

О СВОЙСТВАХ ДВИЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ИДЕАЛЬНЫХ СРЕД ПРИ ТОЧЕЧНОМ ВЗРЫВЕ

Н. Н. Кочина

(Москва)

Рассматривается задача о точечном взрыве в идеальной среде, свойства которой близки к свойствам идеального газа с показателем адиабаты $\gamma = 7$. Искомые функции выписываются в виде рядов по степеням времени, причем найден вид любого члена ряда.

1. Л. И. Седовым [1] было показано, что задача о сильном взрыве в идеальном газе с показателем адиабаты $\gamma = 7$ имеет простое точное решение. Оно может быть записано в виде [2]

$$v = \frac{1}{10} \frac{r}{t}, \quad \rho = \frac{4}{3} \rho_1^{\frac{6}{5}} E^{-\frac{1}{5}} r t^{-\frac{2}{5}}, \quad p = \frac{1}{25} \rho_1^{\frac{6}{5}} E^{-\frac{1}{5}} r^3 t^{-\frac{12}{5}}, \quad E_0 = \frac{2\pi E}{225} \quad (1.1)$$

Здесь через ρ_1 обозначена плотность в покоящемся газе перед фронтом ударной волны, через E — величина, пропорциональная полной энергии E_0 взрыва, так что радиус ударной волны

$$r_{2a} = \left(\frac{E}{\rho_1} \right)^{\frac{1}{5}} t^{\frac{2}{5}}$$

Соответствующая линеаризованная задача (причем линеаризация производится около решения (1.1)) при различных дополнительных предположениях рассмотрена в работах [2-4].

Будем исходить из постановки задачи, предложенной в работе [4], и считать, что рассматривается точечный взрыв для среды с внутренней энергией вида

$$\varepsilon(p, \rho) = \frac{p_0}{\rho_0} \left[\frac{P}{6R} + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \left(\frac{P}{R^7} \right)^{1-nk} \right] \quad (1.2)$$

$$\left(R = \frac{p}{\rho_0}, \quad P = \frac{p}{p_0}, \quad 0 < n = \frac{1}{l} \leq 1 \right)$$

Здесь через ρ_0 и p_0 обозначены некоторые константы с размерностями плотности и давления, D_k — произвольные параметры, l — целое число, причем ряд предполагается сходящимся. Как следует из работ [1,4], уравнение состояния для рассматриваемой среды может иметь более общий вид, чем уравнение Клапейрона. Уравнение (1.2) накладывает ограничение только на уравнение адиабаты, которое должно быть таким, как для идеального газа с показателем адиабаты $\gamma = 7$. Температура и энтропия имеют вид $(\Phi(\Psi))$ — произвольная функция)

$$T = \Phi(\Psi) \left[\frac{R^6}{6} + \sum_{k=1}^{\infty} D_k (1-nk) \Psi^{-nk} \right], \quad S = S_0 + \frac{p_0}{\rho_0} \int \frac{d\Psi}{\Phi(\Psi)} \quad \left(\Psi = \frac{P}{R^7} \right)$$

Будем искать решение сформулированной выше задачи в виде [2,4]

$$u = \frac{1}{10} \frac{r}{t} F(\lambda, \tau), \quad \rho = \frac{4}{3} \rho_1^{\frac{6}{5}} E^{-\frac{1}{5}} r t^{-\frac{2}{5}} G(\lambda, \tau), \quad p = \frac{1}{25} \rho_1^{\frac{6}{5}} E^{-\frac{1}{5}} r t^{-\frac{12}{5}} H(\lambda, \tau) \quad (1.3)$$

$$\lambda = \rho_1^{\frac{1}{5}} E^{-\frac{1}{5}} r t^{-\frac{2}{5}}, \quad \tau = (p_0 E^{-\frac{2}{5}} \rho_0^{-\frac{3}{5}})^n t^{\frac{6}{5}} \quad (1.4)$$

Считая, что функции $F(\lambda, \tau)$, $G(\lambda, \tau)$ и $H(\lambda, \tau)$ могут быть разложены по τ в степенные ряды

$$F(\lambda, \tau) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\lambda) \tau^k, \quad G(\lambda, \tau) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\lambda) \tau^k \quad (1.5)$$

$$H(\lambda, \tau) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} h_k(\lambda) \tau^k$$

