

К ТЕОРИИ ГИПЕРЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА СО СКАЧКАМИ УПЛОТНЕНИЯ СТЕПЕННОЙ ФОРМЫ

В. В. Сычев

(Москва)

Рассматриваются плоские и осесимметричные гиперзвуковые течения газа со скачками уплотнения большой интенсивности, имеющими степенную форму. На основании исследования высокоэнтропийной части течения, примыкающей к поверхности тела (несущего скачок уплотнения заданной формы), показывается, что использование в задачах обтекания точных решений для соответствующих нестационарных автомодельных движений газа требует дополнительного уточнения толщины высокоэнтропийного слоя. Указывается способ введения такой поправки и построения формы контура тела, к которому должно быть отнесено распределение давления, полученное на основе теории малых возмущений.

1. Согласно теории малых возмущений гиперзвукового потока задача обтекания плоского или осесимметричного тела малой относительной толщины эквивалентна задаче об одномерном нестационарном движении газа под влиянием плоского или цилиндрического поршня [1]. В этой аналогии классу автомодельных движений с ударными волнами большой интенсивности, распространяющимися по степенному закону [2], соответствует класс стационарных течений со скачками уплотнения степенной формы.

$$y = Cx^n \quad (1.1)$$

при числе Маха невозмущенного потока $M_\infty \rightarrow \infty$. Значениям показателя n , лежащим в интервале $2/(3 + \nu) < n < 1$, где $\nu = 0$ для плоского и $\nu = 1$ для осесимметричного случаев, соответствуют течения около выпуклых тел степенной формы [3]

$$y = cx^n \quad (1.2)$$

Случай $n = 2/(3 + \nu)$ является особым и соответствует задаче о сильном взрыве [2]. Так как в этом случае $c/C = 0$, то его интерпретация применительно к задаче обтекания состоит в предположении о действии конечной силы сопротивления, приложенной к передней кромке тела исчезающей толщины. Иными словами, проводится аналогия между явлением сильного взрыва и действием затупления передней кромки тонкого тела на больших расстояниях от затупления [4, 5, 6].

2. Теория малых возмущений гиперзвукового потока неприменима в окрестности вершины скачка уплотнения (1.1), так как при $n < 1$ возмущения поля скоростей здесь конечны. Значения энтропии на линиях тока, пересекающих поверхность скачка уплотнения в этой области, будут сильно завышенными, а на поверхности тела ($\psi = 0$) энтропия оказывается бесконечно большой, так что плотность здесь становится равной

нулю. В результате область неприменимости теории малых возмущений оказывается вся высокоэнтропийная часть потока, примыкающая к поверхности тела (фиг. 1). Рассмотрим течение в этой области более подробно.

3. Уравнения плоского или осесимметричного течения газа после преобразования Мизеса от независимых переменных x, y к независимым переменным x, ψ (ψ — функция тока) могут быть записаны в виде

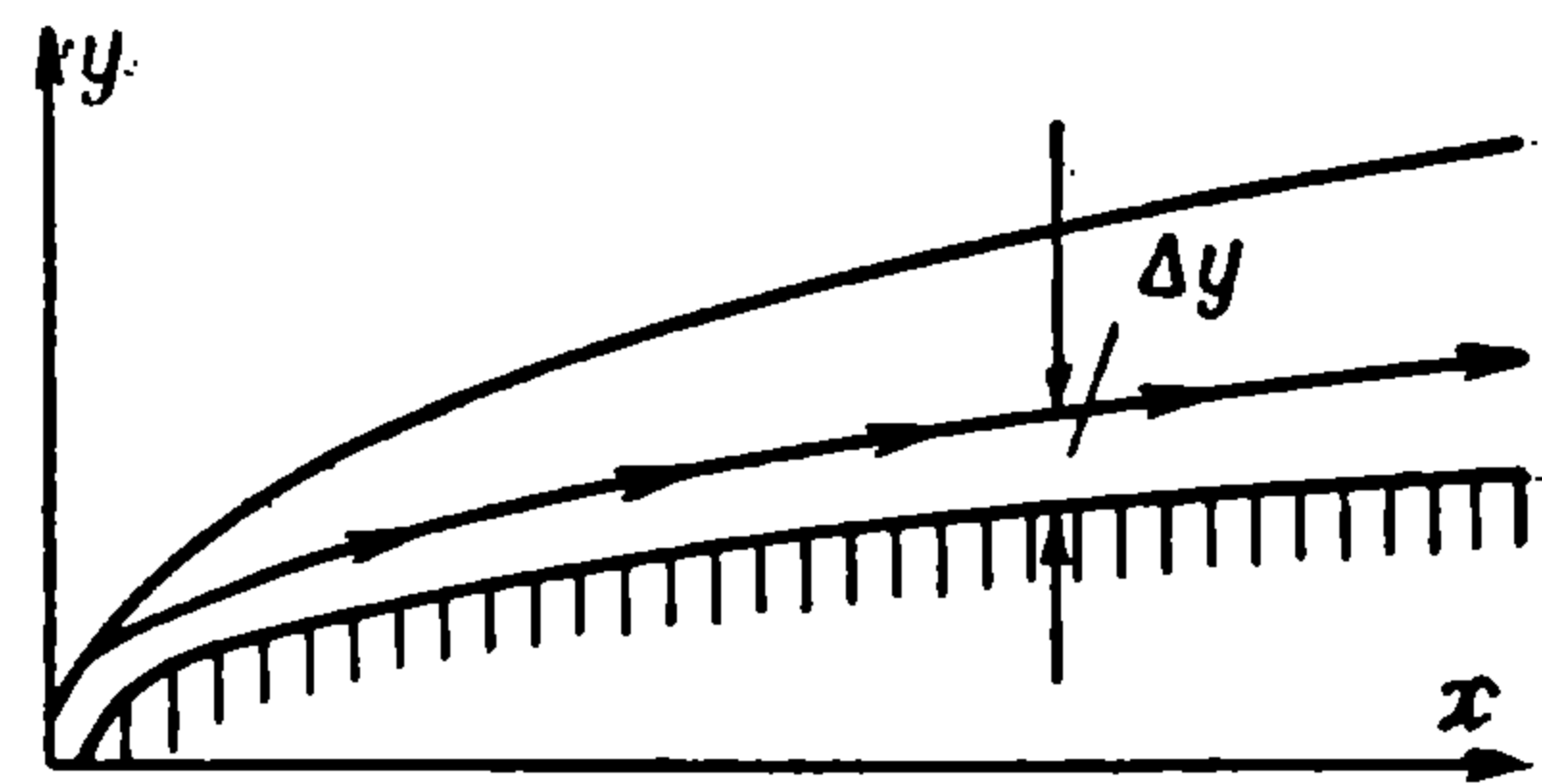
$$\frac{\partial p}{\partial \psi} = - \frac{1}{y^\nu} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{\rho^\gamma} = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{1}{\rho u y^\nu} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{v}{u} \quad (3.4)$$

