Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ВИХРЯ ПОД ПОВЕРХНОСТЬЮ ЖИДКОСТИ ПРИ ЧИСЛАХ ФРУДА, БЛИЗКИХ К ЕДИНИЦЕ

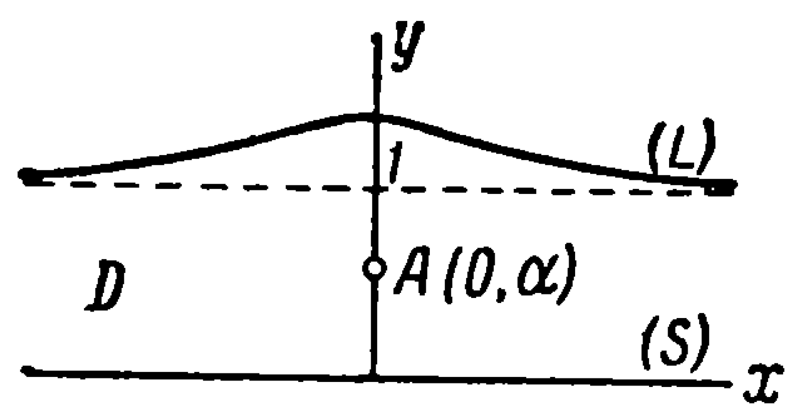
И. Г. Филиппов

(Москва)

Задача о движении вихря под поверхностью тяжелой жидкости при числах Фруда, близких к единице (но больших единицы), имеет, как указал Н. Н. Моисеев, два решения [1]. Одно из решений описывает поток, который переходит в плоско-параллельный, когда интенсивность вихря стремится к нулю. Существование этого решения доказано А. М. Тер-Крикоровым [2]. Ниже излагается доказательство существования второго решения. Оно описывает поток, свободная поверхность которого переходит в уединенную волну, когда интенсивность вихря стремится к нулю.

В первых двух параграфах развивается приближенный метод решения задачи, который позволяет выяснить некоторые особенности течения. Последние в свою очередь используются как наводящие соображения для построения точного решения.

§ 1. Постановка задачи. Рассматривается движение вихря интенсивности γ, который движется с постоянной скоростью c, такой, что безразмерная скорость, или число Фруда $F^2 = c^2/gH$, близка к единице, но больше единицы. Вихрь движется в канале конечной глубины H под поверхностью идеальной тяжелой жидкости. Будем считать, что далеко впереди перед вихрем жидкость покоится и свободная поверхность параллельна дну канала. Обратим движение и будем рассматривать обтекание вихря потоком жидкости.



Фиг. 1

Не ограничивая общности задачи, будем считать, что скорость жидкости и глубина жидкости на бесконечности равны единице.

Систему координат выберем так, как показано на фиг. 1. Вихрь находится в точке $A(0, \alpha)$. Обозначая через $w = w(z)$ комплексный потенциал, задачу сводим к определению функции $w(z)$, аналитической в области D, имеющей в точке $z = i\alpha$ логарифмическую особенность и удовлетворяющую граничным условиям

$$\frac{1}{2}\left|\frac{dw}{dz}\right|^2 + \nu Y(x) = \text{const} \quad \left(\nu = \frac{1}{F^2}\right), \qquad \psi = 1 \quad \text{на } (L), \qquad \psi = 0 \quad \text{на } (S) \tag{1.1}$$

и асимптотическим условиям

$$\lim Y(x) = 1, \qquad \lim\left(\frac{dw}{dz}\right) = 1 \qquad \text{при } |x| \to \infty \tag{1.2}$$

где $Y = Y(x)$ — уравнение заранее неизвестной поверхности

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \qquad (z = x + iy)$$

Введем параметрическую область D' — полосу единичной ширины $0 < \eta < 1$. Отобразим плоскость z на параметрическую плоскость ζ при помощи аналитической функции $\zeta = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$; при этом полосе D будет соответствовать полоса D' единичной ширины, бесконечно-удаленные точки областей D и D' соответствуют одна другой, точке $A(0, \alpha)$ соответствует точка $A'(0, \beta)$ в области D'. Интенсивность вихря при конформном отображении не изменяется.

Так как линии (L) и (S) в области D являются линиями тока, то линии (L') и (S') будут линиями тока в области D' (фиг. 2). Таким образом, в плоскости ζ наша задача сводится к задаче обтекания вихря в канале постоянной ширины. Поэтому комплексный потенциал $w(\zeta)$ может быть записан в явном виде

$$w(\zeta) = \frac{\gamma}{2\pi i} \ln \frac{\operatorname{sh}[{}^1/_2\pi(\zeta - i\beta)]}{\operatorname{sh} {}^1/_2\pi(\zeta + i\beta)} + \zeta \tag{1.3}$$

причем

$$\operatorname{Im} w(\zeta) = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \qquad \operatorname{Im} w(\zeta) = 1 \quad \text{при } \eta = 1 \tag{1.4}$$

Подставляя $dw(\zeta)/d\zeta$ в (1.1), получим

$$\frac{1}{2} f^2(\xi) \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|^2 + \nu y(\xi) = \mathrm{const} \qquad \left(f(\xi) = \left[1 - \frac{\gamma}{2} \frac{\sin \pi\beta}{\operatorname{ch} \pi\xi + \cos \pi\beta}\right)\right. \tag{1.5}$$

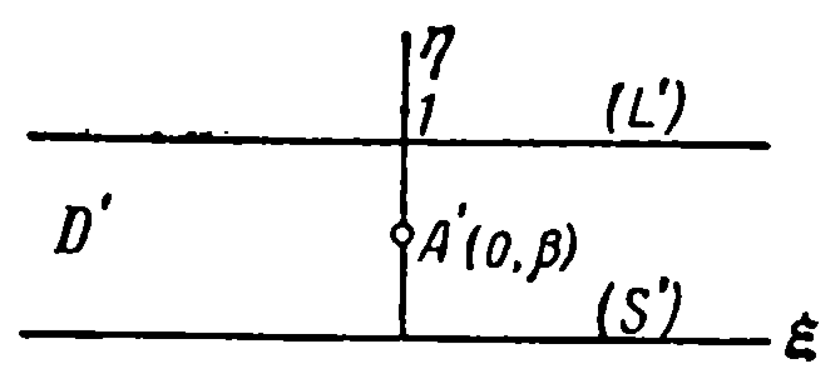
Очевидно, что в рассматриваемой задаче $\mathrm{const} = {}^1/_2 + \nu$.

Чтобы скорость на свободной границе не обращалась в нуль, необходимо выполнить условие

$$\gamma < 2 \operatorname{ctg} {}^1/_2 \pi\beta \tag{1.6}$$

Условия (1.2) примут вид

$$\lim y(\xi) = 1, \quad \operatorname{im} \frac{d\zeta}{dz} = 1, \quad \text{при } |\xi| \to \infty \tag{1.7}$$



Фиг. 2

Так как оси $y = 0$ соответствует ось $\eta = 0$, то

$$y(\xi, 0) = 0 \tag{1.8}$$

Однако поставленная задача имеет не единственное решение. А. М. Тер-Крикоров [2] построил точное решение этой задачи, которое при $\gamma \to 0$ переходит в плоско-параллельный поток.