и подставляя (1.3) — (1.5) в уравнения движения, получим для функций $f_k(\lambda)$, $g_k(\lambda)$ и $h_k(\lambda)$ следующую неоднородную систему линейных дифференциальных уравнений (уравнений Эйлера):

$$\begin{aligned} -3\lambda f_k' + 3\lambda h_k' + (12nk - 8)f_k - 9g_k + 9h_k + F_k^{(1)} &= 0 \\ \lambda f_k' - 3\lambda g_k' + 4f_k + 12nkg_k + F_k^{(2)} &= 0 \\ 21\lambda g_k' - 3\lambda h_k' - 4f_k - 84nkg_k + 12nkh_k + F_k^{(3)} &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

причем

$$F_k^{(1)} = \sum_{i=1}^{k-1} \left\{ [(12ni - 8)f_i - 3\lambda f_i'] g_{k-i} + (f_i + \lambda f_i') \left[f_{k-i} + \sum_{j=1}^{k-i-1} f_j g_{k-i-j} \right] \right\}$$

$$F_k^{(2)} = \sum_{i=1}^{k-1} \left\{ (4f_i + \lambda f_i') g_{k-i} + \lambda f_i g_{k-i}' \right\} \quad (1.7)$$

$$F_k^{(3)} = \sum_{i=1}^{k-1} \left\{ 3h_i [7\lambda g_{k-i}' + 4n(8i - 7k)g_{k-i}] - 3\lambda h_i' g_{k-i} + f_{k-i} [\lambda h_i' - 4h_i - 7\lambda g_i' - 4g_i] + f_i \sum_{j=1}^{k-i-1} [g_j (\lambda h_{k-i-j}' - 4h_{k-i-j}) - 7\lambda g_j' h_{k-i-j}] \right\}$$

Легко убедиться, что правые части уравнений (1.6) $F_k^{(i)}(\lambda)$ имеют вид

$$F_k^{(i)} \lambda = - \sum_{\mu=4}^{\omega_k} \beta_{\mu k}^{(i)} \lambda^{\gamma_{\mu k}} \quad (\beta_{\mu k}^{(i)}, \gamma_{\mu k} = \text{const}) \quad (1.8)$$

Предполагая константы $\beta_{\mu k}^{(i)}$ и $\gamma_{\mu k}$ известными и пользуясь формулами (1.8), найдем решение системы уравнений (1.6)

$$\begin{aligned} f_k(\lambda) &= -3 \sum_{i=2}^3 C_k^{(i)} \lambda^{\alpha_i(nk)} + \sum_{\mu=4}^{\omega_k} \theta_{\mu k}^{(1)} \lambda^{\gamma_{\mu k}} = \sum_{\mu=1}^{\omega_k} \theta_{\mu k}^{(1)} \lambda^{\gamma_{\mu k}} \\ g_k(\lambda) &= \sum_{i=1}^3 \mu_k^{(i)} C_k^{(i)} \lambda^{\alpha_i(nk)} + \sum_{\mu=4}^{\omega_k} \theta_{\mu k}^{(2)} \lambda^{\gamma_{\mu k}} = \sum_{\mu=1}^{\omega_k} \theta_{\mu k}^{(2)} \lambda^{\gamma_{\mu k}} \\ h_k(\lambda) &= \sum_{i=1}^3 \sigma_k^{(i)} C_k^{(i)} \lambda^{\alpha_i(nk)} + \sum_{\mu=4}^{\omega_k} \theta_{\mu k}^{(3)} \lambda^{\gamma_{\mu k}} = \sum_{\mu=1}^{\omega_k} \theta_{\mu k}^{(3)} \lambda^{\gamma_{\mu k}} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь $C_k^{(i)}$ — константы интегрирования

$$\alpha_1(x) = 4x, \quad \alpha_{2,3}(x) = \frac{-(12x+17) \pm \sqrt{7(48x^2+40x+7)}}{4}$$

