Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ДВИЖЕНИИ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ СЛУЧАЙНЫХ СИЛ

Я. Н. Ройтенберг

(Москва)

Движение гироскопических приборов в условиях качки корабля обычно рассматривалось в предположении, что качка корабля происходит по синусоидальному закону. В работах А. А. Свешникова [1] показано, что качка корабля может рассматриваться как стационарный случайный процесс и даны корреляционная функция и спектральная плотность этого процесса. В работах С. С. Ривкина [2] изучено в этих условиях движение некоторых корабельных приборов.

В настоящей работе изучается движение силового гироскопического стабилизатора, плоского гироскопического маятника и гироскопического компаса в условиях нерегулярной качки корабля; определена дисперсия угла стабилизации силового гироскопического стабилизатора и гироскопического маятника и получено выражение для интеркардинальной девиации гироскопического компаса.

1. Силовой гироскопический стабилизатор при нерегулярной качке корабля. Уравнения движения силового гироскопического стабилизатора в условиях качки корабля имеют следующий вид [3]:

$$A\alpha'' - H\beta' - Ki_2 = j(j-1)I\theta'' - \zeta(\alpha' - \theta') \qquad (1.1)$$

$$B\beta'' + H\alpha' = 0, \quad l_1 i_1' + r_1 i_1 - s\beta = 0, \quad l_2 i_2' + r_2 i_2 + c\alpha' - \varkappa i_1 = c\theta'$$

где

$$A = A_1 + j^2 I, \qquad K = jk_1\Phi, \qquad c = jk_2\Phi \qquad (1.2)$$

Здесь α — угол поворота рамы гиростабилизатора вокруг ее оси, β — угол поворота гироскопа вокруг оси его кожуха; θ — угол качки корабля; A_1 — момент инерции рамы гиростабилизатора вместе со стабилизируемым объектом и гироскопом относительно оси рамы; B — экваториальный момент инерции гироскопа; H — кинетический момент гироскопа; i_1 — сила тока в цепи усилителя; l_1/r_1 — постоянная времени этой цепи; i_2 — сила тока в цепи якоря разгрузочного мотора; l_2/r_2 — постоянная времени цепи якоря; I — момент инерции якоря разгрузочного мотора; j — передаточное отношение зубчатой передачи от вала разгрузочного мотора к оси рамы гиростабилизатора (число осей зубчатой передачи предполагается нечетным); ζ — коэффициент вязкого трения в опорах рамы гиростабилизатора; Φ — магнитный поток, создаваемый обмоткой возбуждения разгрузочного мотора ($\Phi = \text{const}$, мотор с независимым возбуждением).

Ограничимся рассмотрением движения гироскопических стабилизаторов, у которых постоянные времени цепей управления l_1/r_1 и l_2/r_2 настолько малы, что их влиянием можно пренебречь.

В этом случае в уравнениях движения (1.1) можно положить $l_1 = l_2 = 0$ и тогда эти уравнения примут вид

$$\alpha'' + \frac{n}{A}\alpha' - \frac{H}{A}\beta' - \frac{m}{A}\beta = \frac{a}{A}\theta'' + \frac{n}{A}\theta', \quad \beta'' + \frac{H}{B}\alpha' = 0 \tag{1.3}$$

где

$$m = \frac{s\varkappa K}{r_1 r_2}, \qquad n = \zeta + \frac{Kc}{r_2}, \qquad a = j(j-1)I \tag{1.4}$$

Обозначая через D оператор дифференцирования по времени ($D = d/dt$) и вводя матрицы

$$f(D) = \left\| \begin{matrix} D^2 + \frac{n}{A}D & -\left(\frac{H}{A}D + \frac{m}{A}\right) \\ \frac{H}{B}D & D^2 \end{matrix} \right\|, \qquad e(D) = \left\| \begin{matrix} \frac{a}{A}D^2 + \frac{n}{A}D \\ 0 \end{matrix} \right\|$$

$$y = \left\| \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\| \tag{1.5}$$

заменим систему уравнений (1.3) матричным уравнением

$$f(D)\,y = e(D)\,\theta(t) \tag{1.6}$$

Из уравнения (1.6) следует, что

$$y = Y(D)\,\theta(t) \qquad \left(Y(D) = \frac{F(D)\,e(D)}{\Delta(D)}\right) \tag{1.7}$$

Здесь $F(D)$ — присоединенная матрица для матрицы $f(D)$

$$F(D) = \left\| \begin{matrix} D^2 & \frac{H}{A}D + \frac{m}{A} \\ -\frac{H}{B}D & D^2 + \frac{n}{A}D \end{matrix} \right\| \tag{1.8}$$

а $\Delta(D)$ — определитель матрицы $f(D)$

$$\Delta(D) = D\left(D^3 + \frac{n}{A}D^2 + q^2 D + \frac{m}{H}q^2\right) \qquad \left(q^2 = \frac{H^2}{AB}\right) \tag{1.9}$$

Здесь q — частота нутационных колебаний гироскопического стабилизатора.

