

## К ГИДРОДИНАМИКЕ КОЛЕБАНИЙ ДИСКА ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Ю. Г. Мамаладзе, С. Г. Матинян

(Тбилиси)

Задача возникла в связи с исследованиями свойств вращающегося гелия II. Ценную информацию о свойствах жидкого гелия дают эксперименты с диском, совершающим крутильноаксиальные колебания [1, 2]. В связи с этим в свое время была решена соответствующая гидродинамическая задача для случая неподвижной жидкости [3]. В последнее время метод колеблющихся дисков стал применяться [4, 5, 6] для изучения вращающегося гелия, который обнаруживает специфичные для квантовой жидкости особенности [7]. Эти особенности обусловлены поведением сверхтекучей компоненты гелия II, в то время как нормальная компонента гелия ведет себя подобно обычной жидкости. При интерпретации экспериментальных данных возникает необходимость отделения квантовых эффектов движения сверхтекучей компоненты и ее взаимодействия с нормальной от эффектов классического движения нормальной компоненты. Этим и обусловлена постановка задачи об аксиально-крутильных колебаниях диска во вращающейся обычной жидкости.

**1. Постановка задачи.** Пусть неограниченная, несжимаемая жидкость плотности  $\rho$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$ . Круглый диск с радиусом  $R$  и толщиной  $h$ , ось которого совпадает с осью вращения жидкости, вращается вместе с нею, и на это вращение наложено колебание вокруг той же оси с частотой  $\Omega$ . Таким образом, движение диска в цилиндрических координатах записывается формулой

$$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0 e^{i\Omega t} \quad (1.1)$$

Решение системы уравнений гидродинамики (уравнение Навье-Стокса и уравнение непрерывности) ищем в виде

$$\mathbf{v}_r = u_r(r, z) e^{i\Omega t}, \quad v_\varphi = u_\varphi(r, z) e^{i\Omega t} + \omega_0 r, \quad v_z = w_z(z) e^{i\Omega t} \quad (1.2)$$

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \rho \omega_0^2 r^2 + p_1(z) e^{i\Omega t} \quad (1.3)$$

Здесь  $p_0$  — постоянная (давление на оси вращения при отсутствии колебания). В выражениях (1.2) и (1.3) члены, содержащие функции  $u$ ,  $w$  и  $p_1$ , описывают возникшие в результате колебаний добавки к известному решению рассматриваемой системы для случая чистого вращения.

Ограничимся случаем малых амплитуд колебаний и проведем линеаризацию системы уравнений гидродинамики относительно колебательных

добавок к скорости и давлению

$$i\Omega u_r - 2\omega_0 u_\varphi = \nu \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \nu \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \quad (1.4)$$

$$i\Omega u_\varphi + 2\omega_0 u_r = \nu \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} + \nu \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\varphi) \quad (1.5)$$