$$\mu_k^{(1)} = 1, \quad \sigma_k^{(1)} = \frac{3}{c_1(nk)+3}, \quad \mu_k^{(i)} = \frac{4 + \alpha_i(nk)}{4nk - \alpha_i(nk)}$$

$$\sigma_k^{(i)} = \frac{24 + 7\alpha_i(nk)}{4nk - \alpha_i(nk)} \quad (i = 2, 3), \quad \theta_{\mu k}^{(i)} = \frac{1}{D_{\mu k}} \left(\sum_{j=1}^3 \beta_{\mu k}^{(j)} D_{\mu k}^{(ji)} \right) \quad (\mu \geq 4)$$

$$D_{\mu k} = 9 \begin{vmatrix} -3\gamma_{\mu k} + 12nk - 8 & -3 & \gamma_{\mu k} + 3 \\ \gamma_{\mu k} + 4 & -\gamma_{\mu k} + 4nk & 0 \\ -4 & 7(\gamma_{\mu k} - 4nk) & -\gamma_{\mu k} + 4nk \end{vmatrix} \quad (1.10)$$

$D_{\mu k}^{(ij)}$ — адъюнкты детерминанта $D_{\mu k}$.

Соотношения (1.7) и (1.8) показывают, что решение задачи о точечном взрыве методом последовательных приближений сводится к нахождению констант $\beta_{\mu k}^{(i)}$ и $\gamma_{\mu k}$. Затем из граничных условий (для различных вышеупомянутых задач [2-4]) можно найти константы $C_k^{(i)}$.

2. Заметим, что для первого приближения ($k=1$) уравнения (1.6) образуют однородную систему, так что в формулах (1.8) нужно положить [2,4]

$$\beta_{\mu 1}^{(i)} \equiv 0 \quad (\mu = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

Легко убедиться, что можно искать функции $F_k^{(l)}(\lambda)$, $f_k(\lambda)$, $g_k(\lambda)$ и $h_k(\lambda)$ в виде

$$F_k^{(l)}(\lambda) = \sum_{p=1}^{k-1} F_{kp}^{(l)}(\lambda), \quad f_k(\lambda) = \sum_{p=0}^{k-1} f_{kp}(\lambda) \quad (2.2)$$

$$g_k(\lambda) = \sum_{p=0}^{k-1} g_{kp}(\lambda), \quad h_k(\lambda) = \sum_{p=0}^{k-1} h_{kp}(\lambda)$$

Функции $f_{k0}(\lambda)$, $g_{k0}(\lambda)$, $h_{k0}(\lambda)$ и $F_{k1}^{(l)}(\lambda)$ можно выписать сразу для любого k по формулам (1.7), предполагая, что в соотношениях (1.9) все $\theta_{\mu k}^{(i)} \equiv 0$ ($\mu \geq 4$), т. е. учитывая только решение однородной системы (1.6). Затем, пользуясь формулами (1.8) — (1.10), где μ изменяется в пределах от 1 до ω_{k1} , выписываем выражения $f_{k1}(\lambda)$, $g_{k1}(\lambda)$, $h_{k1}(\lambda)$, после чего, пользуясь этими последними функциями, выписываем $F_{k2}^{(l)}$ и т. д. Как видно из формул (1.7), при $p = k - 1$ этот процесс оборвется.

Будем считать, что имеют место формулы

$$f_{ip} = \sum_{\mu} \theta_{\mu i}^{(1)} \lambda^{\gamma_{\mu i}}, \quad g_{ip} = \sum_{\mu} \theta_{\mu i}^{(2)} \lambda^{\gamma_{\mu i}}, \quad h_{ip} = \sum_{\mu} \theta_{\mu i}^{(3)} \lambda^{\gamma_{\mu i}} \quad (2.3)$$

Здесь суммирование вводится по $\mu = 1 + \omega_p^{(1)}, \dots, \omega_{p+1}^{(i)}$, причем ($i \leq k - 1$) $\omega_0^{(i)} = 0$, $\omega_1^{(i)} = 3$; числа $\gamma_{\mu i}$, $\theta_{\mu i}^{(l)}$ известны.