Матрица $Y(D)$ представляет собой матричную передаточную функцию гироскопического стабилизатора. В соответствии с (1.7), (1.8) и (1.5) матрицу $Y(D)$ можно представить в следующем виде:

$$Y(D) = \frac{1}{\Delta(D)} \left\| \begin{matrix} \frac{a}{A}D^4 + \frac{n}{A}D^3 \\ -\left(\frac{Ha}{AB}D^3 + \frac{Hn}{AB}D^2\right) \end{matrix} \right\| \tag{1.10}$$

Угол α поворота рамы гиростабилизатора и угол β поворота кожуха гироскопа, согласно (1.5), (1.7) и (1.10), будут определяться следующими операционными выражениями

$$\alpha = Y_{11}(D)\,\theta(t) = \frac{1}{\Delta(D)}\left(\frac{a}{A}D^4 + \frac{n}{A}D^3\right)\theta(t)$$

$$\beta = Y_{21}(D)\,\theta(t) = -\frac{1}{\Delta(D)}\left(\frac{Ha}{AB}D^3 + \frac{Hn}{AB}D^2\right)\theta(t) \tag{1.11}$$

Как показано в работе [1], качку корабля на нерегулярном волнении можно считать стационарным случайным процессом, корреляционная функция которого имеет вид

$$R_1(\tau) = L_1 e^{-\mu|\tau|}\left(\cos\varepsilon\tau + \frac{\mu}{\varepsilon}\sin\varepsilon|\tau|\right) \tag{1.12}$$

где L_1 — дисперсия угла качки, а μ и ε — коэффициенты, характерные для данного корабля. Корреляционной функции (1.12) соответствует спектральная плотность

$$S_1(\omega) = L_1 \frac{4\mu\nu^2}{(\omega^2-\nu^2)^2 + 4\mu^2\omega^2}, \qquad \nu^2 = \varepsilon^2 + \mu^2 \tag{1.13}$$

Девиации гироскопического стабилизатора, возникающие вследствие качки корабля, можно оценить дисперсией угла стабилизации, т. е. дисперсией $\overline{\alpha^2}$ угла поворота рамы гиростабилизатора. В соответствии с (1.11) и (1.13)

$$\overline{\alpha^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |Y_{11}(i\omega)|^2 S_1(\omega)\, d\omega \tag{1.14}$$

где согласно (1.11) и (1.9)

$$|Y_{11}(i\omega)|^2 = \frac{\left(\frac{a}{A}\right)^2\omega^6 + \left(\frac{n}{A}\right)^2\omega^4}{\omega^6 + \left[\left(\frac{n}{A}\right)^2 - 2q^2\right]\omega^4 + \left(q^4 - 2\frac{mn}{HA}q^2\right)\omega^2 + \left(\frac{m}{H}\right)^2 q^4} \tag{1.15}$$

Выражение (1.14) можно преобразовать к виду

$$\overline{\alpha^2} = 4\mu\nu^2 L_1 I_5, \qquad I_5 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(i\omega)}{h(i\omega)\,h(-i\omega)}\,d\omega \tag{1.16}$$

Здесь

$$g(i\omega) = b_0(i\omega)^8 + b_1(i\omega)^6 + b_2(i\omega)^4 + b_3(i\omega)^2 + b_4 \tag{1.17}$$

$$h(i\omega) = a_0(i\omega)^5 + a_1(i\omega)^4 + a_2(i\omega)^3 + a_3(i\omega)^2 + a_4(i\omega) + a_5$$

а коэффициенты полиномов (1.17) будут

$$b_0 = 0, \quad b_1 = -\left(\frac{a}{A}\right)^2, \quad b_2 = \left(\frac{n}{A}\right)^2, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = 0$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2\mu + \frac{n}{A}, \quad a_2 = 2\mu\frac{n}{A} + q^2 + \nu^2$$

$$a_3 = \left(2\mu + \frac{m}{H}\right)q^2 + \frac{n}{A}\nu^2, \quad a_4 = \left(2\mu\frac{m}{H} + \nu^2\right)q^2, \quad a_5 = \frac{m}{H}q^2\nu^2 \tag{1.18}$$

Интегралы вида (1.17) вычислены Филлипсом [4]. В рассматриваемом здесь случае

$$I_5 = \frac{M_5}{2N_5} \tag{1.19}$$

где

$$M_5 = a_0 b_1(a_3 a_4 - a_2 a_5) + a_0 b_2(a_0 a_5 - a_1 a_4) \tag{1.20}$$

$$N_5 = -\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & a_5 & a_4 \end{vmatrix} = [a_0^2 a_5^2 - 2a_0 a_1 a_4 a_5 - a_0 a_2 a_3 a_5 + a_0 a_3^2 a_4 + a_1^2 a_4^2 + a_1 a_2^2 a_5 - a_1 a_2 a_3 a_4] \tag{1.21}$$

