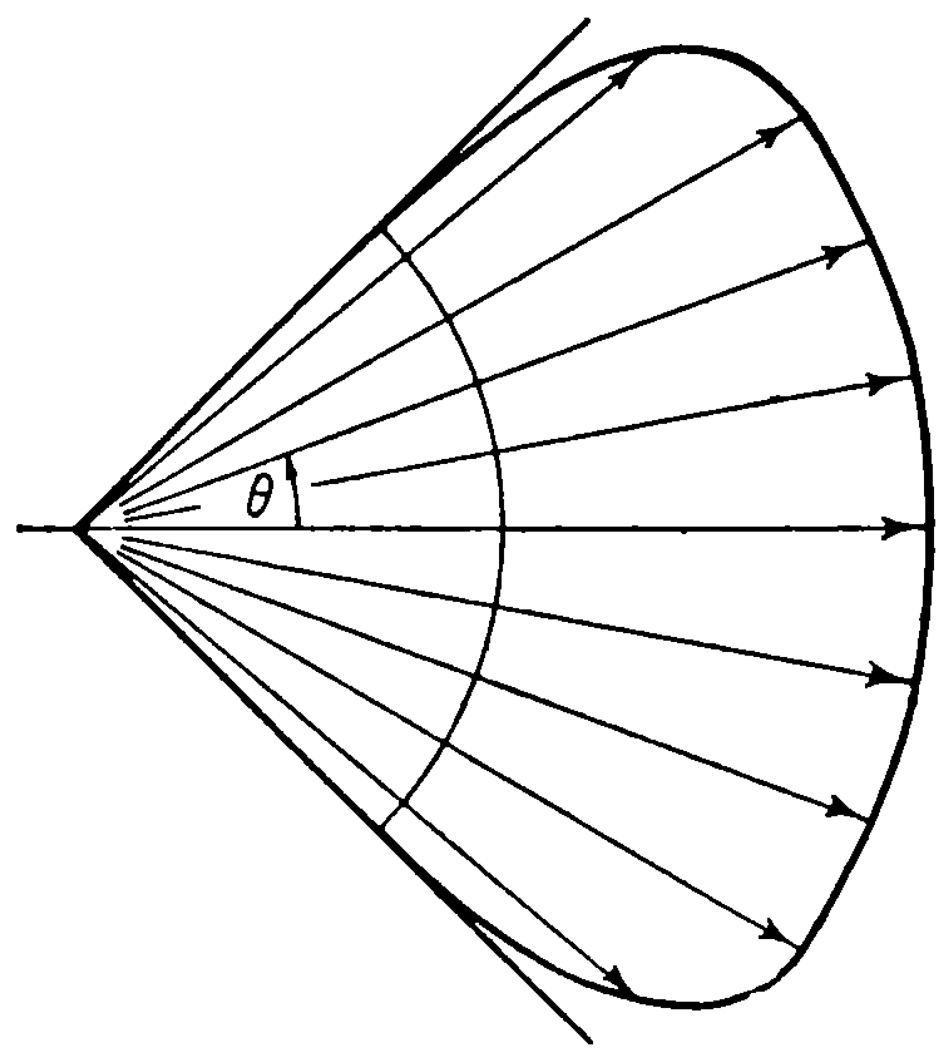
является решением системы

$$v_r \frac{dv_r}{dr} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} - \frac{\sigma H_\theta^2}{c^2\rho} v_r, \qquad \frac{dv_r r}{dr} = 0, \quad H_\theta = \frac{2I_0}{cr}$$

так как вязкими силами в ядре потока можно пренебречь вследствие $M^2 \gg 1$, а в силу соотношения $M^2 \sim R$ воздействие магнитного поля



Фиг. 3



Фиг. 4

и инерционные члены имеют одинаковый порядок. Выражение для скорости v_r в (6.1) дает распределение скорости в образующемся пограничном слое. График скорости при $R = 400$, $\gamma = 4$ для угла $^1/_2\pi$ изображен на фиг. 4.

Автор благодарит за ценные советы Г. М. Бам-Зеликовича

Поступила 28 I 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике, Москва, Гостехиздат, 1954.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А, Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, 1948, т. II, Гостехиздат.
3. Гайлитис А. Влияние магнитного поля на пограничный слой в диффузоре. Изв. АН Латвийской ССР, 1959, № 12.