$$u^2 + v^2 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = U_\infty^2 \quad (3.5)$$



Фиг. 1

Здесь u, v — составляющие вектора скорости, p — давление, ρ — плотность, γ — отношение удельных теплоемкостей газа. Индекс ∞ здесь и ниже относится к условиям в невозмущенном потоке, статическим давлением в котором мы пренебрегаем. Граничные условия на поверхности ударной волны (1.1) имеют вид

$$\psi = \frac{1}{1+\nu} \rho_\infty U_\infty C^{1+\nu} x^{n(1+\nu)},$$

$$p = \frac{2}{\gamma+1} \rho_\infty U_\infty^2 \frac{n^2 C^2 x^{2n-2}}{1+n^2 C^2 x^{2n-2}}, \quad \rho = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_\infty \quad (3.6)$$

$$u = U_\infty \left(1 - \frac{2}{\gamma+1} \frac{n^2 C^2 x^{2n-2}}{1+n^2 C^2 x^{2n-2}} \right), \quad v = \frac{2}{\gamma+1} U_\infty \frac{n C x^{n-1}}{1+n^2 C^2 x^{2n-2}}$$

Соответствующие соотношения теории малых возмущений получаются, если в уравнениях (3.1) — (3.4) положить $u \approx U_\infty$, а в граничных условиях (3.6) для ψ, v, p и ρ принять $1 + n^2 C^2 x^{2n-2} \approx 1$.

4. Воспользуемся точными соотношениями п. 3 для оценки перепада давлений поперек энтропийного слоя у поверхности тела. Определим этот слой как область течения, занятую линиями тока, пересекающими поверхность скачка уплотнения вблизи его вершины, где углы наклона этой поверхности к направлению невозмущенного потока немалы

$$y' = \frac{nC}{x^{1-n}} \gg 1 \quad (4.1)$$

Это условие вместе с (3.6) для ψ дает следующую оценку для приращения функции тока поперек энтропийного слоя:

$$\Delta\psi \sim \rho_\infty U_\infty C^{\frac{1+\nu}{1-n}} \quad (4.2)$$

На достаточно больших расстояниях от передней кромки тела поперечная составляющая скорости течения v пропорциональна местному углу наклона поверхности скачка уплотнения (τ), а давление — квадрату этого угла

$$v \sim U_\infty \tau, \quad p \sim \rho_\infty U_\infty^2 \tau^2 \quad \left(\tau \sim \frac{C}{x^{1-n}} \right) \quad (4.3)$$

Подставляя эти оценки в уравнение (3.1), находим, что относительный перепад давления поперек энтропийного слоя будет

$$\frac{\Delta p}{p} \sim \tau^{\frac{n}{1-n}(1+\nu)}$$

Таким образом

$$\frac{\Delta p}{p} \ll \tau^2 \quad \text{при } n \geq \frac{2}{3+\nu} \quad (4.4)$$

Так что в пределах точности теории малых возмущений, приводящей, как легко видеть, к тому же результату, перепадом давления можно пренебречь.

