Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

К ЗАДАЧЕ О ВЗРЫВЕ НАД ПОВЕРХНОСТЬЮ ЖИДКОСТИ

В. М. Кислер
(Москва)

Изучается задача о взрыве над поверхностью жидкости при следующих предположениях:

а) воздействие внешнего взрыва на свободную поверхность может быть заменено некоторым нестационарным давлением, распределенным по изменяющейся со временем области;

б) задача о движениях жидкости считается линейной, что может быть оправдано большим различием между плотностями жидкости и газа;

в) жидкость предполагается несжимаемой, это последнее допущение тем вернее, чем меньше скорость распространения ударной волны вдоль свободной поверхности жидкости в сравнении со скоростью звука в реальной жидкости.

Эти предположения позволяют свести задачу о взрыве над поверхностью жидкости к некоторой задаче о возмущенных бесконечно малых волновых движениях тяжелой несжимаемой идеальной жидкости. По-видимому, впервые к такой постановке обращался Г. Ламб [1] при решении некоторых вопросов, связанных с теорией длинных волн. В настоящее время задача о волновых движениях в такой постановке довольно подробно изучена в работе А. Б. Финкелстейна [2]; эта постановка также использована в работах С. С. Войта [3], Л. В. Черкесова [4] и др.

Из формул, относящихся к взрыву над поверхностью тяжелой жидкости, нетрудно получить формулы для смещений свободной поверхности невесомой жидкости, устремляя ускорение силы тяжести g к нулю. Это будет соответствовать первым моментам взрыва, когда влияние давлений будет преобладающим в сравнении с силами гравитации.

1. Общее выражение для потенциала. Пусть к какой-то области свободной поверхности жидкости глубины h во все время движения приложено некоторое давление. Потенциал скорости движения частиц жидкости $\varphi(x, y, z, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$; система координат выбрана как обычно в теории волн, t — время. Если через $p_0(x, y, t)$ обозначить приложенное к свободной поверхности давление, а через $\zeta(x, y, t)$ — отклонение свободной поверхности от плоскости $z = 0$, то из интеграла Коши — Лагранжа, используя основные допущения теории бесконечно малых волн, получим граничное условие на свободной поверхности

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_0(x, y, t)}{\partial t} \qquad \text{при } z = 0 \tag{1.1}$$

При выводе этого условия получается соотношение, из которого находится $\zeta(x, y, t)$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{z=0} + g\zeta(x, y, t) = -\frac{p_0(x, y, t)}{\rho} \tag{1.2}$$

На дне, очевидно, имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \qquad \text{при } z = -h \tag{1.3}$$

Рассматривая взрыв над поверхностью первоначально покоящейся жидкости, в качестве начальных условий задачи примем такие:

$$\zeta = 0, \qquad \partial\zeta / \partial t = 0 \quad \text{при } t = 0$$

При помощи соотношения (1.2) последние условия приводятся к таким:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{\substack{z=0\\t=0}} = -\frac{p_0(x, y, 0)}{\rho}, \qquad \left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right|_{\substack{z=0\\t=0}} = -\frac{1}{\rho}\left.\frac{\partial p_0(x, y, t)}{\partial t}\right|_{t=0} \tag{1.4}$$

Посредством двумерного преобразования Фурье получаем выражение для искомого потенциала

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^*(\xi, \eta, z, t)\, e^{-i(\xi x+\eta y)}\, d\xi\, d\eta \tag{1.5}$$

где

$$\varphi^*(\xi, \eta, z, t) = -\left[p_0^*(\xi, \eta, 0)\sin\sigma t + \int_0^t \frac{\partial p_0^*(\xi, \eta, \tau)}{\partial\tau}\sin\sigma(t-\tau)\, d\tau\right]\frac{\operatorname{ch}\varkappa(z+h)}{\rho\sigma\operatorname{ch}\varkappa h}$$

$$\varkappa = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \qquad \sigma = \sqrt{g\varkappa\, th\, \varkappa h}$$

а звездочка означает применение двумерного преобразования Фурье.

