Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЧЕНИЯХ ГАЗА С ВЫРОЖДЕННЫМ ГОДОГРАФОМ

Л. В. Комаровский
(Томск)

В работах [1,2,3,4] исследованы течения газа с годографом, вырожденным в одномерное многообразие и в многообразие на единицу меньше, чем число независимых переменных. В работах [1,2,5] рассмотрены двойные волны в случае потенциальных течений. В настоящей заметке рассматриваются двойные волны без предположения потенциальности течения. При этом течения [1,2,5] получаются как частный случай.

1. Как известно, уравнения пространственного движения политропного газа в адиабатическом случае имеют вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_4}{\partial x_i} = 0, \qquad \frac{\partial u_4}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_4}{\partial x_k} + \lambda u_4 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3) \quad \begin{pmatrix} u_4 = a^2/\lambda \\ \lambda = \gamma - 1 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Здесь u_1, u_2, u_3 — проекции скорости на оси координат x_1, x_2, x_3 (суммирование производится по индексам, встречающимся дважды); a — скорость звука; γ — отношение удельных теплоемкостей. В дальнейшем, если не будет оговорено, как в предыдущем случае, индексы принимают значения 1,2.

Видоизменяя метод, изложенный в работе [4], рассмотрим случай, когда годограф скорости вырождается в двумерную поверхность, т. е.

$$u_3 = w(u_1, u_2), \qquad u_4 = \theta(u_1, u_2) \tag{1.2}$$

Отсюда следует, что функции $u_1, \ldots, u_4$ обладают общими двумерными поверхностями уровня. Рассмотрим случай, когда поверхности уровня являются двумерными плоскостями, т. е.

$$x_k + a_{nk} y_n + a_{0k} = 0 \qquad (y_1 = x_3,\ y_2 = t) \tag{1.3}$$

где a_{nk} и a_{0k} — функции от u_1, u_2. Так как производная по любому направлению, лежащему в плоскости уровня, от произвольной функции $f(u_1, \ldots, u_4)$ будет равна нулю, то получим

$$\frac{\partial f}{\partial y_n} = a_{nk} \frac{\partial f}{\partial x_k} \tag{1.4}$$

Используя (1.2) и (1.4) и исключая из системы (1.1) функции u_3, u_4 и производные по x_3, t, получим

$$A_i \equiv (u_k + a_{1k} w + a_{2k}) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \theta_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = 0 \qquad \left(w_i = \frac{\partial w}{\partial u_i}\right)$$

$$A_3 \equiv (u_k w_i + a_{1k} w w_i + a_{1k}\theta_i + a_{2k} w_i) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = 0 \qquad \left(\theta_i = \frac{\partial \theta}{\partial u_i}\right) \tag{1.5}$$

$$A_4 \equiv (u_k \theta_i + a_{1k}\theta_i w + a_{2k}\theta_i + \delta_{ik}\lambda\theta + a_{1k}\lambda\theta w_i) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \delta_{ik} = 0,\ i \neq k \\ \delta_{ik} = 1,\ i = k \end{pmatrix}$$

В дальнейшем вместо системы (1.5) будем рассматривать эквивалентную ей систему, которая получается следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&B_i \equiv b_{i\alpha\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \equiv A_i = 0 \\
&B_3 \equiv b_{3\alpha\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \equiv A_i(w\theta_i + \lambda w_i\theta) - A_4 w = 0 \\
&B_4 \equiv b_{4\alpha\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \equiv A_i(ww_i + \theta_i) - A_3 w = 0
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

Так как уравнения (1.6) должны удовлетворяться при любом y_n, то к системе уравнений (1.6) необходимо присоединить уравнения

$$
\frac{\partial}{\partial y_n}\left(b_{i\alpha\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}\right) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, 4;\ \alpha, \beta, n = 1, 2) \tag{1.7}
$$

Беря частную производную и применяя соотношения (1.4), получим

$$
a_{nk}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(b_{i\alpha\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}\right) + b_{i\alpha\beta}\frac{\partial a_{nk}}{\partial x_\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_k} = 0
$$

Учитывая (1.6), имеем

$$
b_{i\alpha\beta}\frac{\partial a_{nk}}{\partial x_\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_k} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, 4;\ \alpha, \beta, k, n = 1, 2) \tag{1.8}
$$

