Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ С НЕИДЕАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ

Г. К. Пожарицкий

(Москва)

Механика систем со связями строится на том предположении, что уравнения связи всегда выполняются точно в течение всего движения при любых активных силах и при любых, совместимых со связями начальных условиях. Ясно, однако, что в любых механических системах, которые моделируются системой со связями (например, идеальными и голономными), реакции связей возникают вследствие нарушения последних. В большинстве известных в литературе задач реакции возникают вследствие упругих деформаций тел системы и внешних по отношению к системе.

Так как возникающие при движении нарушения связей весьма малы, то и пренебрежение ими не вносит существенных разногласий между теорией и опытом. Эта модель в совокупности с некоторой гипотезей о свойствах реакций (идеальность) позволила получить весьма общие уравнения движения для систем с идеальными как голономными, так и неголономными связями, а также при принятии некоторого закона трения уравнения движения для голономных систем с трением [1].

Однако в связи с широким внедрением систем автоматического управления нам кажется интересным рассмотреть системы с автоматическими устройствами, действие которых возможно моделировать как связь, не относящуюся ни к одному из перечисленных выше типов.

Впервые связи подобного типа при некоторых частичных ограничениях на их реакции рассмотрел Бегин (H. Beghin) [2].

1. Рассмотрение начнем с примеров.

а) Пусть на конце A гибкой нерастяжимой нити, могущей скользить в малом колечке O, находится тяжелая точка массы m. И пусть автоматическое устройство P, с которым связан другой конец нити, осуществляет связь между углом отклонения α нити от вертикали и расстоянием $OA = r$ в виде зависимости $r = r(\alpha)$.

Теорема о моменте количества движения относительно точки O дает

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\alpha}) = -mgr\sin\alpha \tag{1.1}$$

а реакция N определится из соотношения $-N + mg\cos\alpha = m(\ddot{r} - \dot{\alpha}^2 r)$ и после подстановки $\ddot{\alpha}$ из первого уравнения и учета уравнения связи окажется однозначной функцией α, $\dot{\alpha}$.

в) Гладкий стержень, могущий вращаться вокруг точки O, несет на себе тяжелую точку A, могущую скользить по нему без трения. Автоматическое устройство P, действуя на стержень, осуществляет связь $r = r(\alpha)$. Реакция стержня N направлена перпендикулярно к стержню. Уравнение движения в проекции на стержень дает

$$m(\ddot{r} - r\dot{\alpha}^2) = mg\cos\alpha \tag{1.2}$$

а реакция N определится из соотношения

$$(N - mg\sin\alpha)\,r = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\alpha})$$

и после использования предыдущего уравнения и уравнения связи может быть определена как функция α, $\dot{\alpha}$.

В обоих указанных случаях система будет реально двигаться по траектории $r(\alpha) + \delta r(\alpha)$, где $\delta r(\alpha)$ малое отклонение от уравнения связи, которое в виде информации поступает в автоматическое устройство и вследствие которого возникает реакция. Однако если система P достаточно чувствительна, т. е. $\delta r(\alpha)$ сравнимо с отклонениями вследствие деформаций идеальных голономных связей, то подобная модель, по-видимому, заслуживает внимания.

Отметим, что в обоих примерах при одном и том же уравнении связи и одинаковых активных силах будет совершенно различное движение, так как реакция в первом примере направлена вдоль AO, а во втором перпендикулярно AO. Оба указанных примера формально могут быть отнесены к «системам с трением» по Пэнлеве. Однако нам кажется, что применение этого термина в данном случае лишено оснований.

Можно заметить еще, что автоматическое устройство может в обоих примерах осуществлять какую-либо другую связь $f(r, \dot{r}, \alpha, \dot{\alpha}) = O$ и тогда первое, не содержащее реакции уравнение совместно с уравнением связи будет представлять систему уравнений движения, причем вид первого уравнения до учета уравнения связи не зависит от вида уравнения связи. Это становится понятным, если учесть, что первое уравнение отражает специфический для данного устройства факт. Для первого примера реакция направлена вдоль нити, для второго примера реакция направлена перпендикулярно к стержню.

