Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ОДНОГО НУЛЕВОГО КОРНЯ ДЛЯ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

С. Н. Шиманов

(Свердловск)

В работе дается практический метод решения задачи об исследовании невозмущенного движения для систем с запаздыванием по времени в критическом случае одного нулевого корня.

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнения

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \int_{-\tau}^{0} x_j(t+\vartheta)\, d\eta_{ij}(\vartheta) + X_i(x_1(t+\vartheta), \ldots, x_n(t+\vartheta)) \qquad (i=1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

где интегралы понимаются в смысле Стильтьеса [1, 2], $X_i(x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta))$ — функционалы, определенные на кусочно-непрерывных функциях $x_i(\vartheta)$ аргумента ϑ, который меняется в пределах $-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0$, и представляют собою нелинейные возмущения.

Точнее X_i удовлетвосяют условиям Липшица по x_i

$$|X_i(x_1''(\vartheta), \ldots, x_n''(\vartheta)) - X_i(x_1'(\vartheta), \ldots, x_n'(\vartheta))| \leqslant L\|x'' - x'\| \tag{1.2}$$

$$\|x(\vartheta)\| = \sup\{|x_1(\vartheta)|, \ldots, |x_n(\vartheta)|\}, \qquad L = L_1\{\|x''\| + \|x'\|\}^{\alpha_1} \quad \text{при } -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0 \tag{1.3}$$

Здесь L_1 и α_1 — положительные числа.

Условие (1.3) через (1.2) обеспечивает нелинейность добавки X_i в уравнениях (1.1). Очевидно, $X(0, \ldots, 0) \equiv 0$. Движение $x \equiv 0$ будем называть невозмущенным движением системы (1.1). Будем предполагать, что при подстановке в функционал X_i любой аналитической по y функции $x(y, \vartheta)$ получается аналитическая функция y.

Из уравнений (1.1) могут быть получены уравнения с запаздыванием при частных предположениях о мере Стильтьеса $d\eta_{ij}(\vartheta)$. Так, например, положим

$$d\eta_{ij}(\vartheta) = 0 \quad \text{при } \vartheta \neq 0, \quad \vartheta \neq -\tau$$

$$d\eta_{ij}(0) = a_{ij}, \quad d\eta_{ij}(-\tau) = b_{ij} \quad (a_{ij}, b_{ij} = \text{const})$$

$$X_j(x_1(t+\vartheta), \ldots, x_n(t+\vartheta)) = F_i(x_1(t), \ldots, x_n(t), x_1(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau))$$

где F — аналитическая функция аргументов; тогда, в частности, получим следующую систему уравнений возмущенного движения с запаздыванием

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j(t-\tau) + F_i(x_1(t), \ldots, x_n(t-\tau)) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Систему линейных уравнений с запаздыванием (1.4)

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \int_{-\tau}^{0} x_j(t+\vartheta)\, d\eta_{ij}(\vartheta) \tag{1.5}$$

будем называть системой первого приближения.

Рассмотрим характеристическое уравнение системы первого приближения

$$\triangle(\lambda) \equiv \left| -\delta_{ij}\lambda + \int_{-\tau}^{0} e^{\lambda\vartheta}\, d\eta_{ij}(\vartheta) \right| = 0 \tag{1.6}$$

Допустим, что среди счетного множества корней $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_n, \ldots$ уравнения (1.6) имеется один корень, равный нулю ($\lambda_1 = 0$), а остальные корни имеют отрицательные вещественные части

$$\operatorname{Re}\lambda_j \leqslant -2\alpha \qquad (j > 1) \tag{1.7}$$

В этом случае имеет место так называемый критический случай одного нулевого корня. Для движений, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, эта задача решена Ляпуновым [3, 4]. В этом случае устойчивость невозмущенного движения системы первого приближения не влечет за собой устойчивость невозмущенного движения полной системы. На устойчивость движения существенно влияют нелинейные члены. Различные другие критические случаи для обыкновенных уравнений были изучены в работах А. М. Ляпунова, Н. Г. Четаева, И. Г. Малкина, Г. В. Каменкова, Н. Н. Красовского и др. Для систем с последействием соответствующая задача в общем случае не рассматривалась.