Можно ожидать, что существуют также решения, которые при $\gamma \to 0$ переходят в нетривиальные решения однородной задачи. На возможность такой неоднозначности указал Н. Н. Моисеев [1]. Единственным решением этой задачи при $\gamma = 0$ и заданной асимптотике на бесконечности является уединенная волна.

Поэтому поставим задачу об отыскании решения, которое при $\gamma \to 0$ переходит в решение однородной задачи, характеризующее уединенную волну. Но так как уединенная волна существует при числах Фруда, близких к единице, то величину $1 - \nu$ следует считать малой; соответственно этому величину γ нужно считать малой порядка, во всяком случае, не меньшего, чем $1 - \nu$.

§ 2. **Приближенное решение задачи.** Предположим, что уравнение свободной поверхности таково, что функция $y = y(\xi)$ меняется плавно и кривизна ее мала. Тогда, следуя схеме решения, предложенной в работе [3], заменим $d\zeta/dz$ в (1.5) его приближенным выражением

$$\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|^2 = \frac{1}{y^2(\xi)} + \frac{2}{3} \frac{y''(\xi)}{y(\xi)} - \frac{1}{3} \frac{y'^2(\xi)}{y^2(\xi)} \tag{2.1}$$

Для $u = y(\xi) - 1$ получим уравнение

$$
\begin{gathered}
u''(\xi) - u(\xi)\{-3\gamma f_1(\xi) - \frac{9}{2}\gamma^2 f_1^2(\xi) - \cdots + \varepsilon[3 + 6\gamma f_1(\xi) + \cdots]\} + \\
+ u^2(\xi)\left\{\frac{9}{2} + 6\gamma f_1(\xi) + 9\gamma^2 f_1^2(\xi) + \cdots - \varepsilon[3 + 6\gamma f_1(\xi) + \cdots]\right\} - \\
- [3\gamma f_1(\xi) + \tfrac{9}{2}\gamma^2 f_1^2(\xi) + \cdots] - \tfrac{1}{2}u'^2(\xi) - \tfrac{1}{2}u(\xi)u'^2(\xi) - \cdots = 0
\end{gathered}
\tag{2.2}
$$

где

$$
\varepsilon = 1 - \nu, \qquad f_1(\xi) = \frac{1}{2}\frac{\sin \pi\beta}{\operatorname{ch}\pi\xi + \cos\pi\beta}
$$

Решение уравнения (2.2) будем предполагать в виде $u(\xi) = u_0(\xi) + u_1(\xi)$, где $u_0 = u_0(\xi)$ зависит только от ε, т. е. является решением уравнения (2.2) при $\gamma = 0$. Функции $u_0(\xi)$ и $u_1(\xi)$ будем искать в виде

$$
u_0(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_{0n}, \qquad u_1(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n u_{1n} \tag{2.3}
$$

при условии, что

$$
u_{0n}(\xi) = 0 \quad \text{при } |\xi| \to \infty, \qquad u_{1n}(\xi) = 0 \quad \text{при } |\xi| \to \infty
$$

Подставив (2.3) в (2.2) и приравнивая нулю коэффициенты при ε и γ для u_{01} и $u_{11}(\xi)$, получим уравнения

$$
u_{01}''(\xi_1) - 3u_{01}(\xi_1) + \frac{9}{2}u_{01}^2(\xi_1) = 0 \tag{2.5}
$$

$$
u_{11}''(\xi) - 3\varepsilon u_{11}(\xi) + 9u_{01}(\xi_1)u_{01}(\xi) = \Phi(\xi, f_1, u_{01}) \tag{2.6}
$$

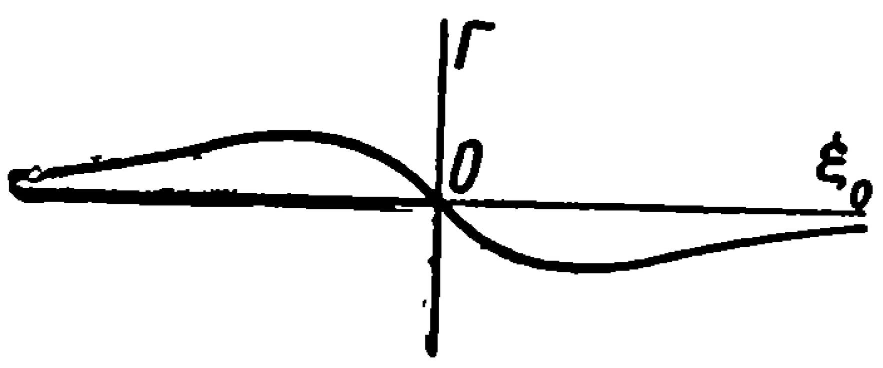
где

$$
\Phi(\xi, f_1, u_{01}) = 3f_1(\xi)[1 + u_{01}(\xi)], \qquad \xi_1 = \sqrt{\varepsilon}\,\xi \tag{2.7}
$$

причем уравнение (2.6) получено с точностью до ε^2.

Решение уравнения (2.5) при условии (2.4) имеет вид

$$
u_{01} = \frac{\varepsilon}{\operatorname{ch}^2 \sqrt{3/4\varepsilon}\,(\xi - \xi_0)} \tag{2.8}
$$



Фиг. 3

Чтобы проинтегрировать (2.6), необходимо знать два частных решения однородного уравнения

$$
v'(\xi) - 3\varepsilon v + 9u_{01}v = 0 \tag{2.9}
$$

Эти частные решения будут

$$
v_1 = u_{01}', \qquad v_2 = v_1 \int \frac{d\xi}{v_1^2}
$$

Определитель Вронского Δ функций v_1 и v_2 равен

$$
\Delta = v_1 v'_2 - v'_1 v_2 = 1
$$

Поэтому общее решение (2.6) можно записать в виде

$$
u_{11} = \frac{1}{\Delta}v_1 \int_{-\infty}^{\xi} \Phi(\xi, f_1, u_{01})v_2 d\xi + c_1 v_1 + \frac{1}{\Delta}v_2 \int_{-\infty}^{\xi} \Phi(\xi, f_1, u_{01})v_1 d\xi + c_2 v_2 \tag{2.10}
$$

Так как $v_2 \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$, то для ограниченности функции $u_{11}(\xi)$ на бесконечности необходимо, чтобы $c_2 = 0$ и

$$
\Gamma(\xi_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi, f_1, u_{01})v_1 d\xi = 0 \tag{2.12}
$$

Так как функция $f_1(\xi)$ — четная, а функции $f_1(\xi)$, $u_{01}(\xi)$, $u_{01}'(\xi)$ монотонны по ξ, то функция $\Gamma = \Gamma(\xi_0)$ имеет вид, изображенный на фиг. 3.

