

О РАСЧЕТЕ ОБТЕКАНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ С ОТОШЕДШЕЙ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ НА ЭЛЕКТРОННОЙ СЧЕТНОЙ МАШИНЕ

О. М. Белоцерковский

(Москва)

При решении указанной задачи большинство авторов задавалось формой и положением ударной волны, после чего решалась обратная задача (подробный обзор существующих методов дается в статье [1]). Метод А. А. Дородницына [2] позволяет решать с нужной степенью точности прямую задачу в точной постановке.

В Вычислительном центре АН СССР такие расчеты были проведены на электронной счетной машине БЭСМ-1.

Ставится задача разработать такой метод расчета, который был бы одинаково пригоден для расчета с отошедшей ударной волной как плоских, так и осесимметричных тел разнообразной формы (гладких, с изломом, комбинированных), при различных значениях показателя адиабаты κ ($\kappa > 1$) и чисел Маха набегающего потока ($1 < M_\infty \leq \infty$). Плоская задача рассматривалась автором [3], а расчет течений при $M_\infty = 1$ был произведен П. И. Чушкиным [4]. Схема расчетов, а также результаты вычислений для некоторых простых тел (эллипсоидов, сферы и диска) приводятся ниже.

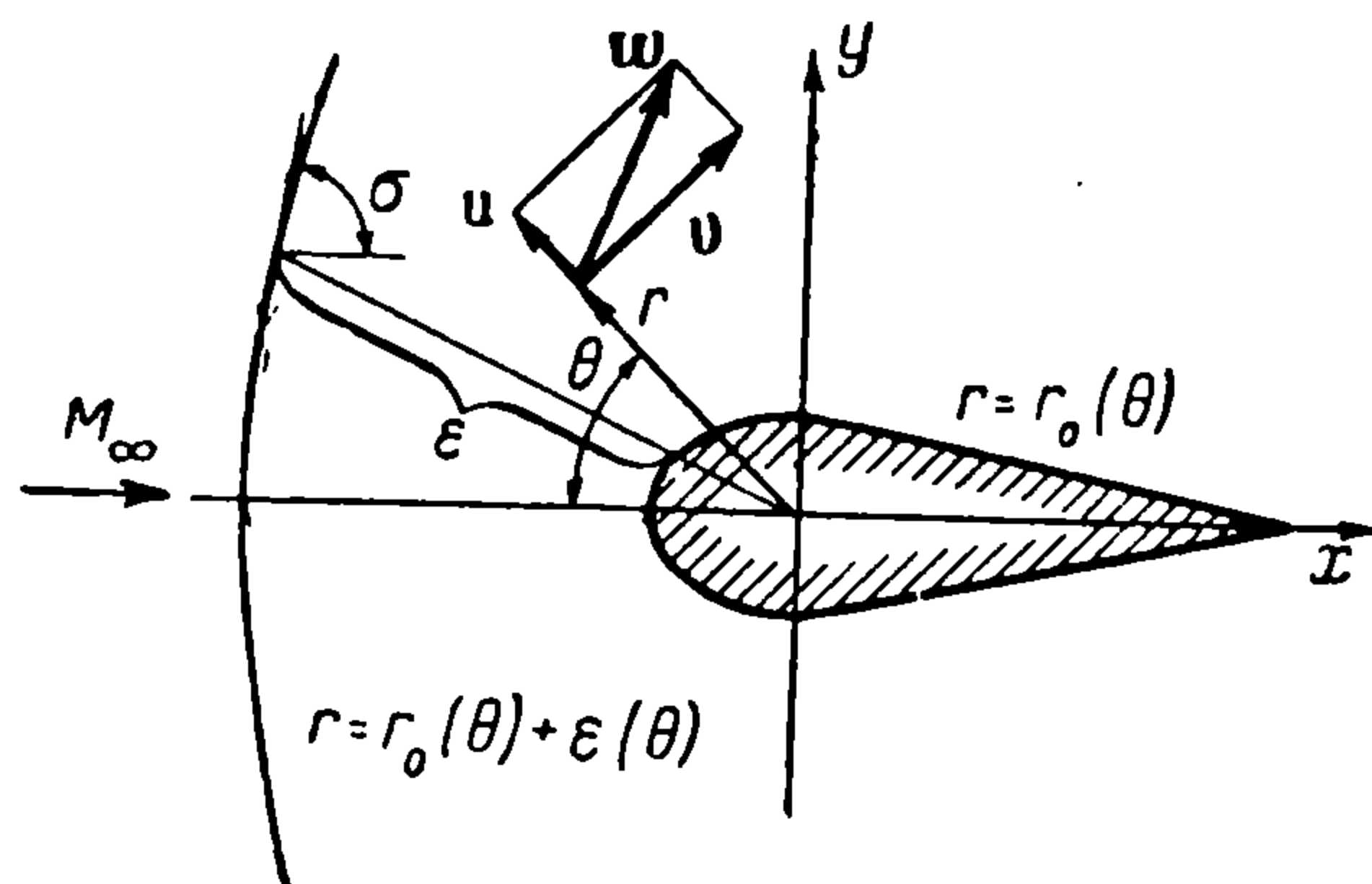
1^o. Рассмотрим обтекание с отошедшей ударной волной тел, обладающих осью симметрии. Пусть сверхзвуковой поток идеального газа набегаёт с постоянной скоростью w_∞ на такое тело под нулевым углом атаки. Перед телом возникает ударная волна, форма и положение которой заранее неизвестны.

Требуется произвести расчет смешанного вихревого течения газа в минимальной области влияния.