Подставляя формулы, аналогичные (2.3), в соотношения для функций $F_{kp}^{(l)}(\lambda)$, получим для каждой из функций $F_{kp}^{(l)}$ явное выражение через уже известные величины.

Перенумеруем входящие в выражения для функций $F_{kp}^{(l)}$ показатели и соответствующие коэффициенты.

Можно убедиться, что функции $F_{kp}^{(l)}$ представляются следующим образом:

$$F_{kp}^{(l)} = \sum_{\mu} \beta_{\mu k}^{(l)} \lambda^{\gamma_{\mu k}} \quad (l = 1, 2, 3; p = 1, \dots, k-1) \quad (2.4)$$

Здесь суммирование ведется по $\mu = 1 + \omega_p^{(k)}, \dots, \omega_{p+1}^{(k)}$, причем числа $\omega_{p+1}^{(k)} - \omega_p^{(k)}$ и константы $\gamma_{\mu k}$ и $\beta_{\mu k}^{(l)}$ для этих значений μ будут найдены.

Используя формулы (1.8) — (1.10), выпишем соответствующие выражения для функций $f_{kp}(\lambda)$, $g_{kp}(\lambda)$, $h_{kp}(\lambda)$

$$f_{kp} = \sum_{\mu} \theta_{\mu k}^{(1)} \lambda^{\gamma_{\mu k}}, \quad g_{kp} = \sum_{\mu} \theta_{\mu k}^{(2)} \lambda^{\gamma_{\mu k}}, \quad h_{kp} = \sum_{\mu} \theta_{\mu k}^{(3)} \lambda^{\gamma_{\mu k}} \quad (2.5)$$

Здесь суммирование по μ аналогично (2.4).

Таким образом, последовательно для $p = 0, 1, \dots, k-1$ можно определять (сразу для всех k) соответствующие части решения. При этом для каждого p оказывается найденным решение $f_p(\lambda)$, $g_p(\lambda)$, $h_p(\lambda)$.

Отметим, что аналогичным путем можно выписать решение, соответствующее более общему виду внутренней энергии ($\Delta_k(R)$ — произвольные функции)

$$\varepsilon(p, \rho) = \frac{p_0}{\rho_0} \left[\frac{P}{6R} + \sum_{k=1}^{\infty} P^{1-nk} \Delta_k(R) \right] \quad (2.6)$$

Соответствующие выражения для температуры и энтропии мы не выписываем ввиду их громоздкости; для случая $\Delta_k = 0$ ($k > 1$) в формуле (2.6) эти выражения выписаны в статье [4].

3. Перейдем к нахождению констант $C_k^{(i)}$. Чтобы удовлетворить условию в центре симметрии (скорость частиц газа равна нулю) [2.4], нужно положить $C_k^{(3)} \equiv 0$. Безразмерный радиус ударной волны в зависимости от времени можно искать в виде ряда по степеням τ

$$\left(\frac{\rho_1}{E} \right)^{\frac{1}{5}} r_2 t^{-\frac{2}{5}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \tau^k \quad (3.1)$$

Из условий на ударной волне

$$v_2 = c \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right), \quad p_2 = p_1 + \rho_1 c^2 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \\ \frac{1}{2} c^2 \left(1 - \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2} \right) + \frac{7}{6} \left[\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_1}{\rho_2} - \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) c^2 \right] + \\ + \frac{p_0}{\rho_0} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \left\{ \left(\frac{P_1}{R_1^7} \right)^{1-nk} - \left\{ \frac{1}{R_2^7} \left[P_1 + \frac{\rho_1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) c^2 \right] \right\}^{1-nk} \right\} = 0 \quad (3.2)$$

находим константы A_k , $C_k^{(1)}$ и $C_k^{(2)}$. Оказывается, что для определения этих констант получается система линейных уравнений, в правые части которых входят параметры задачи, а также уже известные из решения предыдущей системы константы A_q , $C_q^{(1)}$, $C_q^{(2)}$, где $q < k$.