Принимая во внимание, что

$$
\frac{\partial a_{nk}}{\partial x_\beta} = \frac{\partial a_{nk}}{\partial u_\delta}\frac{\partial u_\delta}{\partial x_\beta} \tag{1.9}
$$

получим

$$
\frac{\partial B_i}{\partial y_n} \equiv -J(-1)^{\alpha+\beta} b_{i\alpha\beta}\frac{\partial a_{n,\,3-\beta}}{\partial u_{3-\alpha}} \equiv -JL_{in} = 0 \qquad \left(\begin{matrix} i = 1, \ldots, 4 \\ n = 1,\ 2 \end{matrix}\right)
$$

$$
\left(J = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \tag{1.10}
$$

В дальнейшем будем считать, что $J \neq 0$, так как $J = 0$ приводит к течениям типа простой волны. Эти течения были исследованы Н. Н. Яненко [3].

Покажем, что условия

$$
\frac{\partial^s B_i}{\partial y_n^s} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, 4;\ n = 1, 2;\ s = 2, 3, \ldots) \tag{1.11}
$$

новых уравнений не дают. Действительно, используя (1.4) и (1.6), преобразуем (1.11)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^s B_i}{\partial y_n^s} = (-J)^{\frac{s+1}{2}} J_n^{\frac{s-1}{2}} L_{in} \qquad \text{при } s \text{ — нечетном} \\
&\frac{\partial^s B_i}{\partial y_n^s} = (-J)^{\frac{s}{2}} J_n^{\frac{s}{2}} B_i \qquad \text{при } s \text{ — четном}
\end{aligned}
\qquad \left(J_n = \frac{\partial a_{n1}}{\partial u_1}\frac{\partial a_{n2}}{\partial u_2} - \frac{\partial a_{n1}}{\partial u_2}\frac{\partial a_{n2}}{\partial u_1}\right)
$$

Таким образом, система уравнений (1.10) определяет $w(u_1, u_2)$ и $\theta(u_1, u_2)$, т. е. двумерную поверхность, в которую вырождается годограф скорости.

2. Рассмотрим матрицу, состоящую из коэффициентов уравнений системы (1.6):

$$\left\|\begin{array}{cccc} \zeta_1 & \zeta_2-\theta_2 & \theta_2 & 0 \\ 0 & \theta_1 & \zeta_1-\theta_1 & \zeta_2 \\ \lambda w_1\theta\eta_1+c_{11} & \lambda w_1\theta\eta_2+c_{12} & \lambda w_2\theta\eta_1+c_{21} & \lambda w_2\theta\eta_2+c_{22} \\ \eta_1\theta_1 & \eta_2\theta_1 & \eta_1\theta_2 & \eta_2\theta_2 \end{array}\right\| \tag{2.1}$$

где

$$\eta_k = a_{2k}+u_k+ww_k+\theta_k+\theta_k, \qquad \zeta_k = a_{1k}w+a_{2k}+u_k+\theta_k$$

$$c_{kk} = w\theta_k^{\,2}-\lambda w\theta(1+w_k^{\,2})$$

$$c_{km} = w\theta_k\theta_m+\lambda\theta(w_k\theta_m-w_m\theta_k)-\lambda ww_kw_m\theta \quad (k\neq m) \tag{2.2}$$

В зависимости от значения ранга (2.1) мы будем получать различные течения. Случай $r=4$ приводит к $u_i=\mathrm{const}$. Пусть $r=2$. Тогда очевидным решением будет

$$\eta_k=0, \qquad \zeta_k=0 \tag{2.3}$$

В этом случае мы придем к системе двух уравнений для поверхности годографа, которые были впервые получены О. С. Рыжовым [5].

Действительно, из (2.2) и (2.3) получим

$$a_{1k}=w_k, \qquad a_{2k}=u_k-ww_k-\theta_k \tag{2.4}$$

Система (1.10) в этом случае, когда ранг матрицы (2.1) равен двум, будет содержать только четыре независимых уравнения. При подстановке (2.4) в уравнения (1.10) два из них обратятся в тождества, а два других дадут искомые уравнения.