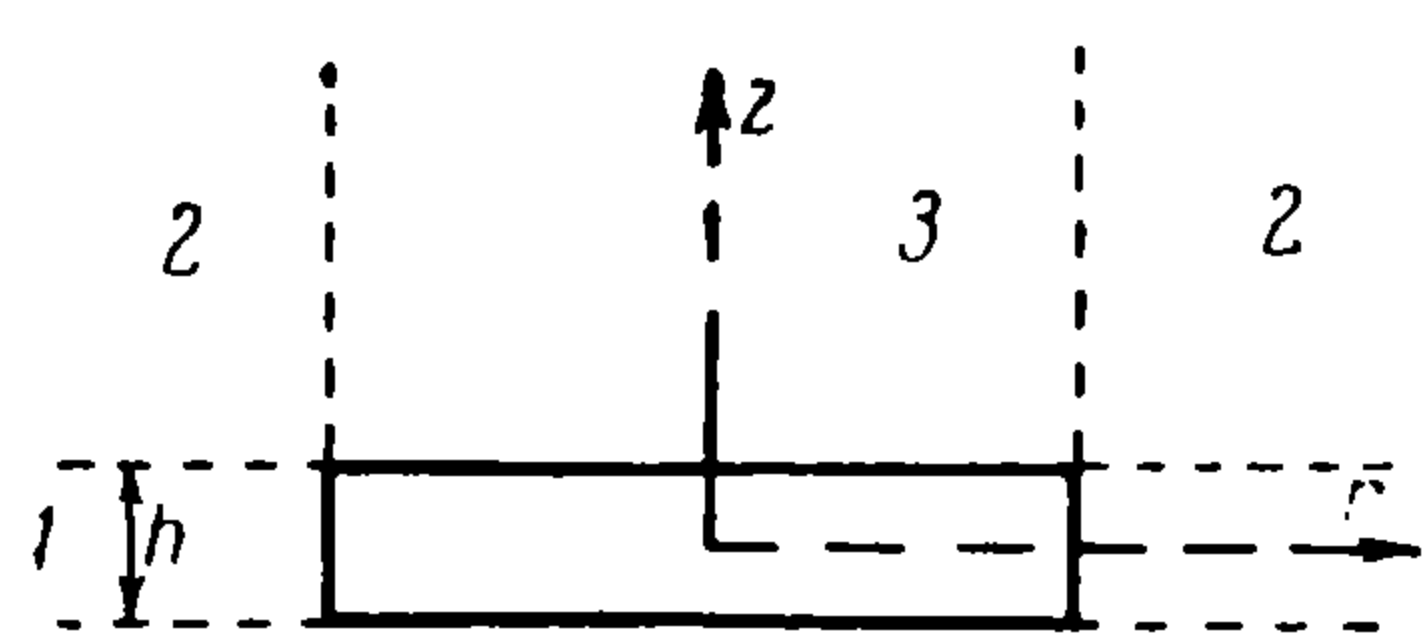
$$i\Omega w_z = -\frac{1}{\rho} \frac{dp_1}{dz} + \nu \frac{d^2 w_z}{dz^2}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{dw_z}{dz} = 0 \quad (1.6)$$

Здесь  $\nu = \eta/\rho$  — кинематическая вязкость жидкости.

Для нахождения функций  $u_\varphi$  и  $u_r$  используются уравнения (1.4) и (1.5), комбинируя которые можно получить

$$\left[ i(\Omega \mp 2\omega_0) - \nu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] (u_\varphi \pm i u_r) = \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) (u_\varphi \pm i u_r) \quad (1.7)$$

**2. Решение системы.** Для решения уравнений (1.7) применим метод, использованный Мариенсом и Ван Памелем для решения аналогичной задачи в неподвижной жидкости [8].



Фиг. 1

Разобьем пространство, занятое жидкостью, на три области, показанные на фиг. 1, и исследуем ее движение отдельно в каждой из областей. Ясно, что при  $h \ll R$  и при достаточно малой глубине проникновения, основной будет область 3. Области 1 и 2

привлекаются к рассмотрению только для приближенного вычисления поправок к случаю бесконечного диска. (Ввиду симметрии задачи области, симметричные 2 и 3, отдельно не рассматриваются.)

*Область 1.* ( $R \leq r < \infty$ ,  $-1/2 h \leq z \leq 1/2 h$ .) (1)

Считая  $h$  малым, в этой области можно пренебречь зависимостью скорости от  $z$ . Тогда уравнения (1.7) примут вид

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + k_\mp^2 - \frac{1}{r^2} \right) (u_\varphi \pm i u_r) = 0, \quad k_\mp^2 = -i \frac{\Omega \mp 2\omega_0}{\nu} \quad (2.1)$$

В соответствии с формулами (1.1) и (1.2) граничные условия на боковой поверхности диска имеют вид

$$u_r^{(1)}(R) = 0, \quad u_\varphi^{(1)}(R) = i\Omega \varphi_0 R \text{ при } -\frac{1}{2} h \leq z \leq \frac{1}{2} h \quad (2.2)$$

На бесконечности имеем

$$u_r^{(1)}(\infty) = u_\varphi^{(1)}(\infty) = 0 \quad (2.3)$$

При этих граничных условиях получаем следующее выражение решений уравнений (2.1) через функции  $H_1^{(2)}(\zeta)$  Ханкеля 1-го рода и 1-го порядка:

$$u_r^{(1)}(r) = -\frac{\Omega \varphi_0 R}{2} \left[ \frac{H_1^{(1)}(k_+ r)}{H_1^{(1)}(k_+ R)} - \frac{H_1^{(1)}(k_- r)}{H_1^{(1)}(k_- R)} \right] \quad (2.4)$$

$$u_\varphi^{(1)}(r) = i \frac{\Omega \varphi_0 R}{2} \left[ \frac{H_1^{(1)}(k_+ r)}{H_1^{(1)}(k_+ R)} + \frac{H_1^{(1)}(k_- r)}{H_1^{(1)}(k_- R)} \right]$$