4. Рассмотрим теперь поведение решения (1.9) вблизи центра симметрии. Предполагая, что на некотором участке $0 \leq R \leq R_*$

$$\Delta_k(R) = D_k R^{-7(1-nk)}$$

и удерживая в выражениях (1.9) только старшие члены $\theta_{\omega_k k}^{(i)} \lambda^{\gamma_{\omega_k k}}$

($i = 1, 2, 3$), запишем решение (1.5) следующим образом: (4.1)

$$F(\lambda, \tau) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \theta_{\omega_k k}^{(1)} x^k, \quad G(\lambda, \tau) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \theta_{\omega_k k}^{(2)} x^k, \quad H(\lambda, \tau) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \theta_{\omega_k k}^{(3)} x^k$$

Здесь

$$x = \tau \lambda^{\alpha_2(n)} = \tau \lambda^{\frac{1}{k} \gamma_{\omega_k k}} \quad (4.2)$$

константы $\beta_{\omega_k k}^{(l)}$ примут вид ($\alpha_2 = \alpha_2(n)$) (4.3)

$$\begin{aligned} \beta_{\omega_k k}^{(1)} &= \sum_{i=1}^{k-1} \theta_{\omega_i i}^{(1)} \left\{ [12ni - 3i\alpha_2 - 8] \theta_{\omega_{k-i} k-i}^{(2)} + \right. \\ &\quad \left. + (1 + i\alpha_2) \left[\theta_{\omega_{k-i} k-i}^{(1)} + \sum_{j=1}^{k-i-1} \theta_{\omega_j j}^{(1)} \theta_{\omega_{k-i-j} k-i-j}^{(2)} \right] \right\} \\ \beta_{\omega_k k}^{(2)} &= (4 + k\alpha_2) \sum_{i=1}^{k-1} \theta_{\omega_i i}^{(1)} \theta_{\omega_{k-i} k-i}^{(2)} \\ \beta_{\omega_k k}^{(3)} &= \sum_{i=1}^{k-1} \left\{ 3\theta_{\omega_i i}^{(3)} \theta_{\omega_{k-i} k-i}^{(2)} [(7k - 8i)\alpha_2 + 4n(8i - 7k)] + \right. \\ &\quad \left. + \theta_{\omega_{k-i} k-i}^{(1)} [(i\alpha_2 - 4)\theta_{\omega_i i}^{(3)} - (7i\alpha_2 + 4)\theta_{\omega_i i}^{(2)}] + \right. \\ &\quad \left. + \theta_{\omega_i i}^{(1)} \sum_{j=1}^{k-i-1} \theta_{\omega_j j}^{(2)} \theta_{\omega_{k-i-j} k-i-j}^{(3)} [(k - i - 8j)\alpha_2 - 4] \right\} \end{aligned}$$

Формулы (1.3), (1.4), (4.1) — (4.3) определяют асимптотическое поведение решения. Это решение совпадает с рассмотренным в работах [2,4] представлением вблизи центра симметрии решения линеаризированной задачи о точечном взрыве. Следовательно, справедливы все сделанные в работе [4] выводы о поведении характеристик движения вблизи центра симметрии в зависимости от величины параметра n и знака константы $C_1^{(2)}$, а также о возникновении при $D_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots$) для ряда значений n и $C_1^{(2)}$ второй ударной волны, распространяющейся из центра симметрии вслед за первой.

На фигуре дано поле интегральных кривых для уравнения ($z = 7G/H$)