Введем безразмерные величины, относя скорость w к максимальной скорости w_{\max} , плотность ρ к плотности набегающего потока ρ_∞ (все величины до ударной волны будем обозначать индексом ∞), давление p к $\rho_\infty w_{\max}^2$, а линейные размеры — к характерному размеру тела, тогда система уравнений газовой динамики в безразмерном виде будет иметь следующий вид:

$$\operatorname{rot} w \times w + \frac{\nabla w^2}{2} + \frac{\nabla p}{\rho} = 0, \quad \nabla(\rho w) = 0, \quad w \nabla \frac{p}{\rho^x} = 0 \quad (1)$$

В дальнейшем система уравнений (1) будет записываться для осесимметричных течений в составляющих сферических (r, θ) или декартовых $(x = -r \cos \theta, y = r \sin \theta)$ координат (фиг. 1). Введем интеграл Бернулли и функцию тока ψ , тогда полная система уравнений, например, в коор-



Фиг. 1

динатах r, θ будет иметь вид

$$\frac{\partial [r^2 (p + \rho u^2) \sin \theta]}{\partial r} + \frac{\partial [r (\rho u v) \sin \theta]}{\partial \theta} = r (2p + \rho v^2) \sin \theta \quad (2)$$

$$\frac{\partial (r \tau u \sin \theta)}{\partial r} + \frac{\partial (r \tau v \sin \theta)}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{d\psi}{d\theta} = r \rho \left(v \frac{dr}{d\theta} - ru \right) \sin \theta, \quad \varphi = \varphi(\psi)$$

Здесь

$$p = \frac{\kappa - 1}{2\kappa} (1 - w^2), \quad \rho = \tau \varphi^{-\frac{1}{\kappa-1}}, \quad \tau = (1 - w^2)^{\frac{1}{\kappa-1}}, \quad \varphi = \frac{p}{\rho^\kappa}$$

φ — энтропийная функция (энтропия $s = c_v \ln \varphi$), а u, v — составляющие скорости w вдоль r и θ . Неизвестными функциями являются u, v, φ, ψ . Граничные условия задачи имеем следующие.

На теле $r = r_0(\theta)$

$$u = \frac{v}{r} \frac{dr}{d\theta}, \quad \psi = 0, \quad \varphi = \varphi(0) = \text{const} \quad (3)$$

где

$$\varphi(0) = \frac{2}{\kappa + 1} \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right)^\kappa \frac{1}{w_\infty^{2\kappa}} \left[w_\infty^2 - \frac{(\kappa - 1)^2}{4\kappa} (1 - w_\infty^2) \right]$$

На ударной волне $r = r_0(\theta) + \varepsilon(\theta)$

$$w_x = w_\infty \left[1 - \frac{2}{\kappa + 1} (\sin^2 \sigma - m_\infty^2) \right], \quad w_y = (w_\infty - w_x) \text{ctg} \sigma \quad \left(m_\infty = \frac{1}{M_\infty} \right)$$

$$u = w_y \sin \theta - w_x \cos \theta, \quad v = w_x \sin \theta + w_y \cos \theta \quad (4)$$

$$p = \frac{2}{\kappa + 1} \left[w_\infty^2 \sin^2 \sigma - (1 - w_\infty^2) \frac{(\kappa - 1)^2}{4\kappa} \right]$$

$$\rho = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \frac{w_\infty^2 \sin^2 \sigma}{1 - w_\infty^2 \cos^2 \sigma}, \quad \psi = \frac{(r_0 + \varepsilon)^2}{2} w_\infty \sin^2 \theta$$

Здесь ε — расстояние вдоль луча $\theta = \text{const}$ от контура тела до ударной волны; σ — угол наклона волны к направлению набегающего потока (фиг. 1); w_x, w_y — составляющие скорости w вдоль x и y .

Из (4) легко получить граничное условие для φ , кроме того, из соотношения на волне $dy/dx = \text{tg} \sigma$ имеем

$$\frac{d\varepsilon}{d\theta} = - (r_0 + \varepsilon) \text{ctg} (\sigma + \theta) - \frac{dr_0}{d\theta} \quad (5)$$

2°. Метод А. А. Дородницына сводит интегрирование системы дифференциальных уравнений в частных производных к численному решению некоторой аппроксимирующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Область интегрирования здесь разбивается так же, как и в плоском случае [3]: между телом и волной проводится $N - 1$ промежуточных линий

$$r_i = r_0(\theta) + \xi_i \varepsilon(\theta), \quad \xi_i = \frac{N - i + 1}{N} \quad (i = 2, 3, \dots, N)$$

после чего все уравнения в частных производных исходной системы интегрируются вдоль $\theta = \text{const}$ (или $y = \text{const}$) от контура тела до границы каждой из полос, а оставшиеся обыкновенные уравнения или конечные соотношения системы записываются вдоль промежуточных линий. Заменяя подынтегральные функции интерполяционными полиномами и интегрируя, получим аппроксимирующую систему, где неизвестными будут значения исходных функций на границах полос.

Обозначим все величины на i -й промежуточной линии индексом i , на ударной волне ($i = 1$) — индексом 1 и на теле — индексом 0 . Тогда аппроксимирующая система для (2) в N -приближении схематично может быть записана так:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{d\theta} &= -(r_0 + \varepsilon) \operatorname{ctg}(\sigma + \theta) - \frac{dr_0}{d\theta} \\ \frac{dr_0}{d\theta} &= \frac{E_0}{D}, \quad \frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{E_\sigma}{D}, \quad \frac{d\psi_i}{d\theta} = r_i \rho_i \left(v_i \frac{dr_i}{d\theta} - r_i u_i \right) \sin \theta \\ \frac{du_i}{d\theta} &= U_i, \quad \frac{dv_i}{d\theta} = \frac{E_i}{(\kappa - 1 + 2u_i^2) / (\kappa + 1) - w_i^2} \\ \varphi_i(\psi_i) &= \varphi_1(\psi_i) \quad (i = 2, 3, \dots, N) \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь E_0 , E_σ , U_i , E_i — определенные голоморфные в области интегрирования функции (вид этих функций зависит от N), D — известная функция ($D = 0$ в окрестности $w_0^2 = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}$), причем все граничные условия на теле и на ударной волне в любом приближении удовлетворяются точно. Аппроксимирующая система в координатах x, y будет иметь аналогичный вид.

Задача сводится, таким образом, к нахождению численного решения краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6), когда часть краевых условий задана на оси симметрии:

$$v_0 = v_i = 0, \quad \psi_i = 0, \quad \sigma = \frac{1}{2} \pi, \quad \varphi = \varphi_1(0) \quad \text{при } \theta = 0$$

а остальные — на особой линии¹, где должно быть

$$E_0 = 0 \quad \text{при } D = 0, \quad E_i = 0 \quad \text{при } w_i^2 = (\kappa - 1 + 2u_i^2) / (\kappa + 1)$$

иначе сама особая линия будет предельной линией и решение не будет иметь физического смысла.