2. Точечный взрыв над поверхностью жидкости конечной глубины. В этом случае воздействие взрыва на жидкость начинается в тот момент, когда сферическая ударная волна касается поверхности жидкости. В последующие моменты времени это воздействие будет передаваться через зону давлений на свободной поверхности. Эта зона, очевидно, будет кругом, радиус которого есть известная функция времени. Обозначим эту функцию через $r_0(t)$.

Предполагая давление всюду конечным, для потенциала скорости ввиду наличия осевой симметрии, получим

$$\varphi(r, z, t) = -\frac{1}{\rho}\int_0^\infty \xi\frac{\operatorname{ch}\xi(z+h)}{\operatorname{ch}\xi h}J_0(r\xi)\frac{\sin\sigma t}{\sigma}d\xi\int_0^{r_0(0)} a p_0(a, 0) J_0(a\xi)\, da -$$

$$-\frac{1}{\rho}\int_0^\infty \xi\frac{\operatorname{ch}\xi(z+h)}{\operatorname{ch}\xi h}J_0(r\xi)\, d\xi\int_0^t \frac{\sin\sigma(t-\tau)}{\sigma}d\tau\int_0^\infty a\frac{\partial p_0(a, \tau)}{\partial\tau}J_0(a\xi)\, da$$

$$\sigma = \sqrt{g\xi\operatorname{th}\xi h} \tag{2.1}$$

Здесь и в дальнейшем $J_q(u)$ — функция Бесселя соответствующего индекса, r — цилиндрическая координата, $p_0(a, \tau)$ — возмущающее давление.

В формуле (2.1) функция $p_0(a, \tau)$ — отлична от нуля только внутри круга $a \leqslant r_0(\tau)$, вне этого круга $p_0(a, \tau) \equiv 0$, поэтому

$$\int_0^\infty a\frac{\partial p_0(a, \tau)}{\partial\tau}J_0(a\xi)\, da = \frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^{r_0(\tau)} a p_0(a, \tau) J_0(a\xi)\, da \tag{2.2}$$

после чего формула (2.1) легко приводится к виду

$$\varphi(r, z, t) = -\frac{1}{\rho}\int_0^\infty \xi\frac{\operatorname{ch}\xi(z+h)}{\operatorname{ch}\xi h}J_0(r\xi)\, d\xi\int_0^t \cos\sigma(t-\tau)\, d\tau\int_0^{r_0} a p_0(a, \tau) J_0(a\xi)\, da$$

Найдем выражение для формы свободной поверхности жидкости. Для этого, очевидно, необходимо вычислить

$$\lim_{z\to 0}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\lim_{z\to 0}\int\limits_0^\infty \xi\frac{\operatorname{ch}\xi(z+h)}{\operatorname{ch}\xi h}J_0(r\xi)\,d\xi\int\limits_0^{r_0(t)} a p_0(a,t)\,J_0(a\xi)\,da +$$

$$+\frac{g}{\rho}\lim_{z\to 0}\int\limits_0^\infty \xi^2\operatorname{th}\xi h\frac{\operatorname{ch}\xi(z+h)}{\operatorname{ch}\xi h}J_0(r\xi)\,d\xi\int\limits_0^t\frac{\sin\sigma(t-\tau)}{\sigma}\,d\tau\int\limits_0^{r_0} a p_0(a,\tau)\,J_0(a\xi)\,da$$

Учитывая, что интеграл, входящий в первый член этой формулы, равен $p_0(r, t)$, для формы свободной поверхности жидкости получим выражение

$$\zeta(r,t) = -\frac{1}{\rho}\lim_{z\to 0}\int\limits_0^\infty \xi^2\operatorname{th}\xi h\frac{\operatorname{ch}\xi(z+h)}{\operatorname{ch}\xi h}J_0(r\xi)\,d\xi\int\limits_0^t\frac{\sin\sigma(t-\tau)}{\sigma}\,d\tau\int\limits_0^r a p_0(a,\tau)\,J_0(\xi)\,da$$