Для систем с запаздыванием Р. Беллманом [7] было показано, что когда невозмущенное движение системы первого приближения асимптотически устойчиво ($\operatorname{Re}\lambda_j \leqslant -2\alpha$), то невозмущенное движение полной системы будет асимптотически устойчиво.

Здесь рассматривается устойчивость невозмущенного движения $x = 0$ для системы с запаздыванием (1.1) в критическом случае одного нулевого корня.

Для того чтобы определить $dx_i(t)/dt$ в данный момент времени, необходимо знать $x_i(t)$ не только в момент времени t, но и на интервале $(t-\tau, t)$ длиной τ. Поэтому в качестве элемента траектории удобно принимать [1] не точку $x_i(t)$, а отрезок траектории $x_j(t+\vartheta)$ $(-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0)$. При этом элемент траектории можно рассматривать как точку в функциональном пространстве B. В функциональном пространстве уравнениям с последействием, как показал Н. Н. Красовский [1], соответствует система «обыкновенных» уравнений с операторной правой частью.

Пусть $x_j(t)$ — решение системы (1.1). Элемент решения в функциональном пространстве будет $x_i(t+\vartheta)$ $(-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0)$. Системе (1.1) будет соответствовать эквивалентная система «обыкновенных» уравнений

$$\frac{dx_t(\vartheta)}{dt} = Ax_t(\vartheta) + R(x_t(\vartheta)) \tag{1.8}$$

где

$$x_t(\vartheta) = \{x_1(t+\vartheta), \ldots, x_n(t+\vartheta)\} = \{x_{1t}(\vartheta), \ldots, x_{nt}(\vartheta)\}$$

$$y(\vartheta) = Ax(\vartheta) = \begin{cases} \dfrac{dx_k(\vartheta)}{d\vartheta} & (-\tau \leqslant \vartheta < 0) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \int_{-\tau}^{0} x_j(\vartheta)\, d\eta_{kj}(\vartheta) & (\vartheta = 0) \end{cases} \quad (k=1,\ldots,n) \tag{1.9}$$

$$R(x_t(\vartheta)) = \begin{cases} 0 & (-\tau \leqslant \vartheta < 0) \\ X_k(x_{1t}(\vartheta), \ldots, x_{nt}(\vartheta)) & (\vartheta = 0) \end{cases} \quad (k=1,\ldots,n) \tag{1.10}$$

Очевидно, что задача исследования устойчивости невозмущенного движения системы (1.8) $x_t(\vartheta) = 0$ эквивалентна соответствующей задаче для системы (1.1), ибо, если $x_t(\vartheta)$ — любое решение системы (1.8), то $x_t(\vartheta) = x(t+\vartheta)$, где $x(t+\vartheta)$ — элемент решения системы (1.1).

Если $x_0(\vartheta)$ начальная функция кусочно-непрерывна, то оператор А будет определен только при $t \geqslant \tau > 0$, когда соответствующее решение будет дифференцируемо. В связи с этим будем предполагать начальные функции дифференцируемыми и оператор рассматривать при $t \geqslant 0$.

Последнее не исключает начальных кусочно-непрерывных функций, так как по истечении времени τ им будет соответствовать дифференцируемый отрезок решения, который можно принять за начальную функцию.