На особой линии N уравнений системы имеют N подвижных особых точек типа «седла». Исследование проводится аналогично плоскому случаю (диаграмма Ньюзио имеет тот же вид). В окрестности каждой особой точки существуют два и только два решения, проходящие через эту точку, причем оба решения голоморфны. Одно из этих решений «склеивается» с решением до особой точки, полученным обычным образом (число условий склейки равно числу произволов в особой точке), но так как оба решения пересекаются только в самой особой точке, то условия склейки однозначно определяют интегральную кривую, проходящую через данную особую точку. Некоторые уравнения аппроксимирующей системы имеют особенности и на оси симметрии. Однако это будут фиксированные особые точки регулярного типа, из которых удастся выйти при помощи рядов по степеням θ или y .

Можно показать, что в осесимметричном случае формула для угла наклона линии $w = \operatorname{const}$ к направлению набегающего потока в точках ударной волны имеет следующий вид:

$$\operatorname{tg} \Phi_1 = \frac{[m(w_x - w_y \operatorname{ctg} \sigma) + (w_\infty - w_x)(F_1 + F_2 \operatorname{ctg} \sigma)] d\sigma / dy - n}{[(F_2 - m \operatorname{ctg} \sigma)(w_x - w \operatorname{ctg} \sigma) + w_y(F_3 - F_1)] d\sigma / dy + n \operatorname{ctg} \sigma} \quad (7)$$

¹ При $D = 0$ и $E_0 = 0$ автоматически и $E_\sigma = 0$.

Здесь

$$m = \frac{1}{\Delta} [(c^2 - w_y^2)(F_1 + F_2 \operatorname{ctg} \sigma - F_3) + w_x(w_\infty - w_x)(F_1 + 2F_2 \operatorname{ctg} \sigma)]$$

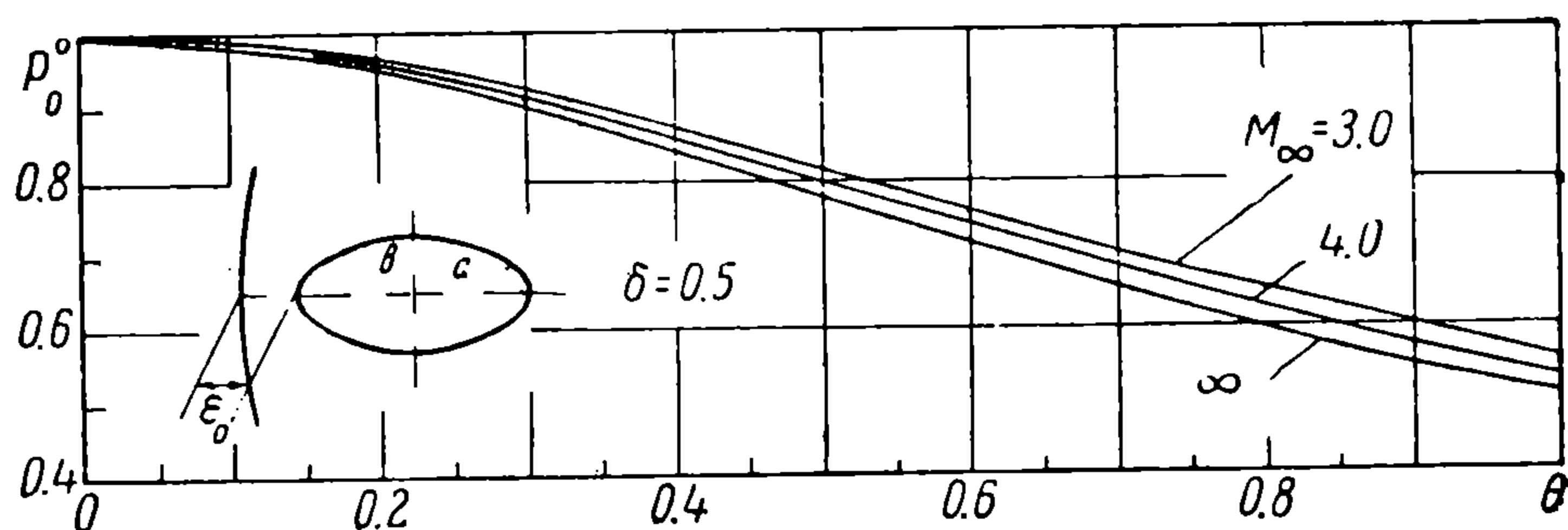
$$n = \frac{1}{\Delta y_1(x)} c^2 (w_\infty - w_x)(w_x - w_y \operatorname{ctg} \sigma)$$

$$\Delta = c^2(1 + \operatorname{ctg}^2 \sigma) - (w_x - w_y \operatorname{ctg} \sigma)^2$$

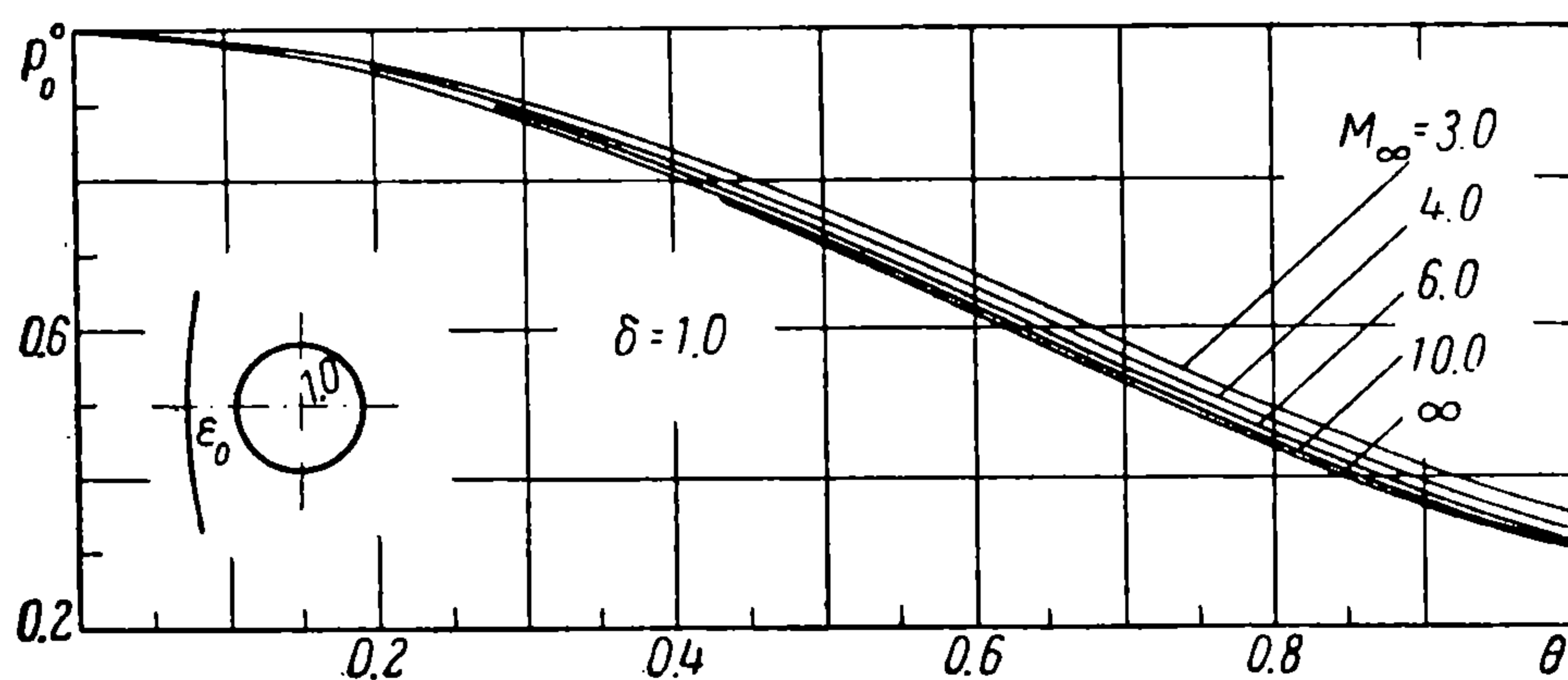
$$F_1 = \frac{1}{2\kappa} (1 - w^2)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \varphi^{-\frac{1}{\kappa-1}} \frac{\sin 2\sigma}{w_\infty} \left\{ \frac{2w_\infty^2}{\rho(\kappa+1)} - \frac{2m_\infty^2 \kappa(\kappa+1)}{\rho [2m_\infty^2 + (\kappa-1) \sin^2 \sigma]^2} \right\}$$