Отсюда следует, что полученная на основании этой теории зависимость $p(x, \psi)$ (но не $p(x, y)$, как увидим) в рассматриваемом интервале изменения n справедлива во всем поле течения, кроме окрестности вершины скачка уплотнения.

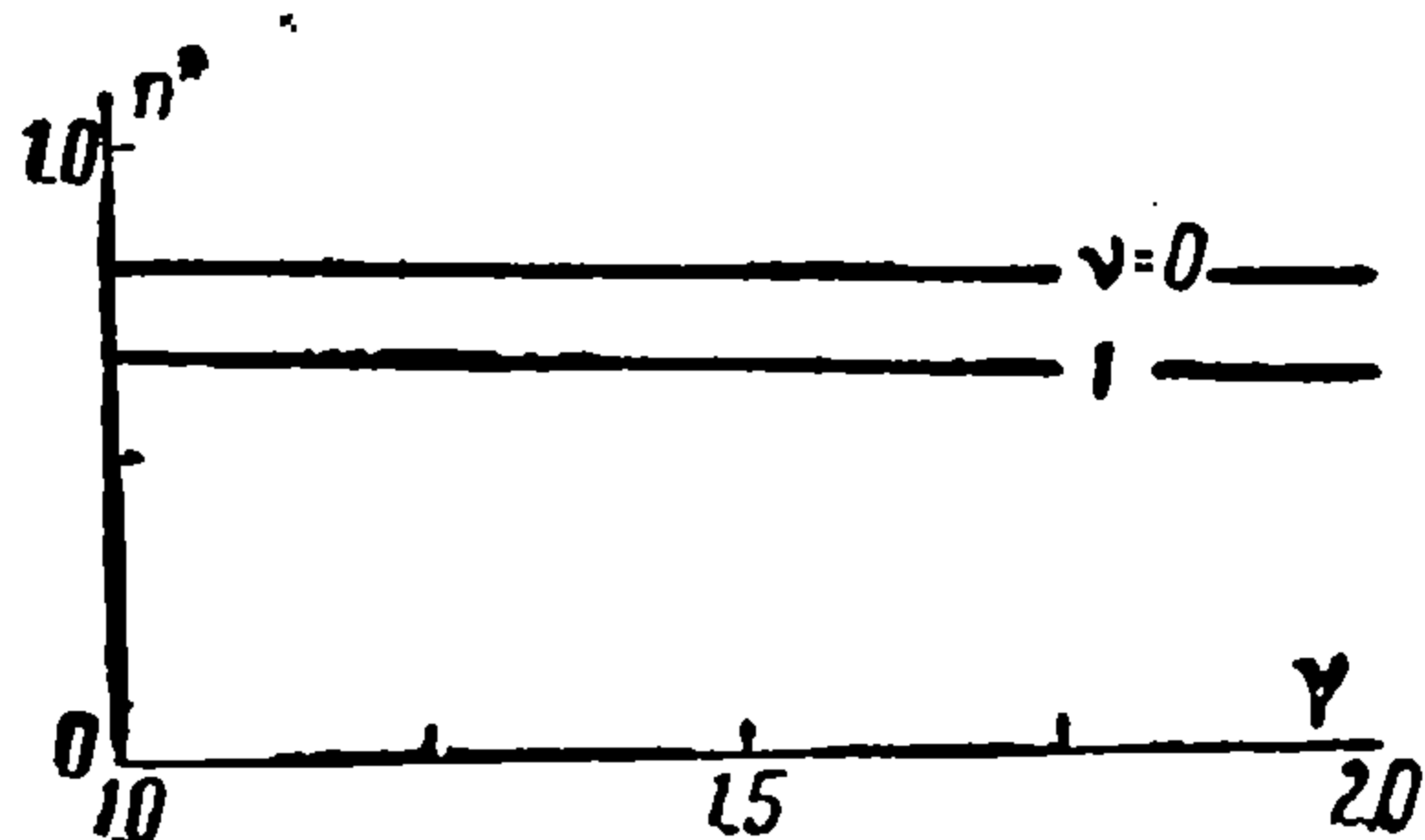
5. Для оценки относительной толщины энтропийного слоя воспользуемся уравнениями (3.2) и (3.3). Из условия постоянства энтропии вдоль линий тока (3.2) и граничных условий (3.6) для p и ρ находим, что вдоль всего энтропийного слоя

$$\frac{p}{\rho^\gamma} \sim \frac{p_\infty U_\infty^2}{(K\rho_\infty)^\gamma} \quad \left(K = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \quad (5.1)$$

Пользуясь оценкой (4.3) для давления p , получаем следующую оценку для плотности:

$$\rho \sim K\rho_\infty \tau^{\frac{2}{\gamma}} \quad (5.2)$$

Полагая $u \sim U_\infty$, с помощью (3.3) находим, что относительная толщина энтропийного слоя будет¹



$$\frac{\Delta y}{y} \sim \frac{1}{K} \tau^{\frac{n(1+\nu)}{1-n} - \frac{2}{\gamma}} \quad (5.3)$$