2. Свойства линейного оператора. Так как уравнение (1.6) имеет простой корень, равный нулю, то определитель $\Delta(0)$ будет равен нулю

$$\Delta(0) \equiv \left| \int_{-\tau}^{0} d\eta_{kj}(\vartheta) \right| = 0 \tag{2.1}$$

Обозначим через $\Delta_{kj}(\lambda)$ алгебраическое дополнение элементу, стоящему в пересечении k строки и j колонки в определителе $\Delta(\lambda)$. Тогда

$$\Delta'(0) \equiv \sum_{j=1}^{n} \left\{ -\Delta_{jj}(0) + \sum_{\sigma=1}^{n} \int_{-\tau}^{0} \vartheta \cdot d\eta_{j\sigma}(\vartheta)\, \Delta_{j\sigma}(0) \right\} \tag{2.2}$$

Так как $\Delta'(0) \neq 0$, то найдутся два номера k_1, l_1, для которых $\Delta_{l_1 k_1}(0)$ отлично от нуля. Рассмотрим при этом функционал

$$f[x_t(\vartheta)] = \sum_{j=1}^{n} \Delta_{jk_1}(0) \left\{ -x_{jt}(0) + \sum_{l=1}^{n} \int_{-\tau}^{0} \left[\int_{0}^{\vartheta} x_{lt}(\xi)\, d\xi \right] d\eta_{jl}(\vartheta) \right\} \tag{2.3}$$

определенный на дифференцируемых функциях $x_t(\vartheta)$ $(-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0)$. Легко проверить следующее тождество:

$$f[Ax(\vartheta)] \equiv 0 \tag{2.4}$$

Пусть

$$b(\vartheta) = (b_1, \ldots, b_n) = (\Delta_{l_1 1}(0), \ldots, \Delta_{l_1 n}(0))\, d = \mathrm{const}(\vartheta) \tag{2.5}$$

где $d = [\Delta_{l_1 k_1}(0)\, \Delta'(0)]^{-1}$ постоянная по ϑ. Будем считать $b(\vartheta)$, как вектор-функцию в пространстве $x(\vartheta)$, постоянной для всех ϑ на отрезке $-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0$. Тогда

$$f[b(\vartheta)] = 1, \qquad A(b(\vartheta)) = 0 \tag{2.6}$$

Из условия (2.4) следует, что $f[x_t(\vartheta)]$ представляет собой интеграл линейной системы уравнений

$$\frac{dx_t(\vartheta)}{dt} = Ax_t(\vartheta) \tag{2.7}$$

Интеграл $f[x_t(\vartheta)]$ назовем функциональным интегралом. Пусть $x_0(\vartheta)$ — начальная функция для решения $x_t(\vartheta)$ системы (2.7). Тогда

$$f[x_t(\vartheta)] = f[x_0(\vartheta)] \qquad \text{при } t \geqslant 0 \tag{2.8}$$

Пусть начальная функция $x_0(\vartheta)$ такова, что имеет место условие

$$f[x_0(\vartheta)] = 0 \tag{2.9}$$

Тогда соответствующее решение $x_t(\vartheta)$ будет асимптотически убывать по экспоненциальному закону с показателем α

$$\|x_t(\vartheta)\| < K\|x_0(\vartheta)\|\exp(-\alpha t) \qquad (K = \text{const})$$

При этом предполагается выполненным условие (1.7).

В силу (2.8), (2.9) все решения, асимптотически убывающие по экспоненциальному закону, будут расположены в функциональном пространстве $\{x(\vartheta)\}$ в плоскости

$$f[x_t(\vartheta)] = 0 \tag{2.10}$$

Плоскость (2.10) будем называть в дальнейшем L-плоскостью.

Заметим, что оператор A определен при $t \geqslant 0$, если начальные функции дифференцируемы и при $t \geqslant \tau$, если начальные функции кусочно-непрерывны. Поэтому функционал $f[x_t(\vartheta)]$ удовлетворяет условию (2.4) и вытекающему из него (2.8) только для дифференцируемых $x_0(\vartheta)$ при $t \geqslant 0$ и при $t \geqslant \tau$, когда $x_0(\vartheta)$ кусочно-непрерывны (с разрывами первого рода).