где

$$\text{Im}(k_\pm) > 0 \quad (2.5)$$

Область 2. В этой области ( $R \leq r < \infty$ ,  $z \geq \frac{1}{2}h$ ) решение ищем в виде

$$u_\varphi + iu_r = A(r)w_+(z), \quad u_\varphi - iu_r = B(r)w_-(z) \quad (2.6)$$

где  $A(r)$  и  $B(r)$  удовлетворяют уравнениям (2.1) и условиям типа (2.3) при  $r = \infty$ .

Иными словами, предполагается одинаковое радиальное распределение скоростей жидкости в областях 1 и 2, это позволяет решения в областях 1 и 2 сшить на поверхности их соприкосновения. Условия сшивания, заменяющие отсутствующие в области 2 граничные условия на поверхности диска, имеют вид

$$u_r^{(2)}\left(r, \frac{1}{2}h\right) = u_r^{(1)}(r), \quad u_\varphi^{(2)}\left(r, \frac{1}{2}h\right) = u_\varphi^{(1)}(r) \quad \text{при } r \geq R \quad (2.7)$$

Принимая во внимание также условие на бесконечности

$$u_r^{(2)}(r, \infty) = u_\varphi^{(2)}(r, \infty) = 0 \quad (2.8)$$

и условие (2.5), находим (2.9)

$$u_r^{(2)}(r, z) = -\frac{\Omega\varphi_0 R}{2} \left\{ \frac{H_1^{(1)}(k_+ r)}{H_1^{(1)}(k_+ R)} \exp\left[ik_+\left(z - \frac{h}{2}\right)\right] - \frac{H_1^{(1)}(k_- r)}{H_1^{(1)}(k_- R)} \exp\left[ik_-\left(z - \frac{h}{2}\right)\right] \right\}$$

$$u_\varphi^{(2)}(r, z) = i\frac{\Omega\varphi_0 R}{2} \left\{ \frac{H_1^{(1)}(k_+ r)}{H_1^{(1)}(k_+ R)} \exp\left[ik_+\left(z - \frac{h}{2}\right)\right] + \frac{H_1^{(1)}(k_- r)}{H_1^{(1)}(k_- R)} \exp\left[ik_-\left(z - \frac{h}{2}\right)\right] \right\}$$

Область 3. ( $r \leq R$ ,  $z \geq \frac{1}{2}h$ ) для приближенного учета влияния краевых эффектов на распределение скоростей в этой области воспользуемся следующим методом. Рассмотрим действие вязких сил на цилиндрический столб жидкости над диском. Для элемента этого столба, находящегося на высоте  $z$  и имеющего толщину  $dz$ , уравнение моментов имеет вид

$$\pi\rho\frac{R^4}{2}dz\frac{d(v_\varphi/r)}{dt} = 2\pi\eta\int_0^R r^3\left[\frac{\partial(v_\varphi/r)}{\partial z}\Big|_{z+dz} - \frac{\partial(v_\varphi/r)}{\partial z}\Big|_z\right]dr +$$

$$+ 2\pi\eta R^2 dz\left(\frac{\partial v_\varphi^{(2)}}{\partial r} - \frac{v_\varphi^{(2)}}{r}\right)_{r=R}$$

Предполагая, что в области 3 функции  $u$  имеют вид

$$u_\varphi(r, z) = rw_\varphi(z), \quad u_r(r, z) = rw_r(z)$$

и преобразуя уравнение моментов, получим (после линеаризации по  $w_r$  и  $w_\varphi$ ):

$$i\Omega w_\varphi + 2\omega_0 w_r = \nu\frac{d^2 w_\varphi}{dz^2} + \frac{4\nu}{R^2}\left(\frac{\partial u_\varphi^{(2)}}{\partial r} - \frac{u_\varphi^{(2)}}{r}\right)_{r=R}$$