Из фиг. 3 видно, что $\Gamma(\xi_0) = 0$ лишь при $\xi_0 = 0$. Исходя из этого, будем предполагать, что вершина волны находится над вихрем.

Так как $y(\xi) = 1 + \varepsilon u_{01} + \varepsilon^2 u_{02} + \cdots + \gamma(u_{11} + \cdots) + \cdots$, то при $\gamma \to 0$ волна переходит в уединенную волну (решение однородной задачи), которая характеризуется членом

$$y_1(\xi) = 1 + \varepsilon u_{01} \qquad \left(u_{01} = \frac{\varepsilon}{\operatorname{ch}^2 \sqrt{^3/_4\, \varepsilon}\, \xi}\right) \tag{2.13}$$

В дальнейшем, исходя из исследования задачи в точной постановке, доказывается теорема:

когда приведенная скорость $\nu = e^{-3a^2} < 1$, но близка к единице (или a близко к 0), при движении вихря малой интенсивности $\gamma = \Gamma/cH$ ($\gamma < a$) существует решение, описывающее уединенную волну.

§ 3. Преобразование основного граничного условия. Для дальнейшего исследования задачи в точной постановке и упрощения условия (1.5) введем вспомогательную аналитическую функцию

$$\omega_1(\zeta) = \theta(\xi, \eta) + i\lambda(\xi, \eta), \qquad \frac{d\zeta}{dz} = e^{-i\omega_1(\zeta)} \tag{3.1}$$

Подставим (3.1) в (1.5) и продифференцируем полученное выражение по ξ. Кроме того, примем во внимание, что

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \operatorname{Im} e^{i\omega_1(\zeta)} = e^{-\tau}\sin\theta, \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} = -\frac{\partial \theta}{\partial \eta}$$

В результате вместо (1.5) получим следующее условие:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \nu \frac{e^{-3\lambda}\sin\theta}{f^2(\xi)} + \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} \qquad \left(f(\xi) = 1 - \frac{\gamma}{2}\frac{\sin \pi\beta}{\operatorname{ch}\pi\xi + \cos\pi\beta}\right) \tag{3.2}$$

Положим

$$\nu = e^{-3a^2} \quad (\nu \leqslant 1), \qquad \tau = \lambda + a^2, \qquad \omega(\zeta) = \theta(\xi, \eta) + i\tau(\xi, \eta) \tag{3.3}$$

Тогда условие (3.2) заменится следующим:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{e^{-3\tau}\sin\theta}{f^2(\xi)} + \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} \tag{3.4}$$

Из (3.1) имеем

$$z = i\alpha + \int_{i\beta}^{\zeta} e^{i\omega_1(t)}dt \quad \text{или} \quad z = i(\alpha - \beta) + \zeta + \int_{i\beta}^{\zeta} [e^{i\omega_1(t)} - 1]\, dt$$

где α и β — глубины погружения вихря в физической и параметрической областях D и D' соответственно. Из последнего равенства имеем

$$y = (\alpha - \beta) + \eta + \operatorname{Im}\int_{i\beta}^{\zeta} [e^{i\omega_1(t)} - 1]\, dt$$

Так как $y \to 1$, $\eta \to 1$ при $|\xi| \to \infty$, то получим

$$\beta = \alpha + \operatorname{Im}\int_{i\beta}^{-\infty+i} [e^{i\omega_1(t)} - 1]\, dt \tag{3.5}$$

Условие (1.8) для $\omega(\zeta)$, а также условие (1.7) в силу (3.1), соответственно примут вид $\theta(\xi, 0) = 0$

$$\lim \omega_1(\zeta) = 0 \quad \text{при } |\xi| \to \infty \tag{3.6}$$

Следовательно, на основании (3.3)

$$\tau \to a^2 \quad \text{при } |\xi| \to \infty \tag{3.7}$$

Задача в точной постановке, следовательно, будет формулироваться так: для заданных величин a и γ найти функцию $\omega(\zeta)=\theta+i\tau$, аналитическую в полосе $0<\eta<1$, непрерывную вдоль $\eta=0$ и $\eta=1$ и удовлетворяющую условиям (3.4), (3.6) и (3.7), где β — функционал (3.5).

Как уже указывалось в § 1, поставленная задача имеет неединственное решение, которое при $\gamma=0$ переходит в нетривиальное решение однородной задачи, характеризующее уединенную волну.

Будем считать, что $0<\beta<1$ и $\nu\leqslant 1$.

Условие $0<\beta<1$ означает, что вихрь не находится на свободной поверхности, а условие $\nu\leqslant 1$ означает, что вихрь движется со сверхкритической скоростью, но близкой к критической.

§ 4. Функция Грина. Основное граничное условие (3.4) можно записать в виде

$$\frac{\partial\theta}{\partial\eta}-\theta=\frac{e^{-3\tau}\sin\theta}{f^2(\xi)}-\theta+\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=F(\theta,\ \tau,\ a,\ \gamma,\ \beta) \tag{4.1}$$

Чтобы свести задачу к нелинейным интегральным уравнениям, нужна функция Грина $G(\zeta,\ \zeta')$ для полосы $0<\eta<1$, удовлетворяющая граничным условиям

$$\frac{\partial H}{\partial\eta}-H=0;\quad \text{при } \eta=1\quad H=0\qquad \text{при } \eta=0\quad H=\operatorname{Re}G(\zeta,\ \zeta')$$

Такая функция Грина $G(\zeta,\ \zeta')$ впервые была введена Джоном [6] и использовалась Фридрихсом и Хайерсом [3].

Лемма 4.1. Пусть E означает контур, состоящий из действительности оси в плоскости ζ с вырезом вокруг начала координат в отрицательной части плоскости. Тогда функция Грина $G(\zeta,\ \zeta')$ представима в виде

$$G(\zeta,\ \zeta')=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_c\frac{\sin\mu(\zeta-i\xi')}{\mu}\,\frac{\mu\operatorname{ch}\mu(1-\eta')-\operatorname{sh}\mu(1-\eta')}{\mu\operatorname{ch}\mu-\operatorname{sh}\mu}\,d\mu \tag{4.3}$$

$$\text{при } 0\leqslant\eta\leqslant\eta'\leqslant 1$$

Функцию Грина можно продолжить на остальную часть области $0\leqslant\eta\leqslant 1$, $0\leqslant\eta'\leqslant 1$ так, чтобы условия (4.2) и (4.3) удовлетворялись.