$$F_2 = -\frac{4w_\infty}{\kappa+1} \sin^2 \sigma, \quad F_3 = \frac{2w_\infty}{\kappa+1} \left(\cos 2\sigma + \frac{m_\infty^2}{\sin^2 \sigma} \right) \operatorname{tg} \sigma, \quad \left(m_\infty = \frac{1}{M_\infty} \right)$$

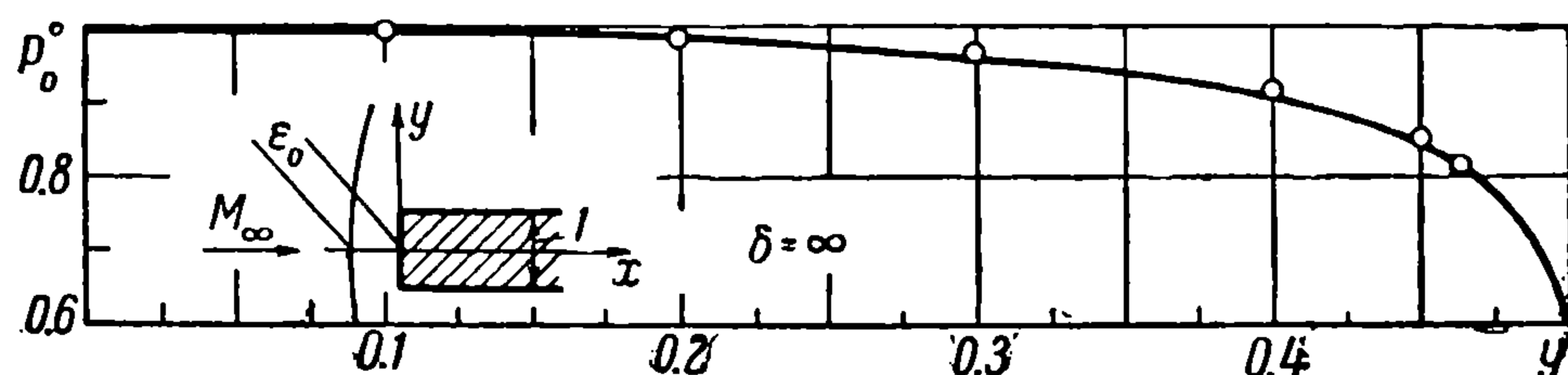
где $y = y_1(x)$ — уравнение контура ударной волны. Хотя величина Φ_1 в отличие от плоского случая зависит и от кривизны волны и не может



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

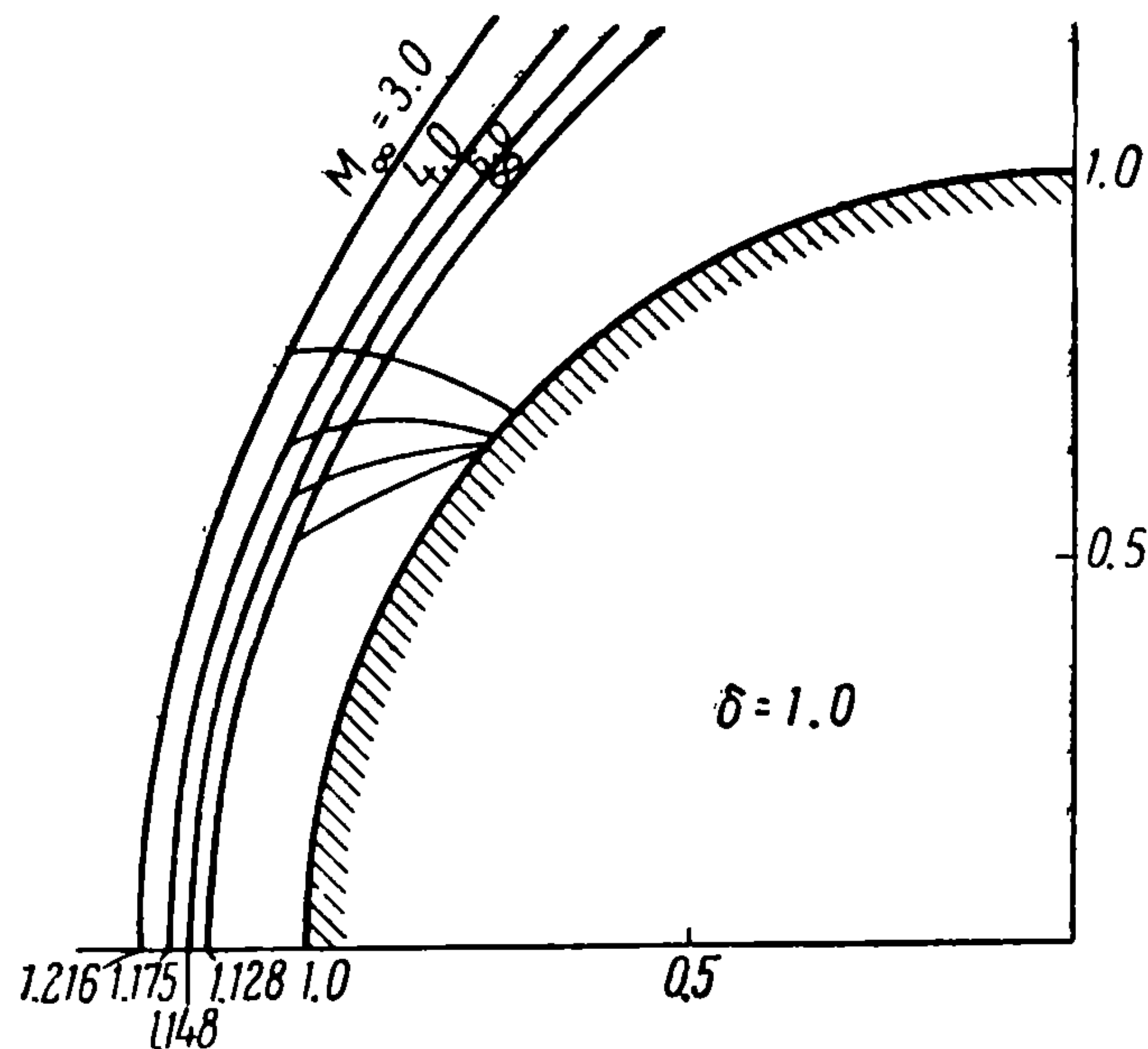
быть заранее протабулирована, тем не менее формула (7) весьма полезна, так как она дает возможность оценить точность расчета.