Она оказывается пренебрежимо малой лишь при

$$n \geq n^* = \frac{2 + 2/\gamma}{3 + \nu + 2/\gamma} \quad (5.4)$$

Фиг. 2

Это означает, что в практически интересном диапазоне значений γ существует определенный интервал значений показателя n , $\frac{2}{3+\nu} \leq n \leq n^*$ (фиг. 2), когда подлежащий учет толщины энтропийного слоя, например при определении контура тела по заданной форме скачка уплотнения, является необходимым. В то же время при решении такой задачи на основе предположений теории малых возмущений, область энтропийного эффекта оказывается во много раз толще и соответствующий контур тела находится с большой ошибкой. В самом деле при определении относительной толщины энтропийного слоя воспользуемся в этом случае вместо условия (3.6) для p приближенным соотношением на поверхности скачка уплотнения вида

$$p = \frac{2}{\gamma+1} \rho_\infty U_\infty^2 n^2 C^2 x^{2n-2} \quad (5.5)$$

¹ Оценки, аналогичные (4.4), (5.3), для случая $\nu = 0$ были недавно получены в работе [8].

Это приводит вместо (5.2) к следующей оценке для плотности

$$\rho \sim K \rho_\infty \tau^{\frac{2}{\gamma}} C^{-\frac{2}{n\gamma}} \left(\frac{\psi}{\rho_\infty U_\infty} \right)^{\frac{2-2n}{n(1+\nu)\gamma}} \quad (5.6)$$

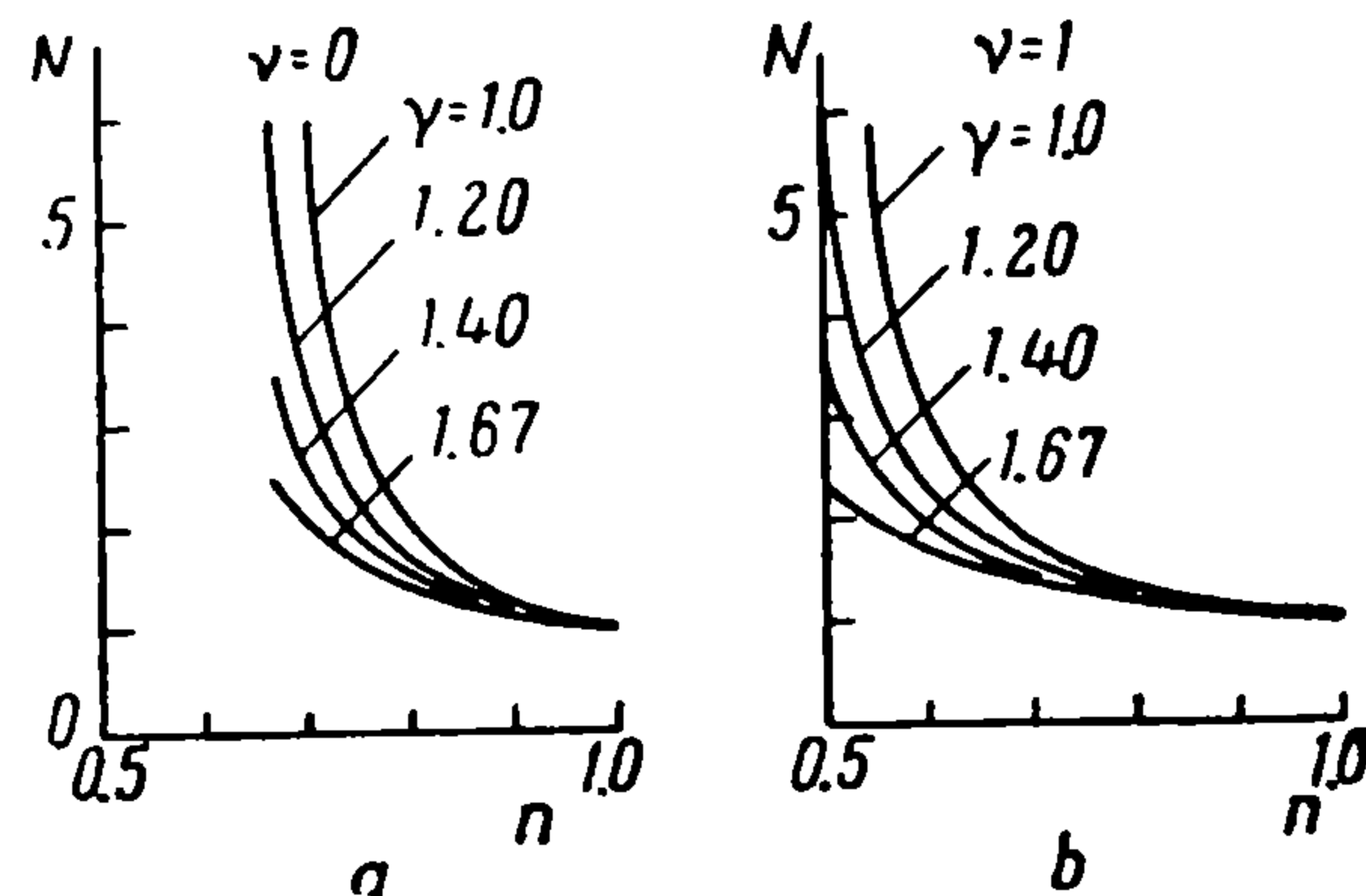
В результате интегрирование уравнения (3.3) поперек энтропийного слоя дает