и выражение (1.16) для дисперсии угла стабилизации принимает вид

$$\overline{\alpha^2} = \frac{2\mu\nu^2 L_1 M_5}{N_5} \tag{1.22}$$

В качестве примера рассмотрим гиростабилизатор, параметры которого имеют следующие значения:

$$A = 50 \text{ кгмсек}^2,\ B = 0{,}04 \text{ кгмсек}^2,\ H = 30 \text{ кгмсек}$$

$$m = 100 \text{ кгм},\ n = 250 \text{ кгмсек},\ a = 5 \text{ кгмсек}^2$$

При этом, как следует из (1.9), частота нутационных колебаний гиростабилизатора $q = 21{,}2$ *сек*$^{-1}$; период нутационных колебаний $T = 2\pi / q = 0{,}296$ сек. Параметры, определяющие корреляционную функцию качки, $\mu = 0.1$ *сек*$^{-1}$, $\nu = 0.8$ *сек*$^{-1}$.

Дисперсия угла качки корабля $L_1 = \overline{\theta^2} = 0{,}03$; среднеквадратическое значение угла качки корабля $\sqrt{L_1} = 0.173$, т. е. около 10°.

При этих данных дисперсия угла стабилизации $\overline{\alpha^2} = 0.603 \cdot 10^{-6}$, а среднеквадратическое значение угла стабилизации и среднеквадратическое значение угла поворота кожуха гироскопа будут

$$\sqrt{\overline{\alpha^2}} = 0.777.10^{-3} \approx 2.7' \qquad \sqrt{\overline{\beta^2}} = 0.332 \approx 19^\circ$$

2. Плоский гироскопический маятник при нерегулярной качке корабля. Уравнения движения плоского гироскопического маятника при качке корабля имеют следующий вид:

$$A\alpha'' + H\beta' + lP\alpha + M\beta = a\theta'' - n(\alpha' - \theta') \tag{2.1}$$

$$B\beta'' + E\beta' - H\alpha' + \varkappa\beta = 0, \qquad a = \frac{lP}{g} r \tag{2.2}$$

Здесь α — угол поворота гироскопического маятника вокруг его оси, β — угол поворота гироскопа вокруг оси его кожуха, θ — угол качки корабля, A и B — соответствующие моменты инерции, H — кинетический момент гироскопа, lP — статический момент маятника, M — крутизна момента радиальной коррекции, $\varkappa$ — жесткость пружины, связывающей кожух гироскопа с наружным кардановым кольцом, E и n — коэффициенты вязкого трения, r — расстояние от центра качаний корабля до оси подвеса гироскопического маятника.

Ограничиваясь изучением прецессионного движения гироскопического маятника, отбросим в уравнениях движения (2.1) инерционные члены $A\alpha''$ и $B\beta''$. При этом уравнения (2.1) приводятся к виду

$$\beta' + \frac{n}{H}\alpha' + \frac{lP}{H}\alpha + \frac{M}{H}\beta = \frac{a}{H}\theta'' + \frac{n}{H}\theta', \quad -\alpha' + \frac{E}{H}\beta' + \frac{\varkappa}{H}\beta = 0 \tag{2.3}$$

Обозначая через D оператор дифференцирования по времени ($D = d/dt$) и вводя матрицы (2.4)

$$f(D) = \begin{Vmatrix} \frac{n}{H} D + \frac{lP}{H} & D + \frac{M}{H} \\ -D & \frac{E}{H} D + \frac{\varkappa}{H} \end{Vmatrix}, \quad y = \begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \end{Vmatrix}, \quad e(D) = \begin{Vmatrix} \frac{a}{H} D^2 + \frac{n}{H} D \\ 0 \end{Vmatrix}$$

заменим систему уравнений (2.3) матричным уравнением

$$f(D)\, y = e(D)\, \theta(t) \tag{2.5}$$

Из уравнения (2.5) следует, что

$$y = Y(D)\,\theta(t) \qquad \left(Y(D) = \frac{F(D)\,e(D)}{\Delta(D)}\right) \tag{2.6}$$

Здесь $F(D)$ — присоединенная матрица для матрицы $f(D)$

$$F(D) = \left\| \begin{matrix} \frac{E}{H} D + \frac{\varkappa}{H} & -\left(D + \frac{M}{H}\right) \\ D & \frac{n}{H} D + \frac{\Gamma l P}{H} \end{matrix} \right\| \tag{2.7}$$

а $\Delta(D)$ — определитель матрицы $f(D)$

$$\Delta(D) = (1+\sigma) D^2 + \zeta D + k^2 \tag{2.8}$$

где

$$\sigma = \frac{nE}{H^2}, \qquad \zeta = \frac{\varkappa n + lPE}{H^2} + \frac{M}{H}, \qquad k^2 = \frac{\varkappa l P}{H^2} \tag{2.9}$$