Комбинируя это равенство с уравнением (1.4), получим следующие уравнения типа Майера (ср. [8])

$$\left[i(\Omega \mp 2\omega_0) - \nu\frac{d^2}{dz^2}\right](w_\varphi \pm iw_r) = \frac{4\nu}{R^2}\left(\frac{\partial u_\varphi^{(2)}}{\partial r} - \frac{u_\varphi^{(2)}}{r}\right)_{r=R} \quad (2.10)$$

Решение этих неоднородных уравнений при граничных условиях

$$u_r^{(3)}\left(r, \frac{h}{2}\right) = 0, \quad u_\varphi^{(3)}\left(r, \frac{h}{2}\right) = i\Omega\varphi_0 r, \quad u_r^{(3)}(r, \infty) = u_\varphi^{(3)}(r, \infty) = 0 \quad (2.11)$$

имеет вид

$$u_{\varphi}^{(3)}(r, z) = i \frac{\Omega \varphi_0 r}{2} \left\{ \left[ 1 + 2 \frac{C_+ + C_-}{k_+^2 - k_-^2} - \frac{C_+}{ik_+} \left( z - \frac{h}{2} \right) \right] \exp \left[ ik_+ \left( z - \frac{h}{2} \right) \right] + \right. \\ \left. + \left[ 1 - 2 \frac{C_+ + C_-}{k_+^2 + k_-^2} - \frac{C_-}{ik_-} \left( z - \frac{h}{2} \right) \right] \exp \left[ ik_- \left( z - \frac{h}{2} \right) \right] \right\} \quad (2.12)$$

Здесь

$$C_{\pm} = \left[ \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{H_1^{(1)}(k_{\pm} r)}{H_1^{(1)}(k_{\pm} R)} \right]_{r=R} \quad (2.13)$$

Следует отметить, что выражение (2.12) при  $C_{\pm} = 0$  является точным решением системы (1.4) — (1.6) в случае колебаний бесконечного диска в неограниченной вращающейся жидкости. Выражения в квадратных скобках представляют собой приближенно вычисленные поправки на краевые эффекты.

Легко видеть, что, при  $z \approx 1/2 h$ ,  $u_{\varphi}^{(3)}(R, z)$  переходит в  $u_{\varphi}^{(2)}(R, z)$ .

Ввиду того что нашей целью является вычисление момента вязких сил, действующих на поверхность диска, отсутствие непрерывности нашего приближенного решения в областях, удаленных от поверхности, является несущественным. Имея в виду эту же цель, мы не выписываем выражения остальных неизвестных функций  $u_r$ ,  $w_z$  и  $p_1$ , не входящих в выражение для момента.

**3. Вычисление момента вязких сил и сравнение с экспериментальными данными.** Моменты сил, действующих на боковую и торцовые поверхности диска, определяются следующими формулами:

$$M^{(1)} = 2\pi\eta R^2 h \left[ \frac{dv_{\varphi}^{(1)}}{dr} - \frac{v_{\varphi}^{(1)}}{r} \right]_{r=R}, \quad M^{(3)} = 4\pi\eta \int_0^R \left[ \frac{\partial v_{\varphi}^{(3)}}{\partial z} \right]_{z=1/2h} r^2 dr \quad (3.1)$$

Откуда имеем

$$M = M^{(1)} + M^{(3)} = -\frac{\pi\Omega\eta R^4}{2} \left\{ k_+ + k_- + 2 \frac{C_+ + C_-}{k_+ + k_-} + \right. \\ \left. + \frac{C_+}{k_+} + \frac{C_-}{k_-} - 2ih(C_+ + C_-) \right\} \varphi_0 e^{i\Omega t} \equiv m\varphi_0 e^{i\Omega t} \quad (3.2)$$

В соответствии с условием (2.5) вторая формула (2.1) дает

$$k_+ = -\frac{1}{\lambda_+} (1 - i), \quad k_- = \frac{1}{\lambda_-} (\mp 1 + i) \quad (3.3)$$