3°. Приведем некоторые результаты расчетов. На электронной счетной машине БЭСМ-1 были произведены расчеты обтекания эллипсоидов вращения (с отношением вертикальной к горизонтальной полуосям $\delta = b/a = 0.5$ и $\delta = 1.5$), сферы ($\delta = 1.0$), тел с плоским носом ($\delta = \infty$) при различных числах Маха набегающего потока ($M_\infty = 3, 4, 6, 10, \infty$), $\kappa = 1.40$ и в разных приближениях ($N = 1.2$).

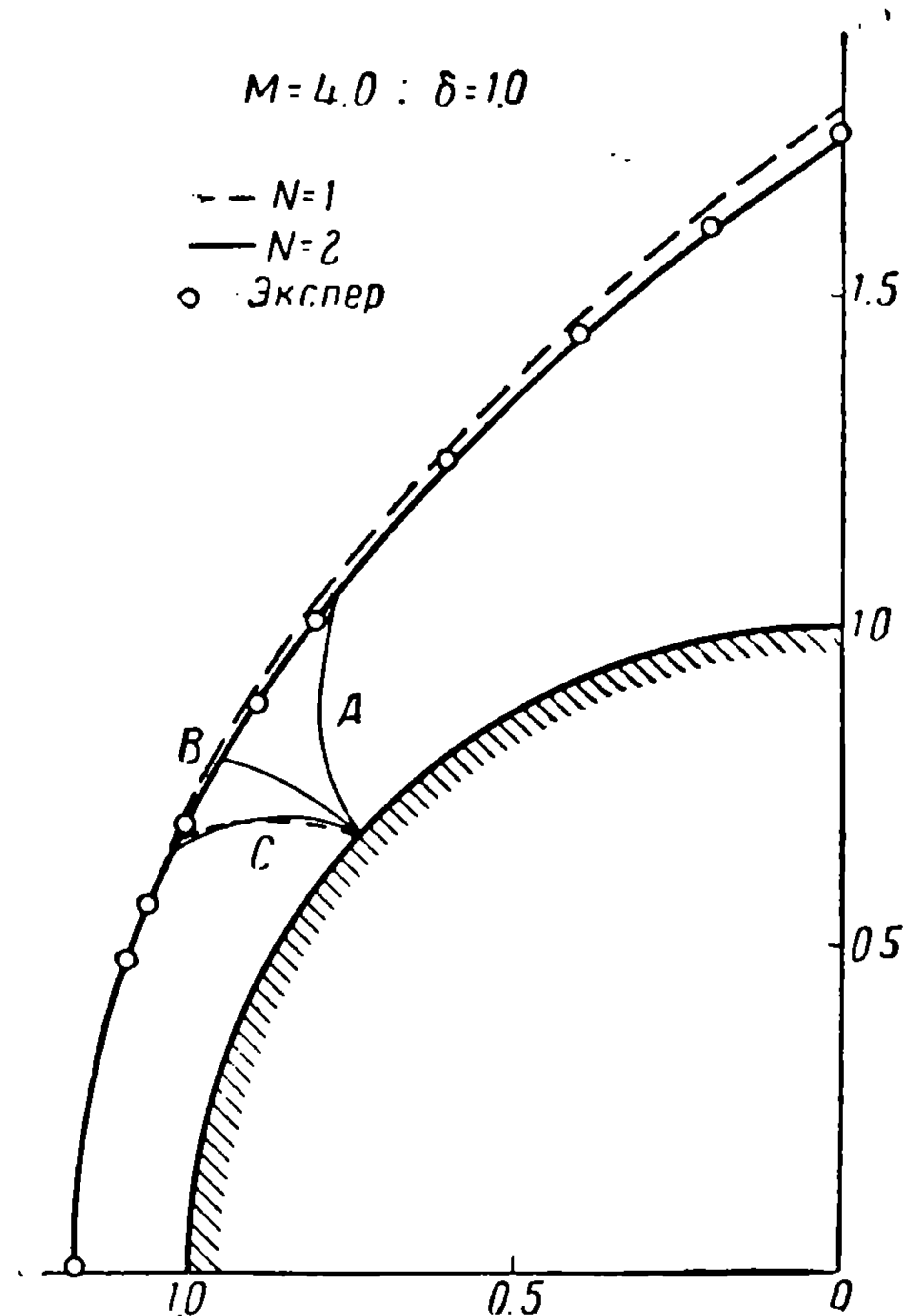
Расчетные схемы для тел с конечными значениями δ строились в координатах r, θ (полюс помещался в центре кривизны носика тела, а все линейные размеры отно-

гались к радиусу кривизны носика), в то время как для тела с плоским носом (диск) использовалась декратова система координат (линейные размеры относились к ширине диска).