Матрица $Y(D)$ является матричной передаточной функцией системы. В соответствии с (2.6), (2.7) и (2.8) ее можно представить так:

$$Y(D) = \frac{1}{\Delta(D)} \left\| \begin{matrix} \frac{aE}{H^2} D^3 + \left(\sigma + \frac{a\varkappa}{H^2}\right) D^2 + \frac{\varkappa n}{H^2} D \\ \frac{a}{H} D^3 + \frac{n}{H} D^2 \end{matrix} \right\| \tag{2.10}$$

Угол α поворота гироскопического маятника и угол β поворота кожуха гироскопа согласно (2.6) и (2.10) будут определяться выражениями

$$\alpha = Y_{11}(D)\,\theta(t) = \frac{1}{\Delta(D)} \left[\frac{aE}{H^2} D^3 + \left(\sigma + \frac{a\varkappa}{H^2}\right) D^2 + \frac{\varkappa n}{H^2} D\right] \theta(t)$$

$$\beta = Y_{21}(D)\,\theta(t) = \frac{1}{\Delta(D)} \left(\frac{a}{H} D^3 + \frac{n}{H} D^2\right) \theta(t) \tag{2.11}$$

Дисперсии $\overline{\alpha^2}$ угла поворота гироскопического маятника и $\overline{\beta^2}$ угла поворота кожуха гироскопа будут определяться следующими выражениями:

$$\overline{\alpha^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y_{11}(i\omega)|^2 S_1(\omega)\,d\omega, \qquad \overline{\beta^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y_{21}(i\omega)|^2 S_1(\omega)\,d\omega \tag{2.12}$$

Здесь

$$|Y_{11}(i\omega)|^2 = \frac{1}{K} \left\{ \left(\frac{aE}{H^2}\right)^2 \omega^6 + \left[\sigma^2 + \left(\frac{a\varkappa}{H^2}\right)^2\right] \omega^4 + \left(\frac{\varkappa n}{H^2}\right)^2 \omega^2 \right\}$$

$$|Y_{21}(i\omega)|^2 = \frac{1}{K} \left[\left(\frac{a}{H}\right)^2 \omega^6 + \left(\frac{n}{H}\right)^2 \omega^4\right] \tag{2.13}$$

$$K = (1+\sigma)^2 \omega^4 + [\zeta^2 - 2(1+\sigma) k^2]\,\omega^2 + k^4$$

В выражениях (2.12) через $S_1(\omega)$ обозначена спектральная плотность угла качки θ, которая согласно (1.13) имеет вид

$$S_1(\omega) = L_1 \frac{4\mu\nu^2}{(\omega^2 - \nu^2)^2 + 4\mu^2\omega^2}$$

Выражения (2.13) можно преобразовать к следующему виду

$$\overline{\alpha^2} = 4\mu\nu^2 L_1 I_4, \qquad \overline{\beta^2} = 4\mu\nu^2 L_1 J_4 \tag{2.14}$$

Здесь

$$I_4 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(i\omega)}{h(i\omega)\,h(-i\omega)}\,d\omega, \qquad J_4 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(i\omega)}{h(i\omega)\,h(-i\omega)}\,d\omega \tag{2.15}$$

$$g(i\omega) = b_0 (i\omega)^6 + b_1 (i\omega)^4 + b_2 (i\omega)^2 + b_3$$

$$G(i\omega) = B_0 (i\omega)^6 + B_1 (i\omega)^4 + B_2 (i\omega)^2 + B_3 \tag{2.16}$$

$$h(i\omega) = a_0 (i\omega)^4 + a_1 (i\omega)^3 + a_2 (i\omega)^2 + a_3 (i\omega) + a_4$$

Коэффициенты полиномов (2.16) имеют вид

$$b_0 = -\left(\frac{aE}{H^2}\right)^2, \quad b_1 = \sigma^2 + \left(\frac{a\varkappa}{H^2}\right)^2, \quad b_2 = -\left(\frac{\varkappa n}{H^2}\right)^2, \quad b_3 = 0$$

$$B_0 = -\left(\frac{a}{H}\right)^2, \quad B_1 = \left(\frac{n}{H}\right)^2, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = 0 \qquad (2.17)$$

$$a_0 = 1 + \sigma, \quad a_1 = 2\mu(1+\sigma) + \zeta, \quad a_2 = 2\mu\zeta + k^2 + \nu^2(1+\sigma)$$

$$a_3 = 2\mu k^2 + \zeta\nu^2, \quad a_4 = k^2\nu^2$$

Интегралы (2.15) для случая, когда все нули функции $h(D)$ расположены в левой полуплоскости комплексного переменного D, согласно Филлипсу [4], имеют вид

$$I_4 = \frac{M_1}{N}, \qquad J_4 = \frac{M_2}{N} \qquad (2.18)$$

Здесь

$$M_1 = b_0(a_1a_4 - a_2a_3) + a_0a_3b_1 - a_0a_1b_2, \quad M_2 = B_0(a_1a_4 - a_2a_3) + a_0a_3B_1$$

$$N = 2a_0(a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4) \qquad (2.19)$$