Верхний знак во второй формуле (3.3) соответствует случаю  $\Omega > 2\omega_0$ , а нижний — случаю  $\Omega < 2\omega_0$ . Глубины прокикновения  $\lambda_+$  и  $\lambda_-$ , соответствующие двум возможным относительным направлениям вращения и колебания, будут равны

$$\lambda_{\pm} = \sqrt{\frac{2\nu}{|\Omega \pm 2\omega_0|}} \quad (3.4)$$

При соблюдении условий

$$\lambda_{\pm} \ll R, \quad h \ll R \quad (3.5)$$

выражение (3.2) можно упростить, используя асимптотические разложения функций Ханкеля больших аргументов. Полученное таким обра-

зом выражение  $m = \frac{M}{\varphi_0} e^{-i\Omega t}$  подставим в известные формулы

$$\Omega_0^2 - \Omega^2 = \frac{\text{Re}(m)}{I}, \quad \delta - \delta_0 \frac{\Omega_0}{\Omega} = -\frac{\pi \text{Im}(m)}{I\Omega^2} \quad (3.6)$$

где  $\Omega_0, \delta_0$  и  $\Omega, \delta$  — частоты и логарифмические декременты затухания колебаний в вакууме и в жидкости соответственно,  $I$  — момент инерции диска. Предполагается, что затухание является слабым

$$\delta \ll 1$$

В случае  $\Omega > 2\omega_0$  имеем

$$2I(\Omega_0^2 - \Omega^2) = \pi\eta R^4 \Omega \left( \frac{1}{\lambda_+} + \frac{1}{\lambda_-} \right) \left( 1 + \frac{2h}{R} \right) \quad (3.8)$$

$$2I\Omega \left( \delta - \delta_0 \frac{\Omega_0}{\Omega} \right) = \pi^2 \eta R^4 \left( \frac{1}{\lambda_+} + \frac{1}{\lambda_-} \right) \left( 1 + \frac{2h}{R} + \frac{4}{R} \frac{\lambda_+ \lambda_-}{\lambda_+ + \lambda_-} \right) \quad (3.9)$$

Последняя формула при  $\omega_0 = 0$  переходит в известную формулу с поправкой Ландау для покоящейся жидкости [2, 3, 8],

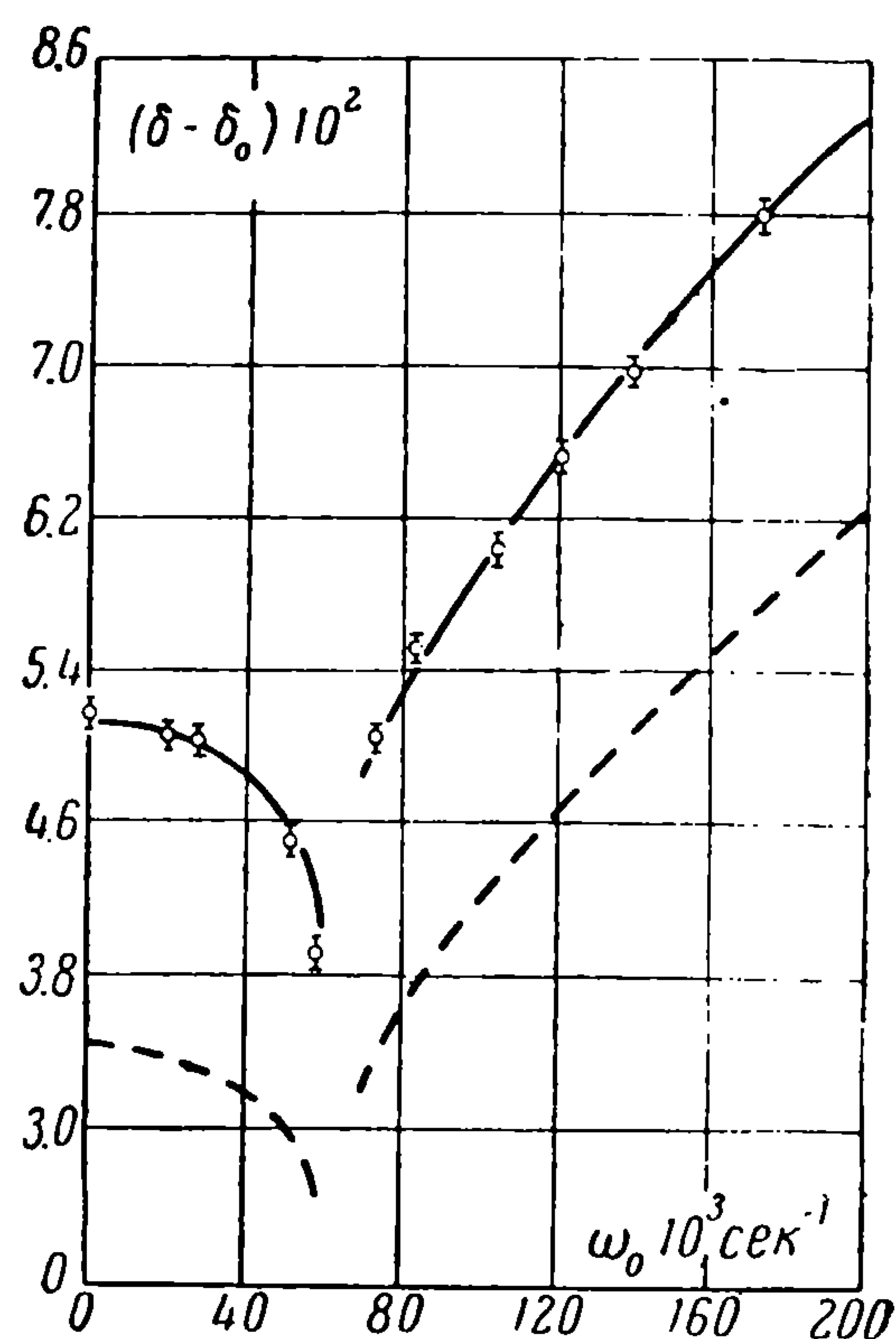
В случае  $\Omega < 2\omega_0$  формула (3.9) остается в силе, а взамен (3.8) получаем