Лемма 4.2. Функцию Грина $G(\zeta,\ \zeta')$ при $\eta'=1$ можно представить в виде суммы

$$G(\zeta,\ \zeta')=G_0(\zeta,\ \xi+i)+G_1(\zeta,\ \xi+i) \tag{4.4}$$

Здесь

$$G_0(\zeta,\ \xi+i)=\frac{3}{4}is\left[\frac{1}{5}+(\zeta-\xi')^2\right],\qquad G_1(\zeta,\ \xi+i)=\frac{s}{2\pi}\int\limits_c\frac{e^{-is\mu(\zeta-\xi')}}{\mu\operatorname{ch}\mu-\operatorname{sh}\mu}\,d\mu$$

$$s=\operatorname{sign}(\xi-\xi')=\begin{cases}1 & \text{при } \xi-\xi'>0\\ -1 & \text{при } \xi-\xi'<0\end{cases} \tag{4.6}$$

и, кроме того,

$$G_1(\zeta,\xi'+i)\to 0\quad \text{при } |\xi-\xi'|\to\infty \tag{4.7}$$

Лемма 4.3. Пусть $F(\theta,\ \tau,\ a,\ \gamma,\ \beta)=F(\xi)$ непрерывна при $-\infty<\xi<+\infty$ и пусть интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^2F(\xi)\,d\xi<\infty \tag{4.8}$$

существует; тогда функция

$$\omega(\zeta)=\theta+i\tau=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(\zeta,\ \zeta')\,F(\theta,\ \tau,\ a,\ \gamma,\ \beta)\,d\xi \tag{4.9}$$

является аналитической функцией в открытой полосе $0 < \eta < 1$, непрерывной в замкнутой полоске $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ и θ удовлетворяет граничным условиям (3.6) и (4.1) в том смысле, что

$$\lim (\theta_\eta' - \theta) = F(\xi) \quad \text{при } \eta \to 1,\ \eta < 1; \qquad \theta = 0 \quad \text{при } \eta = 0$$

§ 5. Сведение задачи к системе нелинейных интегральных уравнений. Для того чтобы представить задачу в виде системы нелинейных интегральных уравнений, введем операторы

$$GF = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi, \xi') F(\xi')\, d\xi', \qquad G(\eta) F = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\zeta, \xi' + i) F(\xi')\, d\xi' \tag{5.1}$$

Посторoение решения нелинейного интегрального уравнения

$$\theta + i\tau = GF(\theta, \tau, a, \gamma, \beta) \tag{5.2}$$

для функций θ и τ на границе $\eta = 1$, дает решение рассматриваемой задачи. Действительно, согласно лемме 4.3 решение $\theta + i\tau$ уравнения (5.2) является аналитической функцией $\omega(\zeta)$, граничные значения которой удовлетворяют первому условию (3.6) и условию (4.1).

Выясним асимптотический характер функций, определяющихся формулами (5.1), относительно второго условия (3.6).

Согласно лемме 4.2 имеем

$$G(\zeta, \xi' + i) = G_0(\zeta, \xi + i) + G_1(\zeta, \xi' + i) \tag{5.3}$$

причем

$$G_1(\zeta, \xi' + i) \to 0 \quad \text{при } |\xi - \xi'| \to \infty$$

Если $F(\xi)$ такова, что интеграл (4.8) существует, то по лемме 4.2 $G_1(\eta) F \to 0$ при $|\xi| \to \infty$. Но так как $G_0(\zeta, \xi' + i)$ является квадратичным полиномом относительно ξ и ξ', то стремление к нулю $G_0(\eta) F$ при $|\xi| \to \infty$ не очевидно, если не наложить на $F(\xi)$ некоторых дополнительных ограничений. Так как по (4.5)

$$G_0(\zeta, \xi' + i) = \tfrac{3}{4} is (\xi - \xi')^2 + \tfrac{3}{4} \eta s (\xi - \xi') + \tfrac{3}{5} is \left(\tfrac{5}{4}\eta^2 - \tfrac{1}{4}\right) \tag{5.4}$$

то

$$G_0(\eta) F = -\Omega_1 F \eta + i\Omega_0 F + i \left(\tfrac{5}{4}\eta^2 - \tfrac{1}{4}\right) \Omega_2 F \tag{5.5}$$

где

$$\Omega_0 F = \tfrac{3}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sign}(\xi - \xi') (\xi - \xi')^2 F(\xi')\, d\xi' \tag{5.6}$$

$$\Omega_1 F = -\tfrac{3}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi - \xi'| F(\xi')\, d\xi', \qquad \Omega_2 F = \tfrac{3}{5} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sign}(\xi - \xi') F(\xi)\, d\xi'$$

Лемма 5.1. Предположим, что $F(\xi)$ — нечетная функция, непрерывная и убывает на бесконечности так, что интеграл (4.8) существует. Если, кроме того, интеграл (5.8) равен нулю, то $G_0(\eta) F \to 0$ при $|\xi| \to \infty$ и

$$\Omega_0 F = -3 \int_{\xi}^{\infty} d\xi' \int_{\xi'}^{\infty} d\xi'' \int_{\xi''}^{\infty} F(\xi''')\, d\xi'''$$

$$\Omega_1 F = 3 \int_{\xi}^{\infty} d\xi' \int_{\xi'}^{\infty} F(\xi'')\, d\xi'', \qquad \Omega_2 F = -\tfrac{6}{5} \int_{\xi}^{\infty} F(\xi')\, d\xi' \tag{5.7}$$

Доказательство очевидно. Приняв во внимание, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi F(\xi)\, d\xi = 0 \tag{5.8}$$

из (5.6) легко получить (5.7).

Исходя из этого, будем предполагать, что волны симметричны, т. е. τ — четная функция от ξ, θ — нечетная функция от ξ и тогда $F(\xi) = F(\theta, \tau, a, \gamma, \beta)$ — нечетная функция ξ.

Таким образом, если $\theta(\xi)$ и $\tau(\xi)$ удовлетворяют условиям (5.8) и (5.2), то по леммам 4.3 и 5.1 функция $\omega(\zeta)$ также удовлетворяет второму условию (3.6) и, следовательно, представляет решение рассматриваемой задачи. Остальная часть работы посвящена нахождению такого решения θ и τ из (5.2).

Для удобства разделим оператор G_1F на реальную и мнимую части, т. е.

$$G_1F = (T_1 + iT_2) F \tag{5.9}$$

Тогда интегральное уравнение (5.2), учитывая (5.5), (5.7) и (5.9), можно представить в виде

$$\theta = [-\Omega_1 + T_1] F(\theta, \tau, a, \gamma, \beta), \qquad \tau = [\Omega_0 - \Omega_1 + T_2] F(\theta, \tau, a, \gamma, \beta) + a^2 \tag{5.10}$$

где β — функционал (3.5) при условии, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi F(\theta, \tau, a, \gamma, \beta)\, d\xi = 0; \qquad \theta \to 0 \text{ при } |\xi| \to \infty, \qquad \tau \to a^2 \text{ при } |\xi| \to \infty \tag{5.11}$$

Пусть функция $k = k(\xi)$ — нечетная и такая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi k(\xi)\, d\xi = 1$$

Введем вспомогательную функцию

$$\Phi = \Phi(\theta, \tau, a, \gamma, \beta) = F(\theta, \tau, a, \gamma, \beta) - k(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} \xi F(\theta, \tau, a, \gamma, \beta)\, d\xi \tag{5.12}$$

Тогда равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi \Phi(\theta, \tau, a, \gamma, \beta) = 0 \tag{5.13}$$

выполняется тождественно.