После подстановки a_i, b_i и B_i, согласно (2.17), имеем

$$M_1 = \left(\frac{aE}{H^2}\right)^2 [2\mu k^4 + 4\mu^2\zeta k^2 + 2\mu\zeta^2\nu^2 + \zeta\nu^4(1+\sigma)] + \qquad (2.20)$$

$$+ \left[\sigma^2 + \left(\frac{a\varkappa}{H^2}\right)^2\right](1+\sigma)(2\mu k^2 + \zeta\nu^2) + \left(\frac{\varkappa n}{H^2}\right)^2 (1+\sigma)[2\mu(1+\sigma)+\zeta]$$

$$M_2 = \left(\frac{a}{H}\right)^2 [2\mu k^4 + 4\mu^2\zeta k^2 + 2\mu\zeta^2\nu^2 + \zeta\nu^4(1+\sigma)] + \left(\frac{n}{H}\right)^2 (2\mu k^2 + \zeta\nu^2)(1+\sigma)$$

$$N = 4\mu\zeta(1+\sigma)\{k^4 + 2[(2\mu^2 - \nu^2)(1+\sigma) + \mu\zeta]k^2 +$$

$$+ \nu^4(1+\sigma)^2 + 2\mu\zeta\nu^2(1+\sigma) + \zeta^2\nu^2\}$$

В качестве примера рассмотрим плоский гироскопический маятник, параметры которого имеют следующие значения:

$$\frac{lP}{H} = \frac{\varkappa}{H} = 0.02 \text{ сек}^{-1}, \qquad \frac{M}{H} = 0.01 \text{ сек}^{-1}, \qquad E = n = 0$$

Расстояние от центра качаний корабля до оси подвеса гироскопического маятника $r = 3$ *м*. При этом, согласно (2.9)

$$\frac{a}{H} = 0.006 \text{ сек}, \quad \sigma = 0, \quad \zeta = 0{,}01 \text{ сек}^{-1}, \quad k = 0.02 \text{ сек}^{-1}$$

Период собственных колебаний гиромаятника $T = 2\pi / k = 314$ *сек*.

Параметры, определяющие корреляционную функцию качки корабля

$$\mu = 0.1 \text{ сек}^{-1}, \ \nu = 0.8 \text{ сек}^{-1}$$

Дисперсия угла качки корабля $L_1 = \overline{\theta^2} = 0.03$; среднеквадратическое значение угла качки $\sqrt{L_1} = 0.173$, т. е. около 10°.

При этих данных, согласно (2.16), дисперсии углов α и β будут следующими

$$\overline{\alpha^2} = 4.37 \cdot 10^{-10}, \qquad \overline{\beta^2} = 0.69 \cdot 10^{-6}$$

Среднеквадратическое значение угла α поворота гироскопического маятника

$$\sqrt{\overline{\alpha^2}} = 2.09 \cdot 10^{-5}$$

т. е. около 4.3 угловой секунды. Среднеквадратическое значение угла β поворота кожуха гироскопа

$$\sqrt{\overline{\beta^2}} = 0.83 \cdot 10^{-3}$$

т. е. около 3 угловых минут.

Таким образом, при качке корабля колебания со сравнительно большой амплитудой происходят вокруг оси кожуха гироскопа. Амплитуда колебаний вокруг оси подвеса гироскопического маятника мала, так как среднеквадратическое значение угла α является очень малой величиной

Этот результат подтверждает преимущество двухгироскопной вертикали, состоящей из двух плоских гироскопических маятников, перед однороторным гироскопическим маятником в условиях качки корабля.

3. Интеркардинальная девиация гироскопического компаса. Уравнения движения двухроторного гироскопического компаса при качке корабля можно представить в следующем виде:

$$\begin{gathered} A_1\alpha'' + H\beta' + HU\cos\varphi\,\alpha = H\frac{v_N}{R} + \frac{lP}{g}W_2\gamma \\ A_2\beta'' - H\alpha' + lP\beta + lP(1-\rho)\vartheta = HU\sin\varphi - \frac{lP}{g}W_2 \\ \vartheta' + F\vartheta + F\beta = -F\frac{W_2}{g}, \quad A_3\gamma'' + K\delta' + lP\gamma = \frac{lP}{g}W_1 \\ A_4\delta'' + m\delta' - K\gamma' + \varkappa\delta = KU\cos\varphi \end{gathered} \tag{3.1}$$

где

$$H = 2B\cos\varepsilon, \qquad K = 2B\sin\varepsilon \tag{3.2}$$

Здесь α — угол поворота гирокомпаса в азимуте; β и γ — углы подъема, соответственно, северного и западного диаметров гиросферы над плоскостью горизонта; δ — угол прецессии гироскопов относительно гиросферы; ϑ — угол наклона зеркала жидкости в гидравлическом успокоителе над плоскостью экватора гиросферы; A_1, A_2, A_3, A_4 — соответствующие моменты инерции; B — кинетический (точнее говоря, собственный) момент каждого из гироскопов; 2ε — угол между осями роторов гироскопов; lP — статический момент гиросферы; $\varkappa$ — жесткость пружин, связывающих кожухи гироскопов с гиросферой; U — угловая скорость суточного вращения земного шара; φ — широта места наблюдения; v_N — северная составляющая скорости корабля; W_1 и W_2 — восточная и и северная составляющие переносного ускорения точки опоры гирокомпаса; R — радиус земного шара.