В функциональном пространстве B, в котором определен оператор A и функционал $f[x(\vartheta)]$ удовлетворяет указанным ранее свойствам, сделаем разложение произвольного элемента $x(\vartheta)$ на два слагаемых следующим образом:

$$y = f[x(\vartheta)], \qquad x(\vartheta) = z(\vartheta) + b(\vartheta)\,y, \qquad b(\vartheta) = \text{const}\,(\vartheta) \tag{2.11}$$

(или более подробно $x_k(\vartheta) = z_k(\vartheta) + b_k y$ $(k = 1, \ldots, n)$).

Имеет место условие

$$f[z(\vartheta)] = 0 \tag{2.12}$$

В самом деле

$$f[z(\vartheta)] = f[x(\vartheta)] - yf[b(\vartheta)] = f[x(\vartheta)] - f[x(\vartheta)]\cdot 1 \equiv 0$$

так как $f[b] = 1$ в силу (2.6) и $y = f[x(\vartheta)]$ в силу (2.11).

Уравнение (2.12) в функциональном пространстве B выделяет L-плоскость. Вектор-функция $b(\vartheta) = (b_1, \ldots, b_n) = \text{const}\ \vartheta \in [-\tau, 0]$ не лежит в L-плоскости, так как в силу (2.6) $f[b] = 1$. Таким образом, сделанное разложение $x(\vartheta)$ геометрически представляет собой разложение вектор-функции $x(\vartheta)$ на два слагаемых $z(\vartheta)$ и yb, причем вектор-функция $z(\vartheta)$ расположена в L-плоскости, а вектор yb колинеарен постоянному вектору b.

Разложение функции $x(\vartheta)$ на два слагаемых $z(\vartheta)$ и $yb(\vartheta)$ единственно. В самом деле, допустим, что для $x(\vartheta)$ имеют место два представления

$$x(\vartheta) = z_1(\vartheta) + y_1 b = z_2(\vartheta) + y_2 b, \qquad \text{или} \qquad z_1(\vartheta) - z_2(\vartheta) = b(y_2 - y_1)$$

Допустим, что $y_1 \neq y_2$. Взяв от левой и правой части равенства операцию f, найдем

$$-(y_1 - y_2)f[b] \equiv y_2 - y_1 = f[z_1(\vartheta)] - f[z_2(\vartheta)] \equiv 0, \quad \text{или} \quad y_1 \equiv y_2, \quad z_1 \equiv z_2$$

Отсюда вытекает, что если $x(\vartheta) = 0$, то $z(\vartheta) = y = 0$.

В переменных $z_1(\vartheta)$, $y(t)$ система первого приближения (2.7) принимает вид

$$\frac{dy}{dt} = 0, \qquad \frac{dz_t(\vartheta)}{dt} = Az_t(\vartheta), \qquad f[z_t(\vartheta)] = 0 \tag{2.13}$$

Представим уравнения (1.8) в переменных $z_t(\vartheta)$ и $y(t)$. Имеем

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} f[x_t(\vartheta)] = f\left[\frac{dx_t(\vartheta)}{dt}\right] = f[Ax_t(\vartheta)] + f[R(x_t(\vartheta))] = f[R(x_t(\vartheta))]$$

$$\frac{dz_t(\vartheta)}{dt} = \frac{dx_t(\vartheta)}{dt} - b\frac{dy}{dt} = Ax_t(\vartheta) + R(x_t(\vartheta)) - bf[R(x_t(\vartheta))] =$$
$$= Az_1(\vartheta) + yA(b) + R(z_t(\vartheta) + by) - bf[R(z_t(\vartheta) + by)]$$
$$A(b) = 0$$

Таким образом, в переменных y и z уравнения (1.8) примут вид

$$\frac{dy}{dt} = Y(y, z_t(\vartheta)), \qquad \frac{dz_t(\vartheta)}{dt} = Az_1(\vartheta) + Z(y, z_t(\vartheta), \vartheta) \tag{2.14}$$