2. Рассмотрим теперь систему материальных точек, подчиненных идеальным голономным связям, положение которой в пространстве определяется голономными координатами $q_1, \ldots, q_n$, находящуюся под действием обобщенных активных сил $Q_1, \ldots, Q_n$.

Если на указанную систему наложить еще некоторое число идеальных голономных, линейных неголономных или нелинейных неголономных связей типа Н. Г. Четаева [3]

$$f_i(q_1, \ldots, q_n, t) = 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} A_{kj}\dot{q}_j + B_k = 0, \qquad \varphi_s(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t) = 0 \tag{2.1}$$

$$(i = 1, \ldots, r) \qquad (k = 1, \ldots, l) \qquad (s = 1, \ldots, p)$$

$$(r + l + p = m < n)$$

то принцип возможных перемещений

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right]\delta q_j = 0$$

при определении возможных перемещений

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial q_j}\delta q_j = 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} A_{kj}\delta q_j = 0, \qquad \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \varphi_s}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j = 0 \tag{2.2}$$

$$(i = 1, \ldots, r) \qquad (k = 1, \ldots, l) \qquad (s = 1, \ldots, p)$$

дает возможность получить уравнения движения.

Запишем последние уравнения кратко в виде:

$$a_{i1}\delta q_1 + \ldots + a_{in}\delta q_n = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

и заметим, что уравнения движения можно получить лишь тогда, когда матрица (a_{ij}) имеет ранг m.

Если систему освободить и ввести реакции $R_1, \ldots, R_n$, то уравнение $R_1\delta q_1 + \ldots + R_n\delta q_n = 0$ совместно с уравнениями (2.2) представит систему из $m + 1$ уравнений относительно $\delta q_1, \ldots, \delta q_n$, ранг которой равен m и, следовательно, $R_1, \ldots, R_n$ удовлетворяют $n - m$ линейным уравнениям, которые получатся после приравнивания нулю $n - m$ миноров $m + 1$ порядка матрицы

$$\left\| \begin{matrix} R_1 & \ldots & R_n \\ a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\|$$

Пусть они имеют вид

$$b_{i1}R_1 + \ldots + b_{in}R_n = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n - m) \tag{2.3}$$

Эти уравнения определяют «направления» реакций в пространстве $q_i, \dot{q}_i, t$.

Если первые r уравнений связи продифференцировать дважды по времени, а остальные один раз, а затем на место $\ddot{q}_j$ подставить в них решение относительно $\ddot{q}_j$ уравнений

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + R_j \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

то получим уравнения

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\,(Q_j + R_j) = d_i \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{2.4}$$

где c_{ij}, d_i суть функции $q_j, \dot{q}_j, t$. Уравнения (2.3) совместно с (2.4) дают возможность определить реакции как функции $q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, Q_i, t$.

Заметим далее, что уравнения (2.3) получаются в результате определенной операции из уравнений связи, относительно реакций линейны и не содержат активных сил.

3. Предположим теперь, что связи (2.1) не являются идеальными, то есть реакции не перпендикулярны к количествам, определяемым (2.2), однако обладают тем свойством, что во всяком допустимом, т. е. совместном со связями состоянии $q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t$ все $\ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_n$ однозначно определяются состоянием и $Q_1, \ldots, Q_n$ активными силами. Можно показать, что это предположение эквивалентно предположению о том, что $R_1, \ldots, R_n$ однозначно определяются допустимым состоянием и активными силами.

Это значит, что между реакциями, допустимым состоянием и активными силами должно существовать $n - m$ зависимостей

$$\Psi_i(R_1, \ldots, R_n, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t, Q_1, \ldots, Q_n) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n - m) \tag{3.1}$$

таких, что (3.1) совместно с (2.4) дают возможность определить R_j в зависимости от состояния и активных сил. Соотношения (3.1) должны быть найдены эмпирически.