В условиях прямолинейного равномерного хода корабля при наличии качки

$$W_1 \approx -r\theta''\cos\psi, \qquad W_2 \approx r\theta''\sin\psi \tag{3.3}$$

где θ — угол качки корабля, ψ — курс корабля, r — расстояние точки опоры гирокомпаса от прямой, проходящей через центр качаний корабля и направленной параллельно продольной оси корабля.

Ограничиваясь изучением прецессионного движения гирокомпаса, отбросим в уравнениях движения (3.1) инерционные члены $A_1\alpha''$, $A_2\beta''$, $A_3\gamma''$ и $A_4\delta''$. При этом уравнения (3.1) приводятся к следующему виду:

$$\begin{gathered} \beta' + U\cos\varphi(\alpha-\alpha^*) = \frac{k^2}{U\cos\varphi}\,\frac{r\sin\psi}{g}\theta''\gamma \\ \alpha' - \frac{k^2}{U\cos\varphi}(\beta-\beta^*) - \frac{k^2(1-\rho)}{U\cos\varphi}(\vartheta-\vartheta^*) = \frac{k^2}{U\cos\varphi}\,\frac{r\sin\psi}{g}\theta'' \\ \vartheta' + F(\vartheta-\vartheta^*) + F(\beta-\beta^*) = -F\frac{r\sin\psi}{g}\theta'' \\ \gamma'' + \zeta\gamma' + n^2\gamma = -\frac{r\cos\psi}{g}(\zeta\theta''' + n^2\theta'') \end{gathered} \tag{3.4}$$

где

$$k^2 = \frac{lPU\cos\varphi}{H}, \qquad n^2 = \frac{\varkappa lP}{K^2}, \qquad \zeta = \frac{m}{\varkappa}n^2 \tag{3.5}$$

$$\alpha^* = \frac{v_N}{RU\cos\varphi}, \qquad \beta^* = \frac{HU\sin\varphi}{\rho lP}, \quad \vartheta^* = -\frac{HU\sin\varphi}{\rho lP} \tag{3.6}$$

Полагая, в соответствии с (1.12), что θ является стационарным случайным процессом, определим для обобщенных координат гирокомпаса их математические ожидания, которые обозначим так:

$$x_1 = M[\alpha - \alpha^*], \qquad x_2 = M[\beta - \beta^*], \qquad x_3 = M[\vartheta - \vartheta^*] \tag{3.7}$$

Значения этих величин при $t \to \infty$ обозначим через x_i^*.

Для координаты γ, как видно из последнего уравнения (3.4), установившееся значение математического ожидания

$$x_4^* = 0 \tag{3.8}$$

Величины x_1, x_2, x_3 удовлетворяют следующим уравнениям:

$$x_2' + U\cos\varphi\, x_1 = E$$

$$x_1' - \frac{k^2}{U\cos\varphi}x_2 - \frac{k^2(1-\rho)}{U\cos\varphi}x_3 = 0, \qquad x_3' + Fx_2 + Fx_3 = 0 \tag{3.9}$$

где

$$E = \frac{k^2}{U\cos\varphi}\,\frac{r\sin\psi}{g}R_c(0) \tag{3.10}$$

а через $R_c(\tau)$ обозначена взаимная корреляционная функция случайных процессов θ'' и γ.

Величина $R_c(0)$ может быть вычислена следующим образом. Спектральная плотность S_1 угла качки θ и спектральная плотность S_2 случайного процесса θ'' в соответствии с (1.13) имеют вид

$$S_1(\omega) = \frac{4\mu\nu^2 L_1}{(\omega^2-\nu^2)^2 + 4\mu^2\omega^2}, \qquad S_2(\omega) = \frac{4\mu\nu^2 L_1\omega^4}{(\omega^2-\nu^2)^2 + 4\mu^2\omega^2} \tag{3.11}$$

Так как согласно четвертому уравнению (3.4)

$$\gamma = -\frac{r\cos\psi}{g}\,\frac{\zeta D + n^2}{D^2 + \zeta D + n^2}\theta'' \qquad \left(D = \frac{d}{dt}\right) \tag{3.12}$$