$$\frac{\Delta y}{y} \sim \frac{N}{K} \tau^{\frac{n(1+\nu)}{1-n} - \frac{2}{\gamma}} \quad (5.7)$$

где

$$N = \left(1 - \frac{2}{\gamma} \frac{1-n}{n(1+\nu)} \right)^{-1} \quad (5.8)$$

Множитель N растет с уменьшением γ и n (фиг. 3), так что толщина энтропийного слоя, определенная на основе теории малых возмущений, может во много раз превышать его действительную толщину.



Фиг. 3

6. Таким образом, использование точных решений для автомодельных нестационарных движений газа [2] в задачах [обтекания при $n < n^*$ требует специального уточнения толщины энтропийного слоя, что (при заданной форме скачка уплотнения) должно приводить к соответствующему исправлению контура тела. Получаемое при использовании точных автомодельных решений распределение давления по поверхности тела в соответствии с п. 4 должно быть отнесено к новому контуру тела. Практически определение формы тела, соответствующего заданной форме скачка уплотнения (3.1), удобно производить путем интегрирования уравнения (3.3) поперек всего поля течения для ряда фиксированных значений x . Функция $p(x, \psi)$ при этом известна из автомодельного решения для заданной ударной волны, а зависимость

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \varphi(\psi) \quad (6.1)$$

находится из точных граничных условий (3.6) для ψ , ρ и p . Входящую в (3.3) составляющую вектора скорости u , для которой выше, при проведении оценок, предполагалось $u \sim U_\infty$, теперь следует уточнить. Так как всюду, за исключением окрестности вершины скачка уплотнения, $v/u \sim \tau$, то на основании уравнения энергии (3.5) имеем

$$u \approx \sqrt{U_\infty^2 - \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}} \quad (6.2)$$

с относительной ошибкой порядка τ^2 . Подставляя сюда полученные ранее оценки (4.3) для p и (5.2) для ρ , получим

$$\left(\frac{u}{U_\infty} \right)^2 - 1 \sim \tau^{2-\frac{2}{\gamma}} \quad (6.3)$$

Отсюда следует неправомерность закона плоских сечений в энтропийном слое и необходимость использования для определения u (с необходимой степенью точности) формулы (6.2). Это уравнение замыкает необходимую для расчета систему соотношений.

7. Обычно результаты интегрирования уравнений автомодельных движений газа приводятся в виде зависимостей [2,3]

$$v = v_s(x) f(\lambda), \quad \rho = \rho_s g(\lambda), \quad p = p_s(x) h(\lambda) \quad \left(\lambda = \frac{y}{y_s} \right) \quad (7.1)$$

где индекс s относится к условиям на ударной волне. Нужная для расчетов функция тока автомодельного движения, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$U_{\infty} \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (7.2)$$

легко находится в форме

$$\psi = \psi_s(x) \eta(\lambda) \quad \eta(\lambda) = \exp \left\{ - (1 + v) \int_1^{\lambda} \frac{d\lambda}{\frac{2}{\gamma+1} f(\lambda) - \lambda} \right\}$$

Это определяет зависимость $p(x, \eta)$, которую мы можем теперь записать, используя (5.5) в виде

$$p = \frac{2}{\gamma+1} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 n^2 C^2 \frac{H(\eta)}{x^2 (1-n)} \quad (7.4)$$

Функция распределения энтропии находится из условий (3.6) для ψ , ρ и p и с учетом (7.3) может быть представлена в виде

$$\frac{p}{\rho^{\gamma}} = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{1}{\rho_{\infty}} \right)^{\gamma} \frac{2}{\gamma+1} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 n^2 C^2 \left[x^{2(1-n)} \eta^{\frac{2(1-n)}{n(1+v)}} + n^2 C^2 \right]^{-1} \quad (7.5)$$

Исключая из двух последних уравнений p , найдем ρ , а затем с помощью уравнения (6.2) определим u ; тогда получим

$$\frac{\rho_{\infty}}{\rho} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} G(x, \eta), \quad \frac{u}{U_{\infty}} = \left[1 - \frac{4\gamma}{(\gamma+1)^2} n^2 C^2 \frac{H(\eta) G(x, \eta)}{x^2 (1-n)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7.6)$$