Эти уравнения будем называть «аксиомой реакции» для неидеальных связей (2.1).

Если требуется определить только движение, не интересуясь реакциями, то уравнения

$$\Psi_i\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_1}-\frac{\partial T}{\partial q_1}-Q_1,\ldots,\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_n}-\frac{\partial T}{\partial q_n}-Q_n, q_j, \dot q_j, t, Q_j\right)=0$$
$$(i=1,\ldots,m) \tag{3.2}$$

совместно с уравнениями (2.1) связи представляют искомую, не содержащую реакций систему.

Если аксиома реакций не содержит активных сил, а связи (2.1) голономны, то можно показать, что высказанная система предположений эквивалентна системе предположений Пэнлеве.

4. Рассмотрим механическую систему с неидеальными связями, уравнения которых имеют вид (2.1), а аксиома реакций

$$b_{i1}{}^\circ(q_1,\ldots,q_n,t)R_1+\ldots+b_{in}{}^\circ(q_1,\ldots,q_n,t)R_n=0 \quad (i=1,\ldots,n-m) \tag{4.1}$$

линейна относительно R_j, с коэффициентами $b_{ij}{}^\circ$, зависящими только от координат и времени. Предположим также, что система уравнений

$$\overset{\circ}{a}_{k1}\delta q_1+\ldots+\overset{\circ}{a}_{kn}\delta q_n=0 \qquad (k=1,\ldots,m) \tag{4.2}$$

полученная приравниванием к нулю миноров $n-m+1$ порядка матрицы

$$\left\|\begin{matrix}\delta q_1 & \ldots & \delta q_n\\ \overset{\circ}{b}_{11} & \ldots & \overset{\circ}{b}_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ b_{n-m1} & \ldots & b_{n-m,n}\end{matrix}\right\|$$

представляет вполне интегрируемую систему Пфаффа с независимыми интегралами $y_1(q_1,\ldots,q_n,t),\ldots,y_m(q_1,\ldots,q_m,t)$.

Поскольку любая строчка $\delta q_1,\ldots,\delta q_n$, удовлетворяющая (4.2), обладает тем свойством, что $R_1\delta q_1+\ldots+R_n\delta q_n=0$, то она же будет обладать и свойством

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}-Q_j\right]\delta q_j=0 \tag{4.3}$$

Таким образом уравнения (4.2) можно рассматривать как определение «возможных перемещений», соответствующее аксиоме реакций (4.1).

Пусть теперь $q_1{}^\circ,\ldots q^\circ{}_n$ суть такие новые обобщенные координаты, что $q_1,\ldots,q_n$ выражаются через них под видом

$$q_i=\varphi_i(q_1{}^\circ,\ldots,q_n{}^\circ,t) \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{4.4}$$

независимых, дважды непрерывно дифференцируемых функций. Пусть, кроме того, после замены q_i на $q_i{}^\circ$ по формулам (4.4) $y_1,\ldots,y_n$ переходят в $y_1^\circ(q_{n-m+1}^\circ,\ldots,q_n^\circ,t),\ldots,y_m^\circ(q_{n-m+s}^\circ,\ldots,q_n^\circ,t)$, зависящие только лишь от последних m новых координат и времени.