то взаимная спектральная плотность $S_c(\omega)$ случайных процессов θ'' и γ может быть представлена в виде

$$S_c(\omega) = -4\mu\nu^2 L_1\frac{r\cos\psi}{g}\,\frac{(i\zeta\omega + n^2)\,\omega^4}{(-\omega^2 + i\zeta\omega + n^2)\left[(\omega^2-\nu^2)^2 + 4\mu^2\omega^2\right]} \tag{3.13}$$

Учитывая, что

$$R_c(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_c(\omega)\,e^{i\omega\tau}\,d\omega \tag{3.14}$$

можно преобразовать выражение (3.10) к виду

$$E = -2\mu\nu^2 L_1\frac{k^2}{U\cos\varphi}\,\frac{r^2\sin 2\psi}{g^2}I \tag{3.15}$$

где

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-(n^2-\zeta^2)\,\omega^6 + n^4\omega^4 - i\zeta\omega^7}{\left[(\omega^2-n^2)^2 + \zeta^2\omega^2\right]\left[(\omega^2-\nu^2)^2 + 4\mu^2\omega^2\right]}d\omega \tag{3.16}$$

В силу нечетности подынтегральной функции,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^7}{[(\omega^2-n^2)^2+\zeta^2\omega^2][(\omega^2-\nu^2)^2+4\mu^2\omega^2]}\,d\omega = 0$$

Поэтому выражение (3.16) принимает вид

$$I = I_4 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(i\omega)}{h(i\omega)\,h(-i\omega)}\,d\omega \tag{3.17}$$

Здесь

$$g(i\omega) = b_0(i\omega)^6 + b_1(i\omega)^4 + b_2(i\omega)^2 + b_3 \tag{3.18}$$

$$h(i\omega) = a_0(i\omega)^4 + a_1(i\omega)^3 + a_2(i\omega)^2 + a_3(i\omega) + a_4$$

$$b_0 = n^2-\zeta^2, \qquad b_1 = n^4, \qquad b_2 = 0, \qquad b_3 = 0 \tag{3.19}$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2\mu+\zeta, \quad a_2 = 2\mu\zeta+n^2+\nu^2, \quad a_3 = 2\mu n^2+\zeta\nu^2, \quad a_4 = \nu^2 n^2.$$

Для интеграла (3.17), согласно Филлипсу [4], будем иметь

$$I_4 = \frac{b_0(-a_1a_4+a_2a_3)-a_0a_3b_1}{2a_0(a_0a_3^2+a_1^2a_4-a_1a_2a_3)} \tag{3.20}$$

Это выражение после подстановки a_i и b_i из (3.19) принимает вид

$$I_4 = \frac{(\nu^2+2\mu\zeta-4\mu^2)\,n^4-(\nu^4+2\mu\zeta\nu^2-4\mu^2\zeta^2)\,n^2+(\nu^2+2\mu\zeta)\,\zeta^2\nu^2}{4\mu\,[n^4+2(2\mu^2+\mu\zeta-\nu^2)\,n^2+\nu^2(\nu^2+2\mu\zeta+\zeta^2)]} \tag{3.21}$$

Система однородных дифференциальных уравнений, которая образуется из (3.9), при $E=0$ имеет характеристическое уравнение

$$D^3+FD^2+k^2D+\rho k^2F = 0 \tag{3.22}$$

При $\rho<1$, что всегда выполняется в гирокомпасах, все корни характеристического уравнения (3.22) будут расположены в левой полуплоскости комплексного переменного D и интегралы упомянутой системы однородных уравнений будут асимптотически стремиться к нулю при $t\to\infty$. Поэтому при качке корабля, которая представляет собой достаточно длительный процесс, величины x_1, x_2, x_3 примут свои установившиеся значения, которые, согласно (3.9), будут следующими:

$$x_1^* = \frac{E}{U\cos\varphi}, \qquad x_2^* = 0, \qquad x_3^* = 0 \tag{3.23}$$

В соответствии с (3.15), выражение для x_1^* принимает вид

$$x_1^* = aI_4\sin 2\psi \qquad \left(a = -2\mu\nu^2 L_1\left(\frac{k}{U\cos\varphi}\right)^2\frac{r^2}{g^2}\right) \tag{3.24}$$

где I_4 определено выше выражением (3.21).

Величина x_1^* и представляет собой интеркардинальную девиацию гирокомпаса. Она исчезает на кардинальных курсах корабля ($\psi = 0°$, $90°$, $180°$, $270°$) и достигает наибольших значений на интеркардинальных курсах ($\psi = 45°$, $135°$, $225°$, $315°$).