Вместо системы (5.10) будем решать видоизмененную систему

$$\theta = [-\Omega_1 + T_1] \Phi(\theta, \tau, a, \gamma, \beta), \qquad \tau = a^2 + [\Omega_0 - \Omega_2 + T_2] \Phi(\theta, \tau, a, \gamma, \beta)$$

при условии (5.11).

§ 6. Свойства операторов. Введем в рассмотрение классы R_1 и R_2 непрерывных, соответственно нечетных $\theta(\xi)$ и четных $\tau(\xi)$ функций, определенных на оси $-\infty < \xi < +\infty$ так, что $|e^{2\xi}\theta(\xi)|$, $|e^{2\xi}\tau(\xi)|$ ограничены при $\xi > 0$ и введем нормы

$$\|\theta\| = \sup e^{2\xi} |\theta(\xi)|, \qquad \|\tau\| = \sup e^{2\xi} |\tau(\xi)| \qquad (-\infty < |\xi| < +\infty)$$

Обозначим через R пространство $u = \{\theta, \tau\}$ пар функций θ и τ, определенных на оси $-\infty < \xi < +\infty$, в котором введена норма

$$\| u \| = [\| \theta \|^2 + \| \tau \|^2]^{1/2}.$$

Докажем ряд лемм.

Лемма 6.1. Если $F(\xi) \in R_1$, то $\Omega_0 F \in R_1$, $\Omega_1 F \in R_1$, $\Omega_2 F \in R_2$ и выполняются неравенства

$$\| \Omega_0 F \| < \frac{3}{8} \| F \|, \qquad \| \Omega_1 F \| < \frac{3}{4} \| F \| \qquad \| \Omega_2 F \| < \frac{3}{5} \| F \| \tag{6.1}$$

Доказательство. Так как

$$\Omega_0 F = -3 \int\limits_{\xi}^{\infty} d\xi' \int\limits_{\xi'}^{\infty} d\xi'' \int\limits_{\xi''}^{\infty} F(\xi''') \, d\xi'''$$

то

$$| \Omega_0 F | < 3 \| F \| \int\limits_{\xi}^{\infty} d\xi' \int\limits_{\xi'}^{\infty} d\xi'' \int\limits_{\xi''}^{\infty} e^{-2\xi'''} d\xi''' = \frac{3}{8} \| F \| e^{-2\xi}$$

Отсюда $\| \Omega_0 F \| < {}^3/_8 \| F \|$. Аналогично доказываются два других неравенства (6.1).

Лемма 6.2. Если $F(\xi) \in R_1$, то $T_1 F \in R_1$ и $T_2 F \in R_2$ и выполняются неравенства

$$\| T_1 F \| < q \| F \|, \qquad \| T_2 F \| < q \| F \| \qquad (q = \mathrm{const}) \tag{6.2}$$

Как увидим ниже, $q \geqslant 0.9065$.

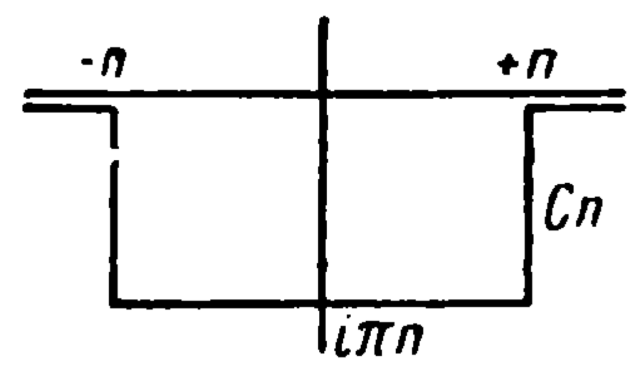
Доказательство. Обозначим

$$J = (T_1 + i T_2) F = \frac{s}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\int\limits_{c} \frac{e^{-s\mu i(\xi - \xi')} e^{s\mu}}{\mu \operatorname{ch} \mu - \operatorname{sh} \mu} d\mu \right] F(\xi') \, d\xi' \tag{6.3}$$

Используя формулу Эйлера и исходя из нечетности $F(\xi)$, можно показать, что $J = J_1 + J_2$, где

$$J_1 = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{c} \frac{\operatorname{ch}(\mu - i\mu\xi)}{\mu \operatorname{ch} \mu - \operatorname{sh} \mu} d\mu \int\limits_{\xi}^{\infty} e^{-i\mu\xi'} F(\xi') \, d\xi'$$

$$J_2 = \frac{i}{\pi} \int\limits_{c} \frac{e^{\mu} e^{-i\mu\xi}}{\mu \operatorname{ch} \mu - \operatorname{sh} \mu} d\mu \int\limits_{0}^{\xi} \sin \mu' \xi' F(\xi') \, d\xi' \tag{6.4}$$



Фиг. 4

Положив $\mu = \sigma - i\lambda$, рассмотрим контур C_n в полуплоскости $\lambda > 0$ и оценим J_1 по деформированному контуру c_n через вычеты подынтегральной функции

$$\mu_m \operatorname{ch} \mu_m - \operatorname{sh} \mu_m = 0$$

Представим J_1 в виде

$$J_1 = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{c} \frac{e^{\mu(1 - i\xi)} + e^{-\mu(1 - i\xi)}}{\mu \operatorname{ch} \mu - \operatorname{sh} \mu} d\mu \int\limits_{\xi}^{\infty} e^{-i\mu\xi'} F(\xi') \, d\xi' \tag{6.5}$$

Оценивая внутренний интеграл в (6.5), получим

$$\left| \int\limits_{\xi}^{\infty} e^{-i\mu\xi'} F(\xi') \, d\xi' \right| < \| F \| \left| \int\limits_{\xi}^{\infty} e^{-2\xi'} e^{-i(\sigma - i\lambda)\xi'} d\xi' \right| = \frac{1}{2 + \lambda} \| F \| e^{-2(1 + {}^1/_2 \lambda)\xi} \tag{6.6}$$

Введем обозначения

$$K_1(\mu, \xi) = \frac{e^{-i\mu\xi}}{2} \int\limits_{\xi}^{\infty} e^{-i\mu\xi'} F(\xi') \, d\xi', \qquad K_2(\mu, \xi) = \frac{e^{i\mu\xi}}{2} \int\limits_{\xi}^{\infty} e^{-i\mu\xi'} F(\xi') \, d\xi'$$