Легко видеть, что система (4.2) эквивалентна системе

$$\delta y_1=\ldots=\delta y_m=0$$

и системе

$$\delta\overset{\circ}{q}_{n-m+1}=\ldots=\delta\overset{\circ}{q}_n=0 \tag{4.5}$$

Если теперь $T^\circ = T(q_1^\circ, \ldots, q_n^\circ, \dot{q}_1^\circ, \ldots, \dot{q}_n^\circ, t)$, а Q_j° суть обобщенные силы, соответствующие новым координатам, то в силу (4.5) уравнение (4.3) примет вид

$$\sum_{j=1}^{n-m}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T^\circ}{\partial \dot{q}_j} - \frac{nT^\circ}{\partial q_i^\circ} - Q_j^\circ\right]\delta q_j^\circ = 0$$

Так как в качестве $\delta \overset{\circ}{q}_1, \ldots, \delta \overset{\circ}{q}_{n-m}$ могут быть взяты любые количества, то из последнего уравнения необходимо следует

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^\circ}{\partial \dot{q}_j^\circ} - \frac{\partial T}{\partial q_j^\circ} = Q_j^\circ \qquad (j = 1, \ldots, n-m) \tag{4.6}$$

Присоединяя к этим уравнениям уравнения связи, выраженные через новые координаты

$$f_i^\circ(q_1^\circ, \ldots, q_n^\circ, t) = 0, \quad \sum \overset{\circ}{A}_{kj}\dot{\overset{\circ}{q}}_j + \overset{\circ}{B}_k = 0, \quad \psi_s(\overset{\circ}{q}_1, \ldots, \overset{\circ}{q}_n, \dot{\overset{\circ}{q}}_1, \ldots, \dot{\overset{\circ}{q}}_n, t) = 0$$
$$(i = 1, \ldots, r) \qquad (k = 1, \ldots, l) \qquad (s = 1, \ldots, p)$$

получим не содержащие реакций уравнения движения.

Следует, однако, заметить, что производить понижение порядка системы, пользуясь уравнениями голономных связей, можно только лишь после того, как произведены все операции, указанные в левых частях уравнений (4.6), над функцией T°, зависящей от q_i°, $\dot{q}_i^\circ$, t.

Если в приведенных примерах в качестве лагранжевых координат взять x, y декартовы координаты точки в плоскости ее движения с началом в точке O, осью x, направленной горизонтально направо, а осью y вниз, то аксиомы реакций N_x и N_y первого и второго примеров соответственно будут

$$N_x / x = N_y / y, \qquad N_x / y = -N_y / x$$

уравнения (4.2) сведутся к $x\delta x + y\delta y = 0$ для первого и $x\delta y - y\delta x = 0$ для второго с интегралами $x^2 + y^2 = r^2$, $x / y = u = \operatorname{tg}\alpha$.

Определение возможных перемещений для первого примера можно взять в форме $\delta r = 0$, а для второго в форме $\delta\alpha = 0$. Неудивительно поэтому, что если $T^\circ = {}^1/_2(\dot{r}^2 + \dot{\alpha}^2 r^2)$, то уравнения (1.1) и (1.2) будут

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^\circ}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial T^\circ}{\partial \alpha} = Q_\alpha, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T^\circ}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T^\circ}{\partial r} = Q_r$$

Замечание. Если аксиома реакций линейна и не содержит активных сил, то операцией (4.2) возможно ввести линейное и независимое от активных сил Q_j определение «возможных перемещений» [4], так чтобы это определение совместно с принципом «возможных перемещений» давало бы уравнения движения, эквивалентные (3.2). Это можно сделать даже и если $\overset{\circ}{b}_{ij}$ зависят от обобщенных скоростей. Так как любое определение «возможных перемещений» линейное и независимое от активных сил приводит к линейной и независимой от активных сил аксиоме реакций, то высказанное условие является также и необходимым. Такие связи следует называть связями типа Бегина.

Поступила 10 XII 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Пэнлеве П. Лекции о трении. ГТТИ, 1954.
2. Appell P. Traité de mecanique rationelle. 1931, Paris, t. 2.
3. Четаев Н. Г. О принципе Гаусса. Изв. Казан. физ. мат. об-ва, 1932—1933, сер. 3, т. 4.
4. Киргетов В. И. «О возможных перемещениях» материальных систем с линейными дифференциальными связями второго порядка. ПММ, 1959, т. XXIII, в. 4.