В качестве примера определим интеркардинальную девиацию для гирокомпаса, у которого $k = 1{,}24\cdot 10^{-3}$ сек$^{-1}$, что соответствует периоду собственных колебаний в азимуте $T_k = 84{,}4$ мин. Широту φ места наблюдения примем равной 60°, так что $U\cos\varphi = 3.646\cdot 10^{-5}$ сек$^{-1}$. Расстояние от точки опоры гирокомпаса до прямой, про-

T_n, сек	$I_4\ (\zeta=0)$	$I_4\ (\zeta=0.2\,n)$	T_n, сек	$I_4\ (\zeta=0)$	$I_4\ (\zeta=0.2\,n)$
0.2	1.501	4.642	8.7	—3.613	—1.309
0.5	1.505	2.762	8.8	—3.540	—1.371
1.0	1.521	2.149	8.9	—3.445	—1.419
2.0	1.589	1.899	9.0	—3.337	—1.455
3.0	1.715	1.905	9.5	—2.749	—1.500
4.0	1.921	2.015	10	—2.245	—1.420
5.0	2.247	2.178	11	—1.565	—1.170
6.0	2.698	2.455	12	—1.160	—0.944
6.6	2.837	1.953	15	—0.599	—0.537
7.0	2.491	1.498	20	—0.291	—0.272
7.1	2.278	1.344	30	—0.118	—0.112
7.2	1.992	1.174	40	—0.064	—0.061
7.3	1.624	0.990	50	—0.040	—0.039
7.4	1.169	0.795	100	$-0.994\cdot10^{-2}$	$-0.953\cdot10^{-2}$
7.5	0.633	0.591	200	$-0.272\cdot10^{-2}$	$-0.238\cdot10^{-2}$
7.6	0.029	0.382	300	$-0.110\cdot10^{-2}$	$-0.105\cdot10^{-2}$
7.7	—0.615	0.178	400	$-0.617.10^{-3}$	$-0.592\cdot10^{-3}$
7.8	—1.263	—0.033	500	$-0.395\cdot10^{-3}$	$-0.379\cdot10^{-3}$
7.9	—1.875	—0.233	600	$-0.274\cdot10^{-3}$	$-0.263\cdot10^{-3}$
8.0	—2.416	—0.422	700	$-0.201\cdot10^{-3}$	$-0.193\cdot10^{-3}$
8.1	—2.860	—0.599	800	$-0.154\cdot10^{-3}$	$-0.148\cdot10^{-3}$
8.2	—3.202	—0.759	900	$-0.122\cdot10^{-3}$	$-0.117\cdot10^{-3}$
8.3	—3.438	—0.904	1000	$-0.987\cdot10^{-4}$	$-0.948\cdot10^{-4}$
8.4	—3.582	—1.031	1100	$-0.816\cdot10^{-4}$	$-0.783\cdot10^{-4}$
8.5	—3.648	—1.140	1200	$-0.685\cdot10^{-4}$	$-0.658\cdot10^{-4}$
8.6	—3.653	—1.233			

ходящей через центр качаний корабля паралельно продольной оси корабля, $r=2$ *м*. Параметры, определяющие корреляционную функцию качки корабля $\mu=0.1$ сек$^{-1}$, $\nu=0.8$ сек$^{-1}$. Дисперсия угла качки $L_1=0{,}03$, чему соответствует среднеквадратическое значение угла качки

$$\sqrt{L_1}=0.173$$

т. е. около 10°.

При этих данных интеркардинальная девиация гирокомпаса, согласно (3.24), будет определяться выражением

$$x_1{}^*=-0.186\,I_4\sin 2\psi$$

где I_4, согласно (3.21), зависит от частоты n собственных колебаний гирокомпаса по углу γ. Значения функции $I_4(T_n)$, где $T_n=2\pi/n$, приведены в таблице.

Как видно из таблицы, интеркардинальная девиация достаточно мала у гирокомпасов, период T_n колебаний которых по углу γ сравнительно велик, порядка 15—20 минут, как это имеет место у двухроторных гирокомпасов. Так, в рассматриваемом примере, в случае; когда $T_n=20$ *мин*, а $\sin 2\psi=1$, интеркардинальная девиация составляет всего лишь 0.04 угловой минуты.

Интеркардинальная девиация мала также в окрестности нуля функции $I_4(n)$, расположенного вблизи точки $n=\nu$. Так, при $\zeta=0$ функция I_4 обращается в нуль при

$$n=\nu/\sqrt{1-4\mu^2/\nu^2}$$

Соотношение между параметрами, при котором выполняется условие $n\approx\nu$, имеет место у гирокомпасов с ртутными баллистическими сосудами [5].

Поступила 29 II 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Свешников А. А. О теории бортовой качки корабля на нерегулярном волнении, Тр. 1-й Межвузовской конференц. по гироскопии, 1956.
2. Ривкин С. С. Об оценке погрешностей гироскопических приборов при воздействии на них случайных возмущений, Сб. докл. Научно-техн. об.-ва приборостроит. промышленности, Судпромгиз, 1958.
3. Ройтенберг Я. Н. Вынужденные колебания силовых гироскопических стабилизаторов, Приборостроение, № 1, 1946.
4. Джеймс, Никольс и Филлипс. Теория следящих систем, Издательство иностранной литературы, 1951.
5. Rawlings A. L. The theory of the gyroscopic compass and its deviations, London, 1929.