На фиг. 2—4 дано распределение давления $p_0 = p_0(\theta) / p_0(0)$ вдоль различных тел: на фиг. 2 — для эллипсоида $\delta = 0.5$, на фиг. 3 — для сферы $\delta = 1.0$ и на



Фиг. 5



Фиг. 6

фиг. 4 — для диска $\delta = \infty$, $M_\infty = 3, 4, 10, \infty$, где приведено сравнение с экспериментом, проведенным научным сотрудником В. И. Шульгиным.

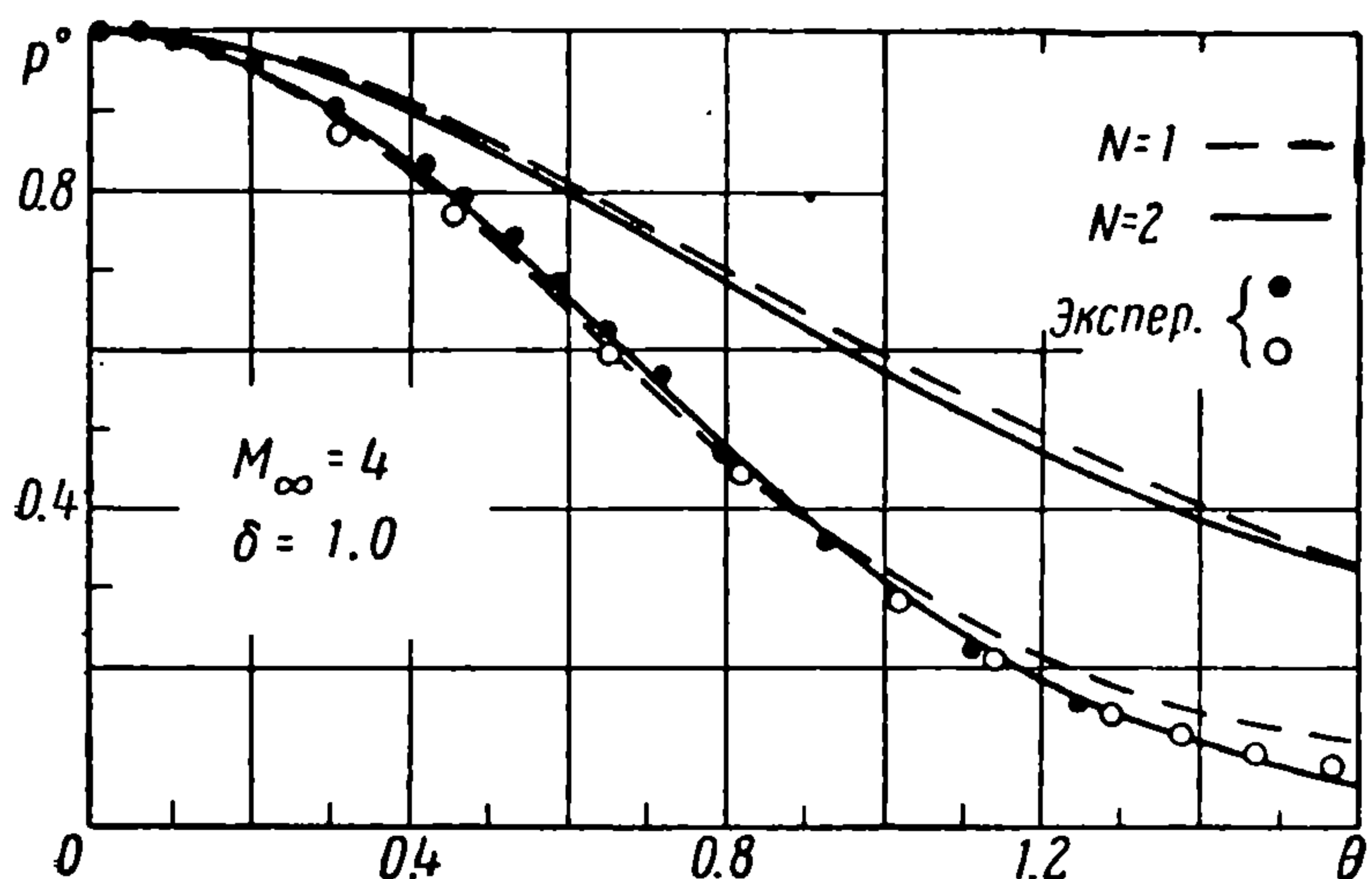
На фиг. 5 построены [ударные волны] и звуковые [линии для сферы при $M_\infty = 3, 4, 6, \infty$ ($N = 1, 2$). Углы подхода звуковых линий к ударной волне хорошо согласуются со значениями, полученными из формулы (7).

Фиг. 6,7 иллюстрируют сходимость метода] по приближениям. На фиг. 6 кривые A и B — характеристики первого и второго семейств, кривая C — звуковая линия. На фиг. 7 дано распределение давления на волне (две верхние кривые), на теле (нижние кривые) и приводятся результаты экспериментов, проведенных В. И. Шульгиным. На фиг. 8 показано, как изменяется, расстояние от тела до волны вдоль оси симметрии при различных δ .