Пусть функция $p_0(a, \tau)$ задана в виде ряда по четным степеням a

$$p_0(a,\tau) = \sum_{n=0}^\infty \lambda_n(\tau)\,a^{2n} \tag{2.3}$$

где $\lambda_n(\tau)$ — известные функции времени. Воспользуемся формулой

$$\int\limits_0^{r_0} a^{2n+1}J_0(a\xi)\,da = n!\,r_0^{2n+2}\sum_{m=0}^n(-1)^m\frac{2^m}{(n-m)!}\frac{J_{m+1}(r_0\xi)}{(r_0\xi)^{m+1}}$$

Для формы свободной поверхности получим ряд

$$\zeta(r,t) = -\frac{1}{\rho}\sum_{n=0}^\infty\sum_{m=0}^n \alpha_{nm}\zeta_{nm}(r,t), \qquad \alpha_{nm} = \frac{(-1)^m 2^m n!}{(n-m)!} \tag{2.4}$$

$$\zeta_{nm}(r,t) = \int\limits_0^t \lambda_n(\tau)\,r_0^{2n-m+1}(\tau)\,d\tau\lim_{z\to 0}\int\limits_0^\infty \xi\operatorname{th}\xi h\frac{\operatorname{ch}\xi(z+h)}{\operatorname{ch}\xi h}J_0(r\xi)\times$$

$$\times\frac{J_{m+1}(r_0\xi)}{\xi^m}\frac{\sin\sigma(t-\tau)}{\sigma}\,d\xi \tag{2.5}$$

В выражении для ζ_{nm} изменен порядок интегрирования.

3. Форма свободной поверхности в случае бесконечно глубокой жидкости. В этом случае из (2.5) при $h\to\infty$ для ζ_{nm} получим

$$\zeta_{nm}(r,t) = \int\limits_0^t \lambda_n(\tau)\,r_0^{2n-m+1}(\tau)\,d\tau\lim_{z\to 0}\int\limits_0^\infty \xi e^{\xi z}J_0(r\xi)\frac{J_{m+1}(r_0\xi)}{\xi^m}\frac{\sin\sqrt{g\xi}\,(t-\tau)}{\sqrt{g\xi}}\,d\xi \tag{3.1}$$

Найдем предельное значение интеграла

$$S_m = \int\limits_0^\infty \xi e^{\xi z}J_0(r\xi)\frac{J_{m+1}(r_0\xi)}{\xi^m}\frac{\sin\sqrt{g\xi}\,(t-\tau)}{\sqrt{g\xi}}\,d\xi \qquad \text{при } z\to 0 \tag{3.2}$$

Воспользуемся теоремой Парсеваля для преобразования Ханкеля первого порядка [5]

$$S_m = \int\limits_0^\infty \xi\chi(\xi)\,\psi(\xi)\,d\xi = \int\limits_0^\infty u\chi^*(u)\,\psi^*(u)\,du$$

Здесь

$$\chi(\xi)=\frac{J_{m+1}(r_0\xi)}{\xi^m},\qquad \psi(\xi)=e^{\xi z}J_0(r\xi)\frac{\sin\sqrt{g\xi}\,(t-\tau)}{\sqrt{g\xi}}$$

$$\chi^*(u)=\int_0^\infty\frac{J_{m+1}(r_0\xi)\,J_1(u\xi)}{\xi^{m-1}}\,d\xi,\qquad \psi^*(u)=\int_0^\infty\xi e^{\xi z}J_0(r\xi)\,J_1(u\xi)\frac{\sin\sqrt{g\xi}\,(t-\tau)}{\sqrt{g\xi}}\,d\xi$$

Заметим, что при $m=0$ условия применимости теоремы Парсеваля не выполнены. Значит, последние преобразования справедливы только для $m>0$. При $m=0$ предельное значение для интеграла (3.2) будет получено другим путем, точнее оно получится из промежуточных выкладок для $m>0$. Заметим, что $\chi^*(u)$ при $m>0$ представляет собой известный интеграл Сонина [6]

$$\chi^*(u)=\frac{1}{r_0^{m+1}}\frac{u\,(r_0^2-u^2)^{m-1}}{2^{m-1}(m-1)!}\qquad (0<u<r_0)\tag{3.3}$$