В самом общем случае требование равенства ранга матрицы (2.1) двум приводит к четырем алгебраическим уравнениям относительно неизвестных η_k и ζ_k. Определяя корни этой системы, например

$$\eta_k = ww_k+\frac{w}{\nu}\left[(-1)^{3-k}\theta_{3-k}+\theta_k\omega\right], \qquad \zeta_k=0$$

$$\left(\nu=(-1)^{3-\alpha}w_\alpha\theta_{3-\alpha},\ \omega^2=-(1+w_\alpha w_\alpha)+\frac{1}{\lambda\theta}(\theta_\alpha\theta_\alpha+\nu^2)\right) \tag{2.5}$$

найдем отсюда a_{nk}. Подставляя a_{nk} в (1.10), получим систему уравнений для функций $w(u_1, u_2)$ и $\theta(u_1, u_2)$.

3. Пусть ранг матрицы (2.1) равен трем. Тогда система уравнений (1.6) будет зависима. Расположим уравнения так, чтобы первые три уравнения были независимыми. Тогда система (1.10), или, что то же самое, система (1.8), будет содержать соответственно два зависимых уравнения с индексом $i=4$.

Рассмотрим совместно три уравнения системы (1.6) с любым уравнением (1.8). Тогда определитель 4-го порядка будет равен нулю, т. е.

$$D_1b_{i1\beta}\frac{\partial a_{n1}}{\partial x_\beta}-D_2b_{i1\beta}\frac{\partial a_{n2}}{\partial x_\beta}+D_3b_{i2\beta}\frac{\partial a_{n1}}{\partial x_\beta}-D_4b_{i2\beta}\frac{\partial a_{n2}}{\partial x_\beta}=0 \qquad \begin{pmatrix} i=1,\ 2,\ 3 \\ \beta,\ n=1,\ 2 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

где D_i — определители 3-го порядка, полученные из матрицы (2.1), без последней строчки, путем вычеркивания i-того столбца. В противном случае $u_i = \mathrm{const}$. Из (3.1) получаем

$$D_1 b_{i11} - D_2 b_{i12} + D_3 b_{i21} - D_4 b_{i22} \equiv 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{3.2}$$

Используя тождества (3.2), перепишем систему (3.1)

$$(D_1 b_{i11} + D_3 b_{i21}) \left(\frac{\partial a_{n1}}{\partial x_1} - \frac{\partial a_{n2}}{\partial x_2} \right) + (D_1 b_{i12} + D_3 b_{i22}) \frac{\partial a_{n1}}{\partial x_2} +$$
$$+ (-D_2 b_{i11} - D_4 b_{i21}) \frac{\partial a_{n2}}{\partial x_1} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3;\ n = 1,\ 2) \tag{3.3}$$

Рассмотрим эту систему при $n = \mathrm{const}$ относительно

$$\left(\frac{\partial a_{n1}}{\partial x_1} - \frac{\partial a_{n2}}{\partial x_2} \right), \quad \frac{\partial a_{n1}}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial a_{n2}}{\partial x_1}$$

Определитель ее Δ найдем путем вычисления

$$\Delta = -(D_1 D_4 - D_2 D_3)^2 \tag{3.4}$$

С другой стороны, из системы (1.6), содержащей три первых уравнения, получим

$$J = \psi^2 (D_1 D_4 - D_2 D_3) \tag{3.5}$$

где ψ — произвольная функция от u_1 и u_2.

Отсюда, если $\Delta = 0$, получим $J = 0$, т. е. течения типа простой волны; если же $\Delta \neq 0$, то

$$\frac{\partial a_{n1}}{\partial x_1} - \frac{\partial a_{n_2}}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial a_{n1}}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial a_{n2}}{\partial x_1} = 0 \tag{3.6}$$

В этом случае двупараметрическое семейство двумерных плоскостей уровня будет пересекаться по общей прямой.