где

$$G(x, \eta) = \left[\frac{x^{2(1-n)}}{H(\eta)} \left(x^{2(1-n)} \eta^{\frac{2(1-n)}{n(1+v)}} + n^2 C^2 \right)^{-1} \right]^{\frac{1}{\gamma}} \quad (7.7)$$

Уравнение (3.3) заменой независимой переменной ψ на η приводится к виду

$$y^{\nu} \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\psi_s(x)}{\rho u} \quad (7.8)$$

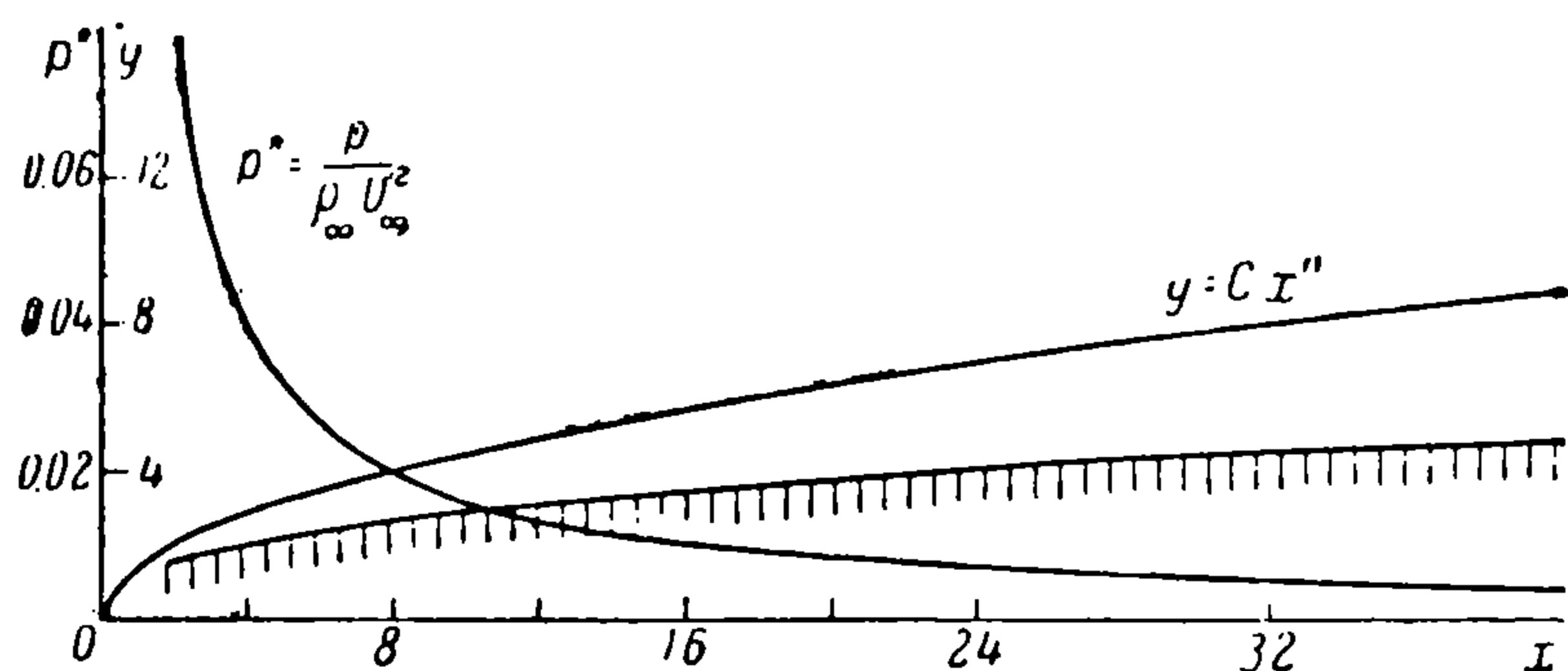
Подставляя сюда найденные функции $\rho(x, \eta)$, $u(x, \eta)$ и интегрируя при фиксированном x , получаем уравнение, определяющее форму и расположение линий тока рассматриваемого течения

$$y(x, \eta) = G x^n \left\{ 1 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \int_1^{\eta} G(x, \eta) \left(1 - \frac{4\gamma}{(\gamma+1)^2} n^2 C^2 \frac{H(\eta) G(x, \eta)}{x^2 (1-n)} \right)^{-\frac{1}{2}} d\eta \right\}^{\frac{1}{1+v}} \quad (7.9)$$

Новый контур тела определяется этим уравнением, если верхний предел интегрирования положить равным нулю.