Для нахождения $\psi^*(u)$ при $z=0$ предварительно заметим, что

$$\psi^*(u)=-\frac{\partial}{\partial u}\int_0^\infty e^{\xi z}J_0(r\xi)\,J_0(u\xi)\frac{\sin\sqrt{g\xi}\,(t-\tau)}{\sqrt{g\xi}}\,d\xi$$

Найдем предельное значение интеграла, стоящего под знаком производной по u. Для этого применим теорему Парсеваля для преобразования Ханкеля нулевого порядка

$$L=\int_0^\infty e^{\xi z}J_0(r\xi)\,J_0(u\xi)\frac{\sin\sqrt{g\xi}\,(t-\tau)}{\sqrt{g\xi}}\,d\xi=\int_0^\infty\xi e^{\xi z}\frac{J_0(r\xi)\,J_0(u\xi)}{\xi^\delta}\frac{\sin\sqrt{g\xi}\,(t-\tau)}{\xi^{1-\delta}\sqrt{g\xi}}\,d\xi$$

где δ — некоторое число $(0<\delta<1)$, которое потом будет устремлено к нулю. Имеем

$$L=\int_0^\infty\xi\chi_1(\xi)\,\psi_1(\xi)\,d\xi=\int_0^\infty w\chi_1^*(w)\,\psi_1^*(w)\,dw\tag{3.4}$$

Здесь

$$\chi_1(\xi)=\frac{J_0(r\xi_0)\,J_0(u\xi)}{\xi^\delta},\quad \chi_1^*(w)=\int_0^\infty J_0(r\xi)\,J_0(u\xi)\,J_0(w\xi)\,\xi^{1-\delta}d\xi$$

$$\psi_1(\varepsilon)=\frac{\sin\sqrt{g\xi}\,(t-\tau)}{\xi^{1-\delta}\sqrt{g\xi}}e^{\xi z},\quad \psi_1^*(w)=\int_0^\infty e^{\xi z}J_0(w\xi)\frac{\sin\sqrt{g\xi}\,(t-\tau)}{\sqrt{g\xi}}\xi^\delta\,d\xi$$

Условия теоремы Парсеваля выполнены только при $\delta>0$. Однако если теперь в правой части формулы (3.4) устремить δ к нулю, то, поскольку слева стоит непрерывная функция L, не зависящая от δ, получится такое равенство

$$L=\lim_{\delta\to0}\int_0^\infty w\chi_1^*(w)\,\psi_1^*(w)\,dw=\int_0^\infty w\chi_{10}^*(w)\,\psi_{10}^*(w)\,dw$$

Здесь

$$\chi_{10}^*(w) = \int_0^\infty J_0(r\xi)\,J_0(u\xi)\,J_0(w\xi)\,\xi\,d\xi, \quad \psi_{10}^*(w) = \int_0^\infty e^{\xi z} J_0(w\xi)\,\frac{\sin\sqrt{g\xi}\,(t-\tau)}{\sqrt{g\xi}}\,d\xi$$

Заметим, что $\chi_{10}^*(w)$ представляет собой обобщение интеграла Вебера — Шафхейтлина [6], поэтому

$$\chi_{10}^*(w) = \frac{2}{\pi\sqrt{[(r+u)^2-w^2]\,[w^2-(r-u)^2]}} \qquad (|r-u| < w < r+u)$$

Чтобы отыскать $\psi_{10}^*(w)$ при $z=0$, замечаем, что

$$J_0(w\xi) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(w\xi\sin\theta)\,d\theta$$

а тогда

$$\psi_{10}^*(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\theta \int_0^\infty e^{\xi z}\cos(w\xi\sin\theta)\,\frac{\sin\sqrt{g\xi}\,(t-\tau)}{\sqrt{g\xi}}\,d\xi \tag{3.5}$$

Дальнейшие выкладки будем делать при $z=0$. Правомерность изменения порядка интегрирования в следующих формулах легко обосновывается [7].