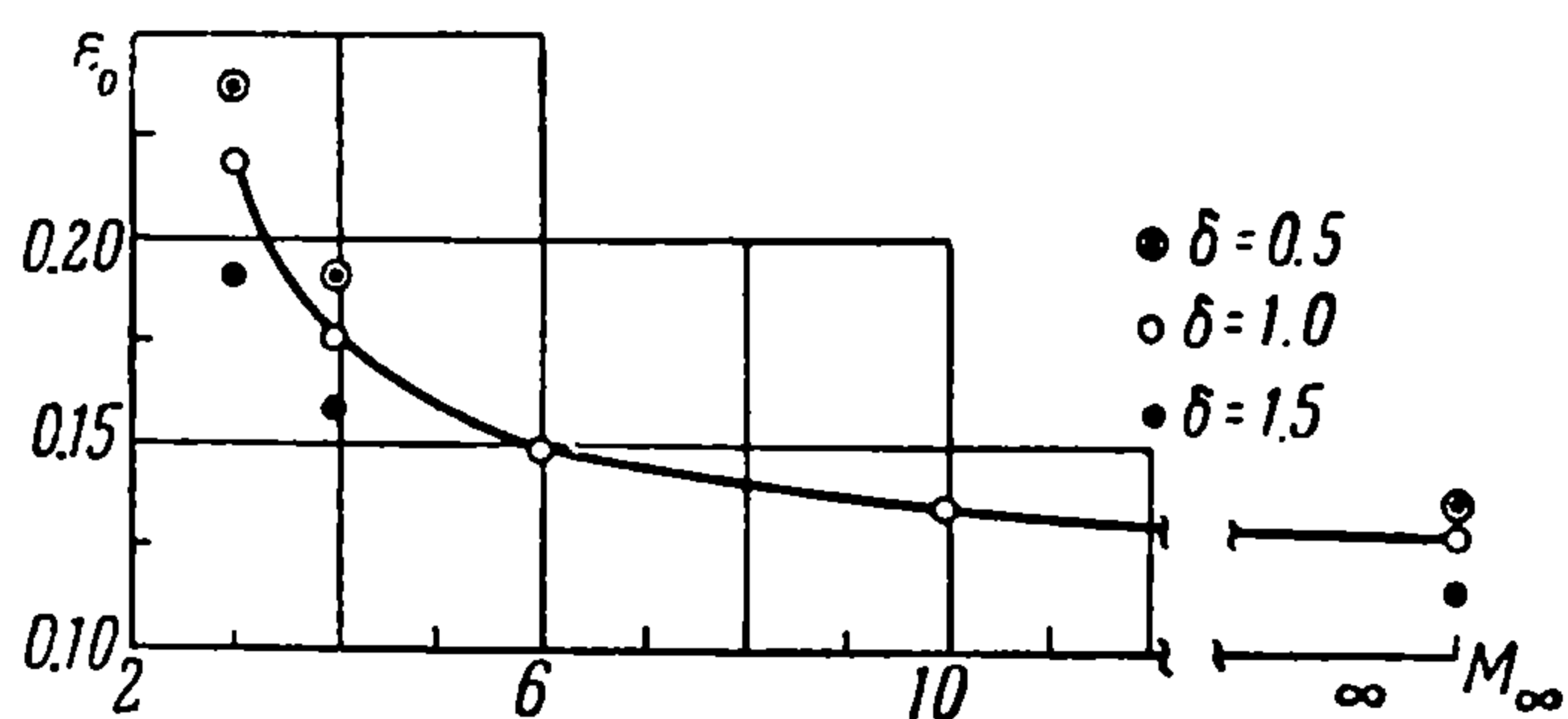
Ниже в таблицах приводятся численные результаты расчета обтекания сферы для $M_\infty = 4.0$ и $\kappa = 1.40$ при $N = 2$.

В одной из таблиц приводятся значения составляющих скорости u, v плотности ρ и давления p в пяти точках луча $\theta = \text{const}$: расстояние от тела до волны вдоль луча делится на четыре равные части

$$\xi = \frac{r-1}{s(\theta)} = 0 \text{ (тело), } 0.25, 0.50, 0.75 \text{ и } 1.00 \text{ (волна)}$$



Фиг. 7



Фиг. 8

0	u	v	ρ	ρ	u	v	ρ	ρ	
		ξ = 0				ξ = 0.25			
0.0000	u = 0	0.0000	5.016	0.717	-0.0478	0.0000	4.990	0.711	
0.0625		0.0353	5.001	0.714	-0.0474	0.0378	4.978	0.708	
0.1250		0.0706	4.954	0.704	-0.0470	0.0755	4.939	0.700	
0.1875		0.106	4.877	0.689	-0.0464	0.113	4.875	0.686	
0.2500		0.141	4.770	0.668	-0.0456	0.150	4.788	0.667	
0.3125		0.176	4.636	0.642	-0.0444	0.187	4.677	0.644	
0.3750		0.211	4.477	0.611	-0.0430	0.223	4.544	0.613	
0.4375		0.245	4.296	0.577	-0.0411	0.258	4.392	0.585	
0.5000		0.279	4.094	0.539	-0.0389	0.293	4.222	0.550	
0.5625		0.313	3.876	0.499	-0.0361	0.327	4.037	0.514	
0.6250		0.346	3.645	0.458	-0.0328	0.360	3.841	0.477	
0.6875		0.379	3.407	0.417	-0.0287	0.391	3.636	0.440	
0.7500		0.411	3.157	0.375	-0.0241	0.422	3.422	0.401	
0.8125		0.443	2.908	0.334	-0.0185	0.452	3.207	0.364	
0.8750		0.473	2.661	0.295	-0.0121	0.480	2.991	0.329	
0.9375		0.503	2.419	0.258	-0.00467	0.507	2.778	0.295	
1.0000		0.532	2.184	0.224	0.00380	0.532	2.570	0.263	
1.0625	0.560	1.960	0.192	0.0134	0.556	2.369	0.234		
1.1250	0.586	1.748	0.164	0.0241	0.578	2.176	0.207		
1.1875	0.612	1.551	0.138	0.0359	0.599	1.992	0.182		
1.2500	0.637	1.369	0.116	0.0489	0.618	1.819	0.160		
1.3125	0.660	1.202	0.0970	0.0631	0.635	1.657	0.140		
		ξ = 0.5				ξ = 0.75			
0.0000	-0.0956	0.0000	4.902	0.694	-0.143	0.0000	4.761	0.666	
0.0625	-0.0949	0.0405	4.893	0.692	-0.142	0.0433	4.755	0.664	
0.1250	-0.0941	0.0807	4.854	0.684	-0.141	0.0865	4.736	0.658	
0.1875	-0.0927	0.121	4.816	0.672	-0.139	0.129	4.704	0.648	
0.2500	-0.0908	0.160	4.748	0.655	-0.136	0.171	4.660	0.634	
0.3125	-0.0883	0.199	4.664	0.635	-0.132	0.212	4.604	0.617	
0.3750	-0.0850	0.236	4.562	0.611	-0.126	0.252	4.536	0.596	
0.4375	-0.0811	0.274	4.445	0.583	-0.120	0.291	4.459	0.574	
0.5000	-0.0763	0.309	4.315	0.554	-0.112	0.329	4.372	0.549	
0.5625	-0.0705	0.344	4.172	0.523	-0.103	0.365	4.276	0.523	
0.6250	-0.0637	0.377	4.019	0.490	-0.0929	0.399	4.172	0.496	
0.6875	-0.0558	0.409	3.859	0.458	-0.0810	0.431	4.063	0.469	
0.7500	-0.0466	0.439	3.692	0.425	-0.0676	0.462	3.949	0.441	
0.8125	-0.0360	0.468	3.522	0.392	-0.0524	0.490	3.831	0.414	
0.8750	-0.0239	0.494	3.351	0.362	-0.0355	0.516	3.710	0.388	
0.9375	-0.0103	0.519	3.181	0.332	-0.0168	0.541	3.589	0.363	
1.0000	0.00507	0.542	3.013	0.304	0.00380	0.563	3.467	0.338	
1.0625	0.0221	0.564	2.848	0.278	0.0262	0.582	3.346	0.316	
1.1250	0.0409	0.583	2.688	0.253	0.0506	0.600	3.226	0.294	
1.1875	0.0615	0.600	2.534	0.230	0.0767	0.615	3.107	0.273	
1.2500	0.0838	0.615	2.386	0.210	0.105	0.628	2.991	0.254	
1.3125	0.108	0.628	2.244	0.190	0.134	0.638	2.877	0.236	