8. В качестве примера приложения полученных результатов рассмотрим осесимметричное течение со скачком уплотнения вида

$$y = \sqrt{2x} \quad (8.1)$$



Фиг. 4

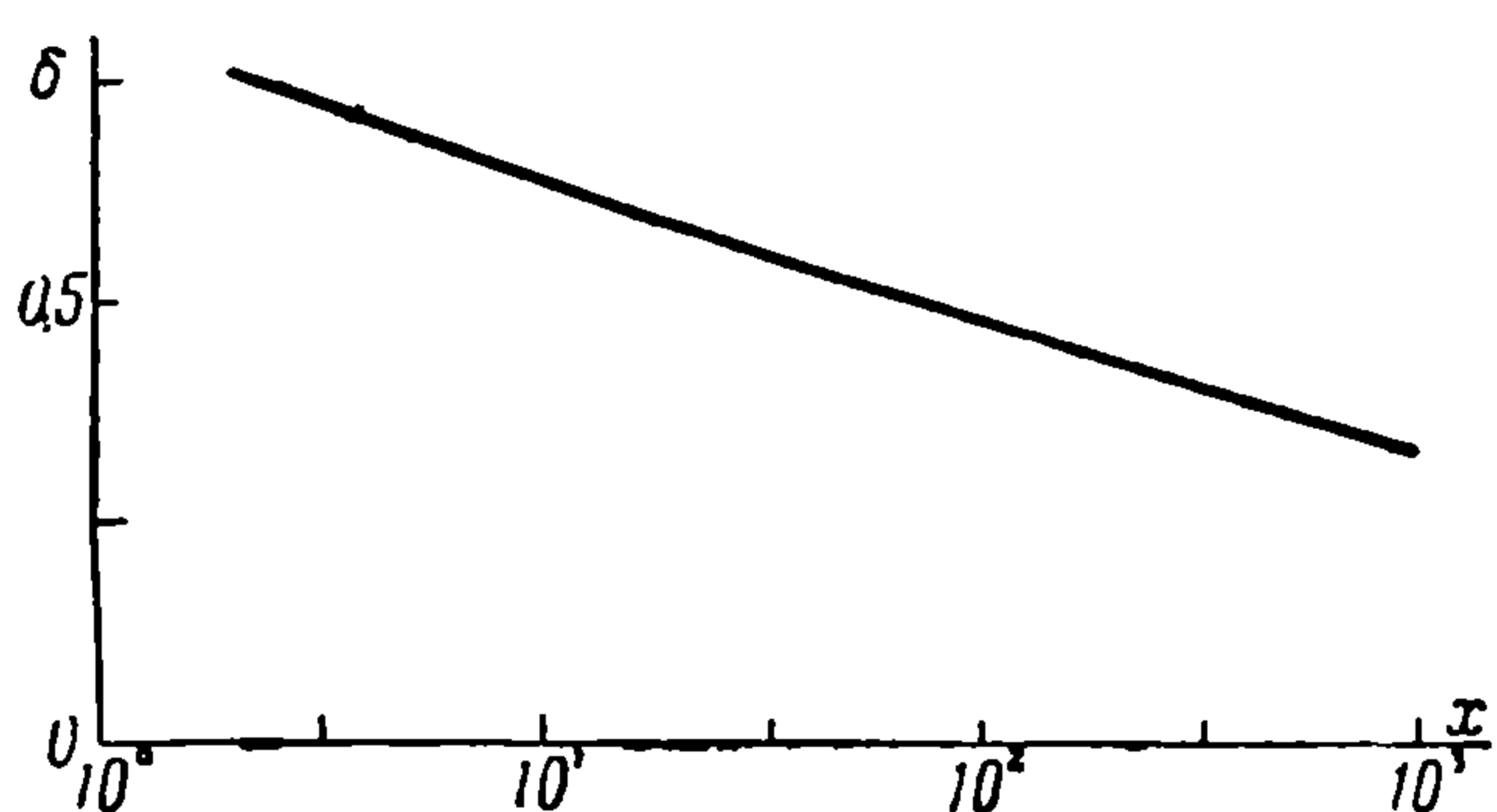
Расчеты проводились для случая $\gamma = 1.4$. Функции (7.1) были взяты из таблиц, приведенных в работе [2]. Результаты расчетов приведены

на фиг. 4 и 5. Из рассмотрения полученных зависимостей видно, что относительная толщина контура тела, определенного на основании уравнения (7.9),