Во втором интеграле формулы (3.5) сделаем замену переменной интегрирования при помощи соотношения

$$w\xi\sin\theta = v^2$$

Кроме того, введем параметр $\beta = \frac{t-\tau}{2}\left(\frac{g}{w\sin\theta}\right)^{1/2}$. Теперь

$$\psi_{10}^*(w)\,|_{z=0} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{2d\theta}{\sqrt{gw\sin\theta}}\int_0^\infty \cos v^2 \sin 2\beta v\,dv$$

Элементарные вычисления дают

$$E(\beta) \equiv \int_0^\infty \cos v^2\sin 2\beta v\,dv = \beta\int_0^1 \sin\beta^2(1-\lambda^2)\,d\lambda$$

Таким образом,

$$\psi_{10}^*(w)\,|_{z=0} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{2E(\beta)\,d\theta}{\sqrt{gw\sin\theta}} = \frac{2(t-\tau)}{\pi w}\int_0^1 d\lambda\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin\frac{\mu}{\sin\theta}\,\frac{d\theta}{\sin\theta}$$

$$\left(\mu = \frac{g(t-\tau)^2}{4w}(1-\lambda^2)\right)$$

Во втором интеграле последней формулы введем новую переменную интегрирования ν

$$\frac{1}{\sin\theta} = \mathrm{ch}\nu, \qquad \frac{d\theta}{\sin\theta} = -d\nu$$

Тогда

$$\psi_{10}^*(w)\,|_{z=0} = \frac{t-\tau}{w}\int_0^1 J_0\left[\frac{g(t-\tau)^2}{4w}(1-\lambda^2)\right]d\lambda$$

Снова делаем замену переменной интегрирования

$$1-\lambda^2=\cos\vartheta,\qquad d\lambda=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta$$

После этого получаем

$$\psi_{10}^*(w)\,|_{z=0}=\frac{t-\tau}{w\sqrt{2}}\int\limits_0^{1/2\pi}J_0\left[\frac{g(t-\tau)^2}{4w}\cos\vartheta\right]\cos\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta=$$

$$=\frac{\pi(t-\tau)}{2\sqrt{2}\,w}J_{\frac{1}{4}}\left[\frac{g(t-\tau)^2}{8w}\right]J_{-\frac{1}{4}}\left[\frac{g(t-\tau)^2}{8w}\right]$$

Наконец, выписываем искомое выражение

$$L\,|_{z=0}=\frac{t-\tau}{\sqrt{2}}\int\limits_{|r-u|}^{r+u}J_{\frac{1}{4}}\left[\frac{g(t-\tau)^2}{8w}\right]J_{-\frac{1}{4}}\left[\frac{g(t-\tau)^2}{8w}\right]\times$$

$$\times\frac{dw}{\sqrt{[(r+u)^2-w^2]\,[w^2-(r-u)^2]}}=\frac{t-\tau}{\sqrt{2}}M(r,u,t,\tau)$$

Теперь уже нетрудно получить искомое предельное значение

$$S_m\,|_{z=0}=-\frac{t-\tau}{\sqrt{2}\,2^{m-1}(m-1)!\,r_0^{m+1}}\int\limits_0^{r_0}\frac{\partial M(r,u,t,\tau)}{\partial u}(r_0^2-u^2)^{m-1}u^2du\qquad(3.$$

Это выражение справедливо только для значений $m=1,\ldots,n$. П $m=0$, очевидно, имеем

$$S_0=-\frac{\partial}{\partial r_0}[L\,|_{u=r_0}]$$

Поэтому

$$S_0\,|_{z=0}=-\frac{t-\tau}{\sqrt{2}}\frac{\partial M(r,r_0,t,\tau)}{\partial r_0}\qquad(3.$$