$$2I(\Omega_0^2 - \Omega^2) = \pi\eta R^4 \Omega \left( \frac{1}{\lambda_+} - \frac{1}{\lambda_-} \right) \left( 1 + \frac{2h}{R} \right) \quad (3.10)$$

Формула (3.9) экспериментально проверена Д. С. Цакадзе и К. Б. Месоедом, которые исследовали колебания «тяжелого» ( $\Omega \approx \Omega_0$ ) диска в дистиллированной воде.

На фиг. 2 видно полное соответствие между формулой (3.9) (сплошная кривая) и экспериментальными данными. Там же пунктиром дан результат расчета без учета поправки

$$\left( 1 + \frac{2h}{R} + \frac{4}{R} \frac{\lambda_+ \lambda_-}{\lambda_+ + \lambda_-} \right)$$



Фиг. 2

Авторы благодарят Э. Л. Андроникашвили и коллектив криогенной лаборатории Тбилисского университета за стимулирование работы.

Поступила 21 VII 1959

Институт физики  
АН ГССР

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Андроникашвили Э. Л. Непосредственное наблюдение двух видов движения гелия II. ЖЭТФ, 1946, т. 16, № 9.
2. Андроникашвили Э. Л. Исследование вязкости нормальной компоненты гелия II. ЖЭТФ, 1948, т. 18, № 5.
3. Андроникашвили Э. Л. К вопросу о гидродинамике аксиально-крутильных колебаний в вязкой жидкости. Тр. ин-та физики АН ГССР, 1958, т. 6.
4. Hall H. E. Experimental and Theoretical Investigation of Torsional Oscillations in Uniformly Rotating Liquid He-II. Proc. Roy. Soc. 245 (A), № 1243, 1958.
5. Андроникашвили Э. Л., Цакадзе Д. С. Возникновение упругости на сдвиг во вращающемся гелии II. Сообщ. АН ГССР, 1958, т. 20, № 6.
6. Андроникашвили Э. Л., Цакадзе Д. С., Мамаладзе Ю. Г., Матинян С. Г. Свойства вращающегося гелия II. 5-е Всесоюз. совещ. по физике низких температур. 1958.
7. Feynman R. P. Application of Quantum Mechanics to Theory of Liquid He II. Progress in Low Temperature Physics, 1955, v. I.
8. Mariens P., Van Raemel O. Theory and Experimental verification of the Oscillating Disk Method for Viscosity Measurements in Fluids. Appl. Sci. Res. sec. A. 1955, v. 5.