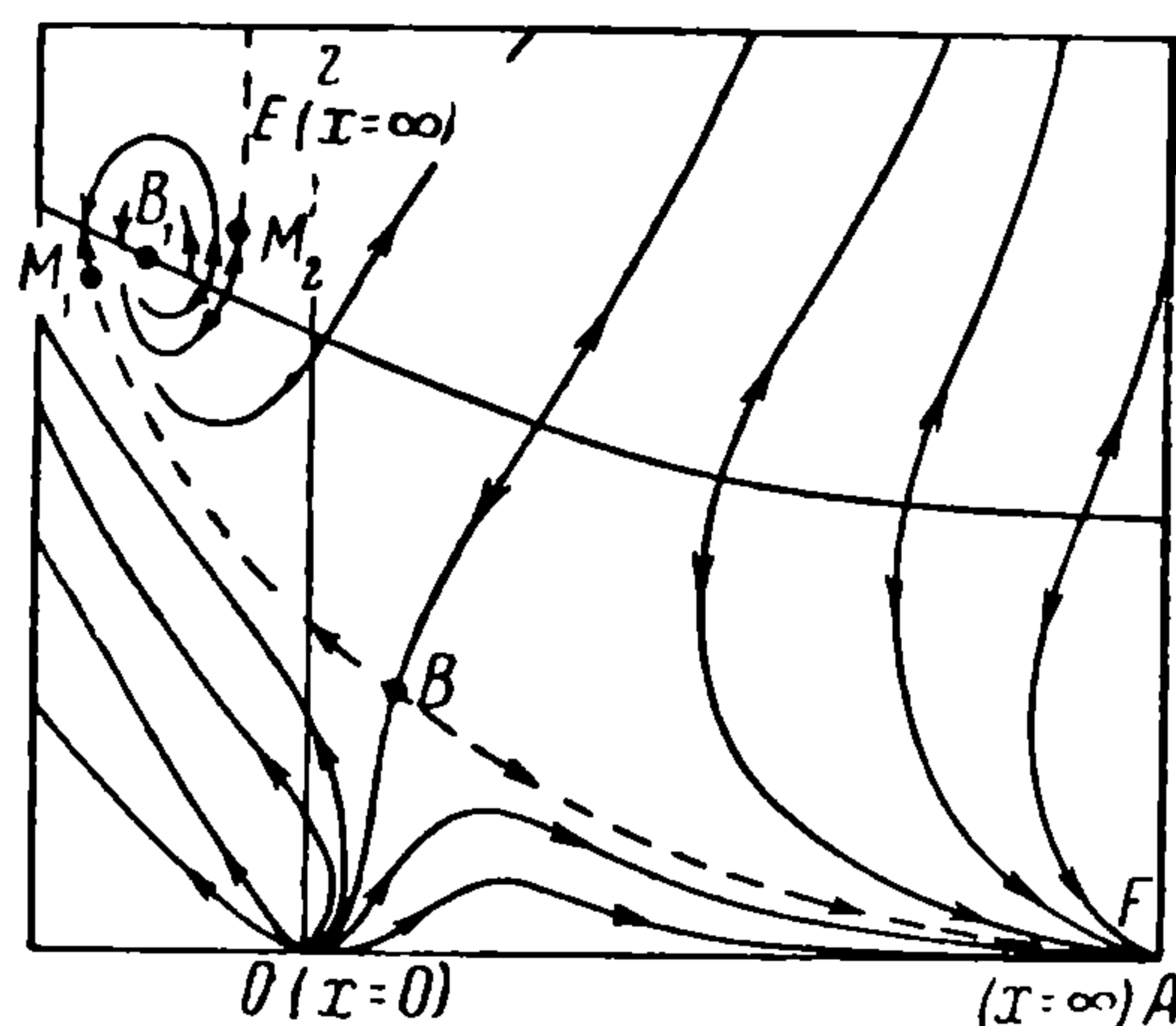
$$\begin{aligned} \frac{dz}{dF} &= \frac{2z \{7(12n - 4\alpha_2 + \alpha_2 F) [3\alpha_2 F(F - 10) - 10(F - 1)(12n - 4\alpha_2 + \alpha_2 F)]\}}{(12n - 4\alpha_2 + \alpha_2 F) \{-7F(F - 10)(12n - 4\alpha_2 + \alpha_2 F) + 9[7\alpha_2 F - 4(\alpha_2 + 3n)]z\}} + \\ &\quad + \frac{6\alpha_2 z^2 [9(12n - 4\alpha_2 + \alpha_2 F) - 2\alpha_2(F - 1)]}{(12n - 4\alpha_2 + \alpha_2 F) \{-7F(F - 10)(12n - 4\alpha_2 + \alpha_2 F) + 9[7\alpha_2 F - 4(\alpha_2 + 3n)]z\}} \quad (4.4) \end{aligned}$$

к качественному исследованию и интегрированию которого сводится нахождение решения вблизи центра симметрии [2,4], для случая $0,66978 < n \leq 1$.