В результате из формулы (3.1) имеем

$$\zeta_{n0}(r,t)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^t\lambda_n(\tau)\,r_0^{2n+1}(\tau)\,\frac{\partial M(r,r_0,t,\tau)}{\partial r_0}(t-\tau)\,d\tau$$

$$\zeta_{nm}(r,t)=-\frac{1}{\sqrt{2}\,2^{m-1}(m-1)!}\int\limits_0^t\lambda_n(\tau)\,r_0^{2n-2m}(\tau)\,(t-\tau)\,d\tau\times\qquad(3.10$$

$$\times\int\limits_0^{r_0}\frac{\partial M(r,u,t,\tau)}{\partial u}(r_0^2-u^2)^{m-1}u^2du\qquad(m=1,\ldots,n)$$

Для формы свободной поверхности получаем

$$\zeta(r,t)=\frac{1}{\rho\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^t\lambda_n(\tau)\,r_0^{2n+1}(\tau)\,\frac{\partial M(r,r_0,t,\tau)}{\partial r_0}(t-\tau)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\rho\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^m n!2}{(n-m)!\,(m-1)!}\int\limits_0^t\lambda_n(\tau)\,r_0^{2n-2m}(\tau)\,(t-\tau)\,d\tau\times$$

$$\times\int\limits_0^{r_0}\frac{\partial M(r,u,t,\tau)}{\partial u}(r_0^2-u^2)^{m-1}u^2du$$

Можно убедиться, что эта формула может быть приведена к виду

$$\zeta(r, t) = \frac{1}{\rho\sqrt{2}} \int_0^t \frac{\partial M(r, r_0, t, \tau)}{\partial r_0} p_0[r_0(\tau), \tau] r_0(\tau)(t-\tau)\,d\tau -$$

$$- \frac{1}{\rho\sqrt{2}} \int_0^t (t-\tau)\,d\tau \int_0^{r_0} \frac{\partial M(r, u, t, \tau)}{\partial u} \frac{\partial p_0(u, \tau)}{\partial u} u\,du \qquad (3.11)$$

где p_0 — функция, заданная в виде ряда (2.3).

4. Определение функции M. Функция $M(r, r_0, t, \tau)$ может быть представлена так:

$$M(r, r_0, t, \tau) = \frac{M_0(A, k)}{r+r_0} \qquad \left(A = \frac{g(t-\tau)^2}{8(r+r_0)},\ k = \frac{|r-r_0|}{r+r_0}\right) \qquad (4.1)$$

Здесь

$$M_0(A, k) = \int_k^1 J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{A}{x}\right) J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{A}{x}\right) \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(x^2-k^2)}}$$

Тогда

$$\frac{\partial M}{\partial r_0} = -\frac{1}{(r+r_0)^2} \begin{cases} \Phi(A, k) + k(1+k)[\Psi(A, k) - L(A, k)] & \text{при } r > r_0 \\ \Phi(A, k) - k(1-k)[\Psi(A, k) - L(A, k)] & \text{при } r < r_0 \end{cases} \qquad (4.2)$$

Здесь

$$\Phi(A, k) = \int_k^1 \left[J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{A}{x}\right) J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{A}{x}\right) \frac{A}{x}\right]' \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(x^2-k^2)}}$$

$$\Psi(A, k) = \int_k^1 \left[J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{A}{x}\right) J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{A}{x}\right) - J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{A}{k}\right) J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{A}{k}\right)\right] \frac{dx}{(x^2-k^2)\sqrt{(1-x^2)(x^2-k^2)}}$$

$$L(A, k) = J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{A}{k}\right) J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{A}{k}\right) \frac{E(\sqrt{1-k^2}) - k^2 K(\sqrt{1-k^2})}{k^2(1-k^2)}$$

где K и E — полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода.