Тогда, переходя к пределу при $n \to \infty$, легко видеть, что

$$J_1 = 2\pi i \sum R_{m_1} + 2\pi i \sum R_{m2}$$

где

$$R_{m1} = -\frac{1}{\pi}\frac{K_1(\mu_m, \xi)(\operatorname{ch}\mu_m + \operatorname{sh}\mu_m)}{\mu_m \operatorname{sh}\mu_m} = -\frac{1}{\pi}\frac{1+\mu_m}{\mu_m^2} K_1(\mu_m, \xi) \tag{6.7}$$

$$R_{m2} = -\frac{1}{\pi}\frac{1-\mu_m}{\mu_m^2} K_2(\mu_m, \tag{6.8}$$

Так как $\pi m < \lambda_m < \pi\left(\frac{1}{2}\right)$, то используя (6.6), имеем

$$|2\pi R_{m1}| < \|F\|\, e^{-2\xi}\frac{1+\lambda_m}{\lambda_m^2}\frac{1}{2+\lambda_m} < \|F\|\, e^{2\xi}\frac{1+\pi m + {}^1/_2\pi}{m^2\pi^2}\frac{1}{2+\pi}$$

Просуммировав последнее равенство, а также аналогичное равенство, которое получается из (6.8), по всем m, получим

$$2\pi\sum_{m=1}^{\infty}|R_{m1}| < 0.1929\,\|F\|\, e^{-2\xi}, \qquad 2\pi\sum_{m=1}^{\infty}|R_{m2}| < 0.1142\,\|F\|\, e^{-2\xi} \tag{6.9}$$

Из (6.9) следует, что

$$\|J_1\| < 0.3071\,\|F\| \tag{6.10}$$

Далее оценим интеграл J_2. Внутренний интеграл J_2 оценивается так:

$$\left|\int_0^{\xi} \operatorname{in}\mu\xi' F(\xi') d\xi'\right| < \frac{1}{2}\|F\|\left\{\frac{e^{(\lambda-2)\xi}-1}{\lambda-2} + \frac{1-e^{-(\lambda+2)\xi}}{\lambda+2}\right\}$$

Положим

$$K(\mu_m, \xi) = e^{-i\mu\xi}\int_0^{\xi}\sin\mu\xi' F(\xi')\, d\xi'$$

Тогда

$$|K(\mu, \xi)| < \frac{1}{2}\, e^{-2\xi}\|F\|\left\{\frac{1-e^{-(\lambda-2)\xi}}{\lambda-2} + \frac{e^{-(\lambda-2)\xi}-e^{-2\lambda\xi}}{\lambda+2}\right\}$$

$$J_2 = 2\pi i\sum R_m, \qquad R_m = \frac{i}{\pi}\frac{K(\mu_m, \xi)\, e^{\mu_m}}{\mu_m \operatorname{sh}\mu_m} = \frac{i}{\pi}K(\mu_m, \xi)\frac{1+\mu_m}{\mu_m^2}$$

Отсюда

$$|J_2| = 2\pi\sum_{m=1}^{\infty}|R_m| < \sum_{m=1}^{\infty}\left\{e^{2\xi}\|F\|\left[\frac{1}{\lambda_m-2}+\frac{1}{\lambda_m+2}\right]\frac{1+\lambda_m}{\lambda_m^2}\right\}$$

Или, учитывая, что $\pi m < \lambda_m < \pi\left(m+\frac{1}{2}\right)$, имеем

$$|J_2| < \|F\|\, e^{-2\xi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\left(\frac{7.3}{2.15}+\frac{1}{m}\right) < 0.599\,\|F\|\, e^{-2\xi}\, \|J_2\| < 0.5994\,\|F\| \tag{6.11}$$

Из неравенств (6.10) и (6.11) следует, что

$$\|G_1F\| < q\|F\|, \quad q \geqslant 0.9065, \quad \text{или} \quad \|T_1F\| < q\|F\|, \quad \|T_2F\| < q\|F\| \tag{6.12}$$

что и доказывает лемму.

На основании (5.14) систему интегральных уравнений можно записать в виде

$$H(\omega, a, \gamma, \beta) = \{H_1(\omega, a, \gamma, \beta), \quad H_2(\omega, a, \gamma, \beta)\} = 0 \tag{6.13}$$

где

$$H_1(\omega, a, \gamma, \beta) = \theta - [\Omega_1 + T_1]\,\Phi(\theta, \tau, a, \gamma, \beta)$$

$$H_2(\omega, a, \gamma, \beta) = \tau - a^2 - [\Omega_0 - \Omega_2 + T_2]\,\Phi(\theta, \tau, a, \gamma, \beta)$$

Лемма 6.3. Оператор H, определенный равенством (6.13), переводит пространство R в себя и для ограниченных a и γ и любого $\omega \in R$ дифференциал Фреше существует. Оператор H и его дифференциал δH непрерывны по ω, a, γ, β и равномерно непрерывны по ω, a, γ, β, $\delta\omega$, когда последние изменяются в ограниченных областях и интервалах соответственно.

Доказательство. Пусть $u = \{\theta, \tau\}$ изменяется произвольно и ограничено фиксированной сферой $M \in R$, причем $\gamma < 2 \cdot \mathrm{ctg}\, {}^1/_2 \pi\beta$, а a лежит в ограниченном интервале l.

Так как функция $F(\xi)$ имеет вид

$$F(\xi) = \frac{e^{-3\tau}\sin\theta}{f^2(\xi)} - \theta + \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} \qquad \left(f(\xi) = 1 - \frac{\gamma}{2}\,\frac{\sin\pi\beta}{\mathrm{ch}\,\pi\xi + \cos\pi\beta}\right.$$

то очевидно, что $F(\xi) \in R_1$ является целой функцией от θ, τ, a, γ, β, непрерывной по ω, a, γ, β при ограничениях, наложенных на a и γ, и $F(\xi) | < c$.

Далее, из (5.12) видно, что $\Phi(\theta, \tau, a, \gamma, \beta)$ также ограничена и равномерно-непрерывна по ω, a, γ, β и $\Phi \in R_1$, т. е. $\|\Phi\| < c$ для $\omega \in M$, когда a, γ, β ограничены.

Из (6.13) и (6.14) и лемм 6.1 и 6.2 вытекает, что $H \in R$.