4. Пусть теперь ранг матрицы (2.1) равен единице. Нетрудно установить, что это возможно только при

$$\zeta_k = 0, \qquad \theta_k = 0 \tag{4.1}$$

Рассмотрим этот случай. Из (2.2) получим

$$a_{2k} = -u_k - a_{1k} w, \qquad \eta_k = w (w_k - a_{1k}) \tag{4.2}$$

Система (1.10) в данном случае даст два независимых уравнения

$$(-1)^{\alpha+\beta} (\delta_{\alpha\beta} + a_{1\beta} w_\alpha) \frac{\partial a_{1,3-\beta}}{\partial u_{3-\alpha}} = 0, \qquad a_{1\alpha} w_\alpha + 1 = 0 \tag{4.3}$$

Подставляя значение a_{12} из второго уравнения в первое, определяем a_{11} через w

$$a_{11} = \frac{-w_1 w_{22} + w_2 w_{12} + w_2 D}{w_2^2 w_{11} - 2 w_1 w_2 w_{12} + w_1^2 w_{22}} \qquad \left(w_{km} = \frac{\partial^2 w}{\partial u_k \partial u_m},\ D^2 = w_{12}^2 - w_{11} w_{22} \right) \tag{4.4}$$

При таком выборе a_{nk} нам следует удовлетворить только одно независимое линейное уравнение системы (1.6) с двумя искомыми функциями u_1 и u_2, что нетрудно сделать. Если предположим, например, что u_2 —

произвольная функция от x_1 и x_2, то для u_1 получим линейное неоднородное уравнение

$$w_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - w_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = j(x_1, x_2, u_1) \tag{4.5}$$

которое легко интегрируется.

Используя найденные значения a_{nk} как функции от u_1 и u_2, а также уравнения двумерной плоскости уровня (1.3), найдем течение в физическом пространстве.

5. Рассмотрим частный случай, когда течение газа установившееся, т. е. $a_{2k} = 0$. Из уравнения Бернулли получим

$$\theta_k = -u_k - ww_k \tag{5.1}$$

Так как $a_{2k} = 0$, то отсюда следует, что $\eta_k = 0$, т. е. в этом случае последнее уравнение (1.6) обращается в тождество.

Требование равенства ранга матрицы (2.1) двум приводит к двум независимым уравнениям относительно ζ_k

$$\begin{gathered} c_{12}\zeta_1^2 - c_{11}\zeta_1\zeta_2 + (c_{11}\theta_2 - c_{12}\theta_1 - c_{21}\theta_1)\zeta_1 + c_{11}\theta_1\zeta_2 = 0 \\ c_{22}\zeta_1^2 - c_{21}\zeta_1\zeta_2 - c_{22}\theta_1\zeta_1 + c_{11}\theta_2\zeta_2 = 0 \end{gathered} \tag{5.2}$$

Наиболее простое решение $\zeta_k = 0$ приводит к уравнению для поверхности годографа, полученному А. А. Никольским [2].

Другие решения уравнений (5.2) имеют вид

$$\zeta_k = \theta_k + \frac{u_k\nu + (-1)^{3-k} w\theta_{3-k}}{\nu - w\omega} \tag{5.3}$$

где обозначения те же, что и в (2.5) с учетом (5.1). Выражение для ω^2 можно упростить

$$\omega^2 = (M^2 \sin^2 \tau - 1)(1 + w_\alpha w_\alpha) \tag{5.4}$$

где M — число Маха, τ — угол между скоростью газа и нормалью, проведенной к поверхности годографа в соответствующей точке. Из (5.4) следует, что возможны только сверхзвуковые течения.

Определяя из (5.3) a_{1k} и подставляя в (1.10), получим систему двух квазилинейных уравнений 2-го порядка для поверхности годографа.

Случай, когда ранг основной системы равен трем, новых течений не дает. Действительно, из п. 3 следует, что при $\Delta = 0$ мы получим течения типа простой волны, а при $\Delta \neq 0$ — конические течения.

Поступила 24 XII 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. G i e s e I. H. Compressible Flows with Degenerate Hodographs Quart Appl. Math., 1951, vol. IX, № 3.
2. Н и к о л ь с к и й А. А. О классе адиабатических течений газа, которые в пространстве годографа скорости изображаются поверхностями. Сб. теорет. работ по аэродинамике, 1957.
3. Я н е н к о Н. Н. Бегущие волны системы квазилинейных уравнений. ДАН СССР, 1956, т. 109, № 1.
4. П о г о д и н Ю. А., С у ч к о в В. А., Я н е н к о Н. Н. О бегущих волнах уравнений газовой динамики. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 2.
5. Р ы ж о в О. С. О течениях с вырожденным годографом. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 4.