Если рассматривать смещения свободной поверхности вне области давлений, то в этом случае всегда будет $r > r_0$, т. е. $k \geqslant k_0 \neq 0$. Тогда интегралы $\Phi(A, k)$ и $\Psi(A, k)$ могут быть найдены при помощи численных квадратур как функции параметров A и k, причем значения этих функций не зависят от вида функции p_0. Для вычисления же смещений свободной поверхности внутри области давлений эти формулы приводят к чрезмерным вычислительным трудностям. Однако при рассмотрении задач взрывного характера, очевидно, внутри области давлений преобладающим будет влияние давлений, поэтому имеет смысл рассматривать задачу о взрыве над поверхностью невесомой жидкости. Полагая в формуле (4.1) $g = 0$, получим

$$M = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{K(\sqrt{1-k^2})}{r+r_0} \qquad (4.3)$$

Отсюда (4.4)

$$\frac{\partial M}{\partial r_0} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi(r^2-r_0^2)} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi(r+r_0)^2} \begin{cases} \dfrac{kK(\sqrt{1-k^2}) - E(\sqrt{1-k^2}) + (1-k)}{k(1-k)} & \text{при } r > r_0 \\ \dfrac{kK(\sqrt{1-k^2}) + E(\sqrt{1-k^2}) - (1+k)}{k(1+k)} & \text{при } r < r_0 \end{cases}$$

Эти формулы позволяют определить смещения свободной поверхности для любых значений r.

Найдем, например, $\zeta(0, t)$ невесомой жидкости в том случае, когда $p_0 = F(\tau)$.

Легко убедиться, что

$$\zeta(0, t) = -\frac{1}{\rho}\int_0^t \frac{F(\tau)(t-\tau)\,d\tau}{r_0(\tau)}$$

Если через H обозначить высоту взрыва над поверхностью жидкости, через $R_0(t_H+\tau)$ — закон распространения ударной волны в среде над жидкостью, где t_H — время, протекающее с момента взрыва до момента касания ударной волны свободной поверхности, то

$$r_0(\tau) = \sqrt{R_0^2(t_H+\tau) - H^2}$$

При малых значениях τ

$$r_0(\tau) = \tau^{1/2}\sqrt{2HR_0'(t_H) + O(\tau)}$$

Значит, при любых законах распространения ударной волны в среде над жидкостью смещение свободной поверхности под центром взрыва будет всегда конечным, если $F(\tau)$ удовлетворяет соответствующим условиям.

Отметим, между прочим, что для задач взрывного характера при отыскании смещений свободной поверхности тяжелой жидкости вне области давлений можно воспользоваться малостью отношения A/k даже при малых k. Разлагая произведение функций Бесселя, входящее в интеграл $M_0(A, k)$ формулы (4.1), в ряд и ограничиваясь только двумя первыми членами этого разложения, для функции $M(r, r_0, t, \tau)$ получим

$$M(r, r_0, t, \tau) \approx \frac{2\sqrt{2}}{\pi(r+r_0)}\left[K(\sqrt{1-k^2}) - \frac{8}{15}\left(\frac{A}{k}\right)^2 E(\sqrt{1-k^2})\right] \qquad (4.5)$$

Находя отсюда частную производную функции $M(r, r_0, t, \tau)$ по параметру r_0, будем иметь все необходимое для вычисления смещений.

В заключение автор приносит искреннюю благодарность А. А. Никольскому за руководство настоящей работой.

Поступила
24 XI 1959

Институт механики АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика. ОГИЗ, Гостехиздат, М.— Л., 1947.
2. Finkelstein A. B. The initial value problem for transient water waves, Communs Pure and Appl. Math., 1957, 10, № 4, 511—522.
3. Войт С. С. Волны на поверхности жидкости, возникающие от перемещающейся периодической системы давлений, ПММ, 1957, т. XXI, вып. 1.
4. Черкесов А. В. Развитие поверхностных волн, возникающих от периодических перемещающихся давлений. ДАН, 1959, т. 127, № 4.
5. Снеддон И. Преобразования Фурье. Изд-во иностр. лит., М., 1955.
6. Ватсон Г. М. Теория бесселевых функций. Изд-во иностр. лит., 1949, ч. 1.
7. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М.— Л., 1948.