Чтобы доказать непрерывность $H(\omega, a, \gamma, \beta)$, заметим, что

$$H_1(\omega', a', \gamma', \beta') - H_1(\omega, a, \gamma, \beta) =$$
$$= (\theta' - \theta) + [\Omega_1 - T_1]\{\Phi(\theta', \tau', a', \gamma', \beta') - \Phi(\theta, \tau, a, \gamma, \beta)\} \qquad (6.15)$$

Затем, применяя леммы 4.1 и 4.2, видим, что нормы первого и второго членов (6.15) можно сделать малыми, если $\|\theta' - \theta\|$, $\|\tau' - \tau\|$, $a - a' |$, $|\gamma - \gamma'|$, $|\beta - \beta'|$ малы, а поэтому H_1 равномерно-непрерывна по всем переменным. Это утверждение справедливо и для H_2. Положим

$$\delta\Phi = F_\theta \delta\theta + F_\tau \delta\tau - k(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} \xi \{F_\theta \delta\theta + F_\tau \delta\tau\} d\xi$$

тогда

$$\delta H_1 = \delta\theta - [-\Omega_1 + T_1]\,\delta\Phi(\omega, a, \gamma, \beta;\ \delta\omega)$$
$$\delta H_2 = \delta\tau - [\Omega_0 - \Omega_2 + T_2]\,\delta\Phi(\omega, a, \gamma, \beta;\ \delta\omega)$$

Как и для H_1, можно доказать, что δH_1 и δH_2 равномерно-непрерывны по ω, a, γ, β; $\delta\omega$. Таким образом, теорема доказана.

§ 7. Теорема существования. Чтобы доказать теорему существования решения $\omega = \theta + i\tau$ уравнения $H(\omega, a, \gamma, \beta) = 0$, которое удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi F(\theta, \tau, a, \gamma, \beta)\, d\xi = 0 \qquad (7.1)$$

при $\gamma \neq 0$, положим $\theta = \theta_0 + \delta\theta$, $\tau = \tau_0 + \delta\tau$, где

$$\theta_0 = -\tau_0', \qquad \tau_0 = a^2(1 - 3t_0), \qquad t_0 = \mathrm{sch}^2 \frac{3}{2} a\xi \qquad (7.2)$$

приближенные решения θ и τ в случае уединенной волны.

Тогда уравнение (6.13) примет вид

$$H(\omega_0 + \delta\omega, a, \gamma, \beta) = 0, \quad \text{или} \quad \delta H(\omega_0, a, \gamma, \beta;\ \delta\omega) = \delta\zeta \qquad (7.3)$$

где δH — дифференциал Фреше оператора H, $\delta\zeta \in R$.

Рассмотрим сначала случай $\gamma=0$. В этом случае имеем задачу Фридрихса и Хайерса. Положив $\hat{\xi}=a\xi$ и проделав необходимые операции в (7.3) при $\gamma=0$, получим

$$\begin{gathered}\delta\theta_1-g\int_{\xi}^{\infty}d\xi'\int_{\xi'}^{\infty}\{\tau_{01}\delta\theta_1+\theta_{01}\delta\tau_1-k(\xi')\Pi(\tau_{01}\delta\theta_1+\theta_{01}\delta\tau)\}\,d\xi''=\delta\rho_1\\ \delta\tau_1-g\int_{\xi}^{\infty}d\xi'\int_{\xi'}^{\infty}d\xi''\int_{\xi''}^{\infty}\{\tau_{01}\delta\theta_1+\theta_{01}\delta\tau_1-k(\xi''')\Pi(\tau_{01}\delta\theta_1+\theta_{01}\delta\tau_1)\}\,d\xi'''=\delta\sigma_1\end{gathered}\tag{7.5}$$

где

$$\delta\theta_1=\frac{\delta\theta}{a^3},\qquad \delta t_1=\delta\tau_1=\frac{\delta\tau}{a^2},\qquad \tau_1=t_1+1,\qquad \tau_1=\frac{\tau}{a^2},\qquad \theta_1=\frac{\theta}{a^3}$$

$$\Pi(F)=\int_{-\infty}^{+\infty}\xi F(\xi)\,d\xi$$

Положим $y=\delta\tau_1-\delta\sigma_1$, $-y'=\delta\theta_1-\delta\rho_1$, тогда уравнение (7.5) представим в виде

$$y'''-g(\tau_{01}y)'+9k(\xi)\Pi[(\tau_{01}y)']+F_1(y)=0\tag{7.6}$$

где

$$F_1(y)=9(\tau_{01}\delta\rho_1+\theta_{01}\delta\sigma_1-k(\xi)\Pi(\tau_{01}\delta\rho_1+\theta_{01}\delta\sigma_1)\},\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\xi F_1(y)\,d\xi=0$$

т. е. F_1 — непроизвольная функция из R_1. Проинтегрировав (7.6), получим

$$y''-9\tau_{01}y+ck(\xi)=g(\xi)\qquad c=9\Pi[(\tau_{01}y)'],\ g(\xi)=\int_{\hat{\xi}}^{\infty}F_1(\xi)\,d\xi\tag{7.7}$$

И, кроме того, легко видеть, что функция $g(\xi)$ удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty}g(\xi)\,d\xi=0$$

В работе [3] доказано, что уравнение (7.7) имеет решение, принадлежащее R_2, вида

$$y=M[g]-cM[K]\tag{7.8}$$

где $M[h]$ является линейным ограниченным оператором. Положим

$$M[K]=u_1(\xi),\qquad \mu_1(\xi)=\{-u_1(\xi),\ u_1(\xi)\}$$

Лемма 7.1. Существует линейный ограниченный оператор из R в R такой, что для каждого действительного c и каждого $\delta J_1\in R$

$$\delta\omega_1=N_1(\delta J_1)-c\mu_1(\xi)\qquad(\omega_1=\theta_1+i\tau_1)\tag{7.9}$$

является решением вариационного уравнения (7.5), т. е.

$$\delta H(\omega_0,0,0;\delta\omega_1)=\delta J_1\tag{7.10}$$

Возвращаясь к переменному ξ, (7.9) можно представить в виде

$$\delta\omega=N(\delta\zeta)-c\mu\qquad(\delta\omega=0\ \text{при}\ a=0)\tag{7.11}$$

где

$$\mu=\{-a^3u_1'(a\xi),\quad a^2u_1(a\xi)\},\qquad \delta\omega=a^3\delta\theta+ia^2\delta\tau$$

Возвращаясь к уравнению $H(\omega, a, \gamma, \beta) = 0$, представим его в виде

$$H(\omega_0, 0, 0) - H(\omega, a, \gamma, \beta) = 0 \tag{7.12}$$

Добавим к (7.12) слева и справа по $\delta H(\omega_0, 0, 0, z)$, где $\omega = \omega_0 + z$, тогда будем иметь

$$\delta H(\omega_0, 0, 0, z) = T(z, a, \gamma, \beta) + P(a, \gamma, \beta) \tag{7.13}$$

где

$$T(z, a, \gamma, \beta) = \delta H(\omega_0, 0, 0, z) - H(\omega_0 + z, a, \gamma, \beta) + H(\omega_0, a, \gamma, \beta)$$

$$P(a, \gamma, \beta) = H(\omega_0, 0, 0) - H(\omega_0, a, \gamma, \beta) \tag{7.14}$$