При $\xi = 1.00$, помимо этих величин, приводятся также значения ε , σ , функции тока ψ_1 , энтропийной функции φ_1 (энтропия $s_1 = c_v \ln \varphi_1$) и вихревой функции $f_1 = d \ln \varphi_1 / d\psi_1$.

Вихрь на ударной волне определяется так:

$$\Omega_1 = \frac{(r_0 + \varepsilon) \sin \theta}{2x} (1 - w^2)^{\frac{x}{x-1}} \varphi_1^{-\frac{1}{x-1}} f_1, \quad c^2 = \frac{x-1}{2} (1 - w^2)$$

Функция тока на лучах $\theta = \text{const}$ может быть найдена путем интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d\psi}{dr} = r \rho v \sin \theta$$

В таблице приводятся также координаты звуковой линии и граничной характеристики для этого же случая.

θ	u	v	ρ	p	ε	σ	ψ_1	φ_1	f_1
$\xi=1.0$									
0.0000	-0.191	0.0000	4.572	0.629	0.175	1.571	0.0000	0.0750	-0.717
0.0625	-0.190	0.0463	4.569	0.628	0.176	1.520	0.00235	0.0748	-0.734
0.1250	-0.188	0.0927	4.560	0.623	0.177	1.470	0.00940	0.0744	-0.738
0.1875	-0.185	0.139	4.546	0.615	0.179	1.419	0.0211	0.0738	-0.735
0.2500	-0.180	0.184	4.526	0.604	0.182	1.369	0.0373	0.0729	-0.728
0.3125	-0.174	0.228	4.501	0.590	0.186	1.320	0.0580	0.0718	-0.718
0.3750	-0.166	0.270	4.470	0.574	0.191	1.272	0.0831	0.0706	-0.707
0.4375	-0.157	0.312	4.434	0.556	0.198	1.225	0.112	0.0691	-0.693
0.5000	-0.147	0.351	4.392	0.536	0.205	1.179	0.146	0.0676	-0.677
0.5625	-0.134	0.389	4.346	0.516	0.214	1.134	0.183	0.0659	-0.658
0.6250	-0.120	0.425	4.294	0.494	0.224	1.090	0.224	0.0642	-0.639
0.6875	-0.104	0.459	4.237	0.471	0.236	1.048	0.269	0.0624	-0.614
0.7500	-0.0870	0.490	4.176	0.448	0.250	1.008	0.317	0.0606	-0.586
0.8125	-0.0678	0.520	4.110	0.426	0.266	0.969	0.369	0.0589	-0.559
0.8750	-0.0468	0.547	4.040	0.404	0.284	0.932	0.444	0.0571	-0.529
0.9375	-0.0242	0.571	3.967	0.382	0.305	0.896	0.483	0.0554	-0.499
1.0000	0.0000	0.593	3.891	0.360	0.328	0.862	0.545	0.0538	-0.467
1.0625	0.0258	0.613	3.811	0.340	0.355	0.830	0.611	0.0522	-0.434
1.1250	0.0530	0.630	3.728	0.320	0.385	0.798	0.681	0.0507	-0.401
1.1875	0.0816	0.644	3.644	0.301	0.418	0.769	0.755	0.0493	-0.367
1.2500	0.111	0.656	3.558	0.283	0.457	0.741	0.834	0.0479	-0.333
1.3125	0.142	0.665	3.470	0.266	0.500	0.714	0.918	0.0467	-0.299

Звуковая линия		Характеристика I сем.		Характеристика II сем.	
$-x = 0.736$	$+y = 0.677$	$-x = 0.736$	$+y = 0.677$	$-x = 0.736$	$+y = 0.677$
0.764	0.690	0.756	0.701	0.760	0.697
0.799	0.699	0.773	0.729	0.786	0.715
0.829	0.702	0.785	0.761	0.813	0.731
0.870	0.701	0.794	0.797	0.841	0.747
0.880	0.700	0.798	0.816	0.870	0.761
0.903	0.695	0.801	0.845	0.900	0.774
0.925	0.690	0.801	0.873	0.931	0.786
0.946	0.682	0.800	0.900	0.951	0.793
0.966	0.674	0.798	0.926		
0.986	0.665	0.791	0.977		
1.004	0.655	0.779	1.027		
1.022	0.645	0.773	1.051		
1.031	0.639				

Расчеты тел при $\delta = \infty$ были проведены научным сотрудником Н. П. Шулишиной. Все предварительные расчеты и обработку полученных данных производили Н. В. Мельцис, А. И. Быкова и К. И. Васильева. Пользуюсь случаем, чтобы выразить этим товарищам большую благодарность.

Поступила 1 II 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. В а н Д а й к М. Проблема сверхзвукового обтекания тупоносого тела. Сб. «Механика», 1958, вып. 5, ИЛ.
2. Д о р о д н и ц ы н А. А. Об одном методе численного решения некоторых задач аэрогидродинамики. Труды III Всесоюз. математ. съезда, 1956, т. 2.
3. Б е л о ц е р к о в с к и й О. М. Обтекание симметричного профиля с отошедшей ударной волной, 1958, ИММ, т. XXII, вып. II.
4. Ч у ш к и н П. И. Расчет некоторых звуковых течений газа. ИММ, 1957, т. XXI, вып. 3.