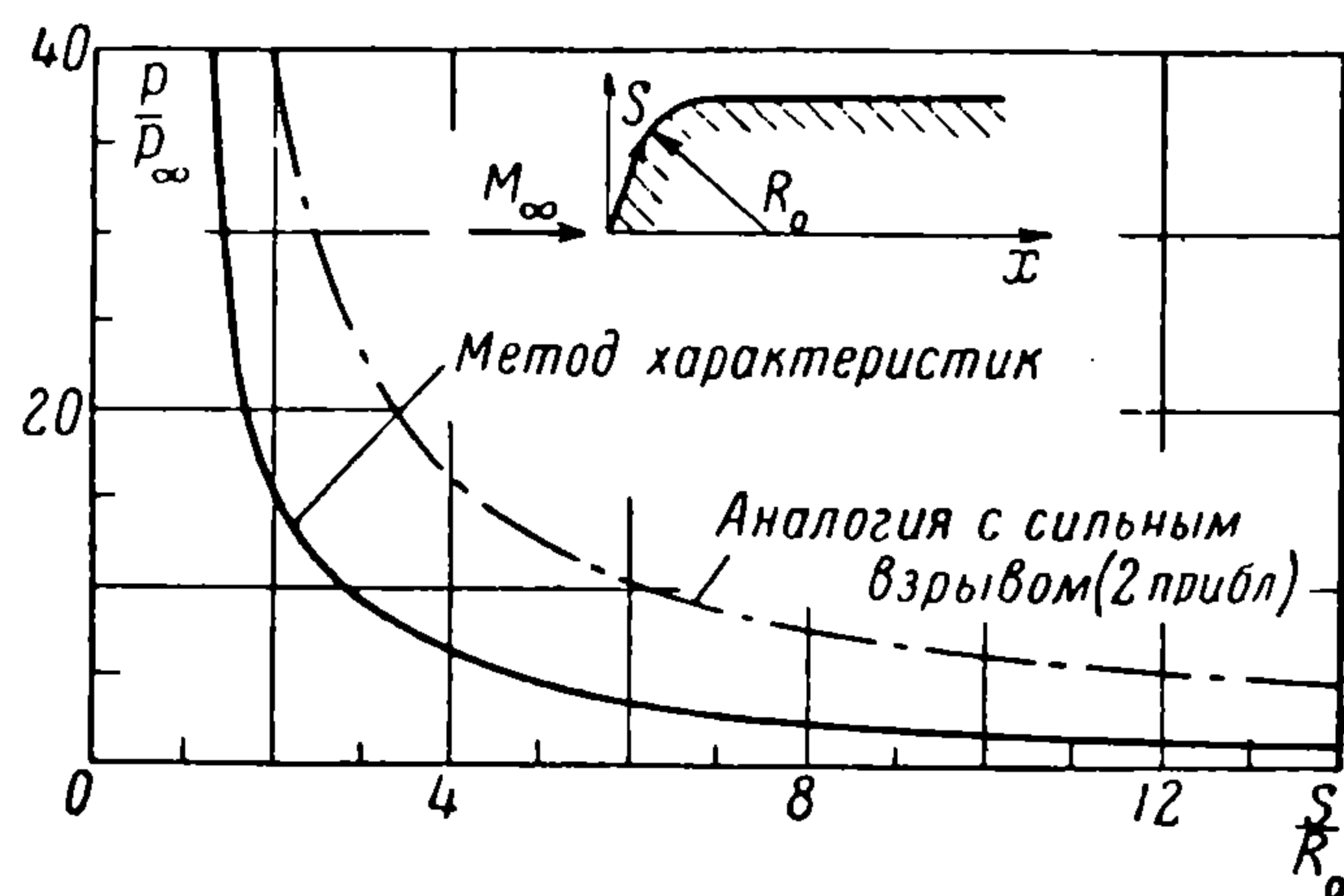
$$\delta(x) = \frac{y(x, 0)}{y(x, 1)} \quad (8.2)$$

пренебрежима лишь в области очень больших значения x (за единицу измерения x принят радиус кривизны скачка уплотнения в его вершине).

Таким образом, распределение давления, приписываемое на основании аналогии с сильным взрывом цилиндру с затупленной носовой частью, в действительности реализуется на теле значительно большей относительной толщины. По-види-



Фиг. 5



Фиг. 6

мому, этим можно объяснить серьезное количественное расхождение полученного таким образом распределения давления по поверхности цилиндра с полусферической носовой частью с результатами численного расчета [7] при числе $M_\infty = 20$, воспроизведенными на фиг. 6, где по оси абсцисс отложена относительная длина дуги, образующей тела, отсчитываемая от критической точки.

В заключение заметим, что автомодельные решения во всех случаях конечно, сохраняют смысл асимптотических представлений точного решения при $x \rightarrow \infty$.

Автор приносит благодарность М. Н. Когану и Г. И. Таганову за ценные дискуссии по затронутым в работе вопросам.

Поступила 4 II 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Hayes W. D., Probstein R. F. Hypersonic flow theory. Academic press, N. Y., 1959.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат, 1957.
3. Гродзовский Г. Л., Некоторые особенности обтекания тел при больших сверхзвуковых скоростях. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 6.
4. Cheng H. K., Pallone A. J. Inviscid leading-edge effect in hypersonic flow. J. Aero Sci. vol. 23, 1956, N_o. 7.
5. Lees L., Kubota T. Inviscid hypersonic flow over blunt nosed slender bodies. J. Aero Sci. vol. 24, 1957, N_o. 3.
6. Черный Г. Г. Влияние малого затупления переднего конца тела на его обтекание потоком большой сверхзвуковой скорости, Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 4.
7. Ferris A. A review of some recent developments in hypersonic flow. Preprint of paper presented at the First Intern. Congress in Aero Sci., Spain, Madrid, 1958.
8. Cheng H. K. Similitude of hypersonic real gas flows over slender bodies with blunted noses. J. Aero. Sci. vol. 26, № 9, 1959.