При $C_1^{(2)} < 0$ решение рассматриваемой задачи непрерывно, интегральная кривая, дающая решение задачи, выходит из соответствующей автомодельному случаю точки B ($F = 1, z = 7, x = 0$) и входит в отвечающую центру симметрии точку A ($F = 10, z = 0, x = \infty$). При $C_1^{(2)} > 0$ выходящая из точки B интегральная кривая попадает в точку B_1 , которая является фокусом. Точка B_1 лежит на параболе

$$z = \frac{1}{3\alpha_2^2} (12n - 4\alpha_2 + \alpha_2 F)^2 \quad (4.5)$$

на которой параметр x достигает экстремального значения. Следовательно, при подходе к точке B_1 интегральная кривая бесчисленное число раз пересекает параболу (4.5), и непрерывное решение задачи невозможно. Если вблизи значения $R = 0$ в формуле (2.6) можно положить для всех k $\Delta_k(R) \equiv 0$, решение задачи можно получить с ударной волной (состояние в среде перед ударной волной характеризуется на фигуре точкой M_1 , лежащей на пунктирной кривой, входящей в точку B_1 , состояние в среде за ударной волной — точкой M_2 , лежащей на кривой, входящей в точку E , где $z = \infty$ и $x = \infty$).



Для других значений n в рассматриваемом нами интервале ($0 < n \leq 1$) получаются аналогичные результаты: вторая ударная волна получается за счет того, что интересующая нас интегральная кривая входит в особую точку, лежащую на параболе (4.5) и являющуюся фокусом.

5. Л. П. Седовым показано, что решение любой задачи об автомодельном движении совершенного газа сводится к качественному исследованию обыкновенного дифференциального уравнения (2.1) работы [1] (стр. 171), зависящего при фиксированных ν и γ от двух параметров δ и κ , и к проведению соответствующей интегральной кривой.

Имеются примеры возникновения второй ударной волны для автомодельных и предельных к автомодельным движений [5,6,7].

Координаты V тех особых точек уравнения (2.1) [1], которые получаются от пересечения кривой, вдоль которой интегральные кривые горизонтальны, с кривой, вдоль которой интегральные кривые вертикальны, удовлетворяют некоторому кубическому уравнению. Можно показать, что это уравнение распадается на квадратное и линейное

$$(\nu - 1)V^2 + [1 - \kappa - \nu\delta]V + \kappa\delta = 0, \quad [2 + \nu(\gamma - 1)]V - 2 = 0 \quad (5.1)$$

В случае плоской симметрии упомянутое кубическое уравнение, как видно из формул (5.1), переходит в квадратное.

Выпишем координаты соответствующих точек

$$V_1 = \frac{2}{2 + \nu(\gamma - 1)}, \quad z_1 = \frac{2\nu(\gamma - 1)\{2 - [2 + \nu(\gamma - 1)]\delta\}}{\{-2\nu + \kappa[2 + \nu(\gamma - 1)]\}[2 + \nu(\gamma - 1)]^2} \quad (5.2)$$

$$V_{2,3} = \frac{1}{2(\nu - 1)} [\kappa + \nu\delta - 1 \mp \sqrt{\kappa^2 + 2[(2 - \nu)\delta - 1]\kappa + (\nu\delta - 1)^2}]$$

$$z_{2,3} = [\{\kappa^2 + 2[(2 - \nu)\delta - 1]\kappa + [\nu^2 - 2\nu + 2]\delta^2 - 2\delta + 1\} \mp \quad (5.3)$$

$$\mp [\kappa + (2 - \nu)\delta - 1] \sqrt{\kappa^2 + 2[(2 - \nu)\delta - 1]\kappa + (\nu\delta - 1)^2}] \frac{1}{2(\nu - 1)^2} \quad (\nu = 2, 3)$$

$$V_2 = \frac{\kappa\delta}{\kappa + \delta - 1}, \quad z_2 = \frac{\delta^2(\delta - 1)^2}{(\kappa + \delta - 1)^2} \quad (\nu = 1)$$