Лемма 7.2. Задавая $\varepsilon_1 > 0$, найдем такие положительные l, $\varkappa$, v, что

$$\| T(z_1, a, \gamma, \beta) - T(z_2, a, \gamma, \beta) \| < \varepsilon_1 \| z_1 - z_2 \| \tag{7.15}$$

$$\text{при } 0 \leqslant a \leqslant l, \quad \gamma < l, \quad \beta < \varkappa < 1, \quad \| z_1 \| < v, \quad \| z_2 \| < v$$

$$\| P(a, \gamma, \beta) \| < \varepsilon_1 \quad \text{при } 0 \leqslant a \leqslant l, \quad \gamma < l, \quad \beta < \varkappa < 1 \tag{7.16}$$

Доказательство. Имеем

$$T(z_2, a, \gamma, \beta) - T(z_1, a, \gamma, \beta) = \delta H(\omega_0, 0, 0;\ z_2 - z_1) - H_0(\omega_0 + z_1, a, \gamma, \beta) +$$
$$+ H(\omega_0 + z_2, a, \gamma, \beta) = \delta H(\omega_0, 0, 0; z_2 - z) - \delta H(\omega_0 + z_1, a, \gamma, \beta, z_2 - z_1) +$$
$$+ \int_0^1 \{\delta H(\omega_0 + z_1, a, \gamma, \beta; z_2 - z_1) - \delta H(\omega_0 + z_1 + s(z_2 - z_1), a, \gamma, \beta; z_2 - z_1)\}\, ds$$

Условие Липшица (7.15) следует из того, что согласно лемме 6.3 функция $\delta H(\omega_0, a, \gamma, \beta; \delta\omega)$ равномерно-непрерывна по ω, a, γ, β, $\delta\omega$ и непрерывна по ω, a, γ, β. Условие (7.16) также следует из леммы 6.3.

Применяя лемму 7.1 к (7.13), видим, что оно эквивалентно уравнению

$$z = NP(a, \gamma, \beta) + NT(z, a, \gamma, \beta) - c\mu \tag{7.17}$$

При $a = \gamma = 0$, $c = 0$ имеем решение $z = 0$. Так как по лемме 7.1 N — ограниченный линейный оператор, то правая часть (7.17) удовлетворяет условию Липшица по z с малой константой при малых значениях a и γ. Таким образом, когда a, γ, $|c|$ малы, уравнение (7.17) может быть решено методом итераций, и его решение равно

$$\omega(\xi, a, \gamma, \beta, c) = \omega_0 + z(\xi, a, \gamma, \beta, c \tag{7.18}$$

Заметим, что то же самое можно сказать относительно z_c', так как z непрерывна по c и имеет непрерывную производную по c, что легко видеть.

Остается показать, что c можно подобрать так в зависимости от a и γ, чтобы записать в виде неявной функции от трех параметров

$$\Pi(a, \gamma, c) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi F(0, \tau, a, \gamma, \beta)\, d\xi = 0$$

Но так, как при $\gamma = 0$ мы имеем задачу Фридрихса и Хайерса, то $F(\xi)$ можно представить в виде

$$F(\xi) = a^5 F_0(\omega, a, c) + \gamma F_1(\omega, a, \gamma, \beta)$$

Отсюда

$$\Pi(a, \gamma, c) = \Pi_0(a, c) + \gamma \Pi_1(a, \gamma, c) \tag{7.19}$$

где

$$\Pi_0(a, c) = a^5 \int_{-\infty}^{+\infty} \xi F_0(\omega, a, c)\, d\xi, \qquad \Pi_1(a, \gamma, c) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi F_1(\omega, a, \gamma, \beta)\, d\xi \tag{7.20}$$

Так как $\omega_c' = z_c'$ существует и непрерывна, то дифференцировать (7.19) имеем право по c. Отсюда

$$\Pi_c' = \Pi_{0c}' + \gamma'\Pi_{1c}'$$

Можно показать, что

$$\Pi_{0c}' = a^3\left(\tfrac{4}{3} + \varepsilon_2\right) \qquad (\varepsilon_2 \to 0 \text{ при } a \to 0).$$

Кроме того,

$$\Pi_{1c}' = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi \{F_{1\theta}'\theta_c' + F_{1c}'\tau_c' + \beta_c'[F_{1\beta}' + \theta_\beta' F_{1\theta}' + \tau_\beta' F_{1\tau}]\}\, d\xi$$

Из (7.11) видно

$$\tau_c' = a^2\varphi_1(\xi, a, \gamma, \beta), \quad \theta_c' = a^3\varphi_2(\xi, a, \gamma, \beta), \quad \beta_c' = a^2 v$$

где φ_1 и φ_2 — ограниченные функции, а v — конечное число. Тогда

$$\Pi_{1c}' = a^2[A(a, \gamma, \beta) + \varepsilon_3] \qquad (\varepsilon_3 \to 0,\ \gamma \to 0 \text{ при } a \to 0) \tag{7.20}$$

Таким образом

$$\Pi_c' = a^3\left(\tfrac{4}{3} + \varepsilon_2\right) + a^2\gamma[A(a, \gamma, \beta) + \varepsilon_3] \tag{7.21}$$

Из равенства (7.21) видно, что $\Pi_c'(0, 0, 0) = 0$ и $\Pi_c' \geqslant 0$ в окрестности $a = 0$, $\gamma = 0$, $c = 0$ лишь при условии $|\gamma| < a$. Следовательно, бифуркационное уравнение (7.19) однозначно разрешимо по c при данном ограничении, наложенном на γ. Поэтому

$$\omega(\xi, a, \gamma, \beta, c) = \omega_0(\xi, a, c) + z(\xi, a, \gamma, \beta, c) \tag{7.22}$$

дает решение задачи, которое удовлетворяет условию (7.1).

Из вида решения уравнения (6.12) следует, что при малом, фиксированном значении a решение (7.22) при $\gamma \to 0$ переходит в решение, характеризующее уединенную волну.

Таким образом, теорема, сформулированная в конце § 2, доказана, и тем самым решена поставленная задача.

В заключение приношу благодарность Моисееву Н. Н. за ценные указания и советы.

Поступила 16 VII 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н. Н. О неединственности возможных форм установившихся течений тяжелой жидкости при числах Фруда, близких к единице. ПММ, 1957, вып. 6, стр. 860—864.
2. Тер-Крикоров А. М. Точное решение о движении вихря над поверхностью жидкости, Изв. АН СССР, серия матем., 1958, т. 22.
3. Friedrichs K. O., Hyers D. N. The existance of solitary waves, Commun. on Pure and Appl. Math., v. 7, № 3, 517—550, 1954.
4. Иванилов Ю. П., Моисеев Н. Н., Тер-Крикоров А. М. Об асимптотическом характере формул Лаврентьева М. А., ДАН СССР, 1958, т. 123, № 2.
5. Лаврентьев М. А. До теорiї довгих хвиль. Збiрник Праць Iнституту математики Академiї наук УРСР, 1946, № 6.
6. John F. On the motion of floating bodies, II: appendix, Commun. on Pure and Appl. Math., v. 3, 92—100, 1950.
7. Еругин Н. П. Неявные функции. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1956.