При $\nu = 2$ или $\nu = 3$ особые точки (V_2, z_2) и (V_3, z_3) действительны, если параметры δ и κ удовлетворяют неравенству

$$\kappa^2 + 2[(2 - \nu)\delta - 1]\kappa + (\nu\delta - 1)^2 \geq 0$$

Если $\delta \geq 1$, это неравенство выполнено всегда, если $\delta < 1$, оно выполнено при

$$x \leq 1 - (2 - \nu)\delta - 2\sqrt{(\nu - 1)\delta(1 - \delta)}$$

и при

$$x \geq 1 - (2 - \nu)\delta + 2\sqrt{(\nu - 1)\delta(1 - \delta)}$$

Легко непосредственно убедиться, что особые точки (V_2, z_2) и (V_3, z_3) лежат на параболе $z = (V - \delta)^2$, на которой параметр $\lambda = r/bt^\delta$ достигает экстремального значения.

Особая точка (V_1, z_1) лежит выше параболы $z = (V - \delta)^2$ при следующих условиях:

$$1) \quad \delta > \frac{2}{2 + \nu(\gamma - 1)}, \quad \frac{2\nu\{\gamma + 1 - \delta[2 + \nu(\gamma - 1)]\}}{[2 + \nu(\gamma - 1)]\{2 - \delta[2 + \nu(\gamma - 1)]\}} < x < \frac{2\nu}{2 + \nu(\gamma - 1)}$$

$$2) \quad \delta < \frac{2}{2 + \nu(\gamma - 1)}, \quad \frac{2\nu}{2 + \nu(\gamma - 1)} < x < \frac{2\nu\{\gamma + 1 - \delta[2 + \nu(\gamma - 1)]\}}{[2 + \nu(\gamma - 1)]\{2 - \delta[2 + \nu(\gamma - 1)]\}}$$

Остановимся подробнее на первом случае. Как можно показать, имеют место следующие неравенства: $V_2 < V_3 < V_1$, причем, если $\delta < 1$, $x > 0$, все интегральные кривые, кроме одной, имеют в точке (V_2, z_2) меньший, а в точке (V_3, z_3) больший угол наклона к оси V , чем парабола $z = (V - \delta)^2$ в соответствующей точке. Следовательно, направление движения по интегральным кривым в сторону возрастания λ таково, что если в начальный момент времени скорость, плотность и давление в среде распределены по некоторым степенным законам, то при расширении цилиндрического или сферического поршня ($r_* = \lambda_* bt^\delta$) для некоторого интервала значений λ_* возникнет вторая ударная волна, движущаяся вслед за первой.

Уравнение (4.4) представляет собой частный случай уравнения (2.1) работы [1], причем

$$\nu = 3, \quad \gamma = 7, \quad \delta = \frac{2}{5} \left[1 - \frac{3n}{a_2(n)} \right], \quad x = \frac{6}{35} \left[1 + \frac{3n}{a_2(n)} \right]$$

Специфика рассмотренной в пп. 1—4 задачи о точечном взрыве заключается в том, что вторая ударная волна найдена для неавтомоделного движения (движение автомодельно только вблизи центра симметрии).

Поступила 8 VII 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат, М., 1954.
2. Лидов М. Л. О предельных решениях вблизи особой точки. ДАН СССР, 1958, т. 120, № 6.
3. Коробейников В. П. и Мельникова Н. С. О точных решениях линеаризованной задачи о точечном взрыве с противодействием. ДАН СССР, 1957, т. 116, № 2; Письмо в редакцию ДАН СССР, 1959, т. 126, № 1.
4. Кочина Н. Н. Об особенностях вблизи центра симметрии при точечном взрыве и о возникновении второй ударной волны. ДАН СССР, 1959, т. 126, № 6.
5. Компанец А. С. Автомодельная задача о развитии ударной волны из волны сжатия. ДАН СССР, 1956, т. 107, № 1.
6. Григорян С. С., РЖ Мех, 1959, № 6, 6050.
7. Григорян С. С. О некоторых точных решениях уравнений газовой динамики ДАН СССР, 1958, т. 121, № 4.