Здесь Y — функционал, определяемый формулой

$$Y(y, z_t(\vartheta)) \equiv f[R(z_t(\vartheta) + by)] \equiv$$
$$\equiv -\sum_{j=1}^{n} \Delta_{jk_1}(0)\, X_j(z_{1t}(\vartheta) + b_1y, \ldots, z_{nt}(\vartheta) + b_ny) \tag{2.15}$$

а $Z(y, z_t, (\vartheta), \vartheta)$ оператор, определенный следующим образом:

$$Z(y, z_t(\vartheta), \vartheta) = \begin{cases} -b_kY(y, z_t(\vartheta)) & (-\tau \leqslant \vartheta < 0) \\ X_k(z_{1t}(\vartheta) + b_1y, \ldots, z_{nt}(\vartheta) + b_ny] - b_kY & (\vartheta = 0) \end{cases} \quad (k=1,\ldots,n) \tag{2.16}$$

Заметим, что $Z(y, z_t(\vartheta), \vartheta)$ функция ϑ, принадлежащая L, так как $f[Z] = 0$. Очевидно, что

$$Y(0, 0) \equiv 0, \qquad Z(0, 0, \vartheta) \equiv 0 \tag{2.17}$$

Функционал Y и оператор Z удовлетворяют условию Липшица по переменным y и $z_t(\vartheta)$ типа (1.2) и (1.3).

Так как для начального условия $x_0(\vartheta)$ в окрестности начала координат $x = 0$ система (1.8) допускает единственное решение $x_t(\vartheta)$, то, очевидно, что $z_t(\vartheta)$ и $y(t)$ образуют решение системы (2.14) с начальными условиями $z_0(\vartheta)$ и $y(0)$, если только имеет место равенство $x_t(\vartheta) = z_t(\vartheta) + by(t)$.

Единственность решения $z_t(\vartheta)$, $y(t)$ вытекает из единственности разложения любой функции $x(\vartheta)$ на $z(\vartheta)$ и yb.

3. Преобразование эквивалентной системы. 1°. Обозначим через $Y^\circ(y)$ и $Z^\circ(y, \vartheta)$ аналитические функции

$$Y^\circ(y) \equiv Y(y, 0) = gy^m + \ldots \tag{3.1}$$
$$Z^\circ(y, \vartheta) \equiv Z(y, 0, \vartheta) = g_1(\vartheta)y^{m_1} + \ldots \qquad (g_1(\vartheta) \text{ — вектор}, \ m_1 \geqslant 2)$$

Оказывается, что всегда можно осуществить преобразование переменной z так, чтобы $m_1 > m$. Это преобразование аналогично преобразованию, произведенному Ляпуновым в случае одного нулевого корня для систем, описываемых обыкновенными уравнениями [3] (стр. 142). Исключением тут является особый случай, который здесь не рассматривается

2°. Рассмотрим систему уравнений

$$Au(\vartheta) + Z(y, u(\vartheta), \vartheta) = 0 \tag{3.2}$$

где $Z \in L$ и определяется соотношением (2.16), в котором $z_t(\vartheta)$ заменяется на $u(\vartheta)$; оператор A определен формулами (1.9).

Определим оператор $A^{-1}(\varphi(\vartheta))$ следующим образом:

$$A^{-1}(\varphi(\vartheta)) \equiv \left\{-b_k\left(f[x^*] + f\left[\int_k^{\vartheta}\varphi(\vartheta)\,d\vartheta\right]\right) + x_k^* + \int_0^{\vartheta}\varphi_k(\vartheta)\,d\vartheta\right\} \quad (k = 1, \ldots, n)$$

где $\{x_k^*\} = x^*$ удовлетворяет системе неоднородных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j^* = \varphi_k(0) + \sum_{l=1}^{n}\int_0^{-r}\left[\int_k^{\vartheta}\varphi_l(\vartheta_1)\,d\vartheta_1\right]d\eta_{jl}(\vartheta) \quad \left(a_{kj} = \int_{-\tau}^{0} d\eta_{kj}(\vartheta)\right) \quad (k = 1, \ldots, n)$$

Последняя система разрешима, если $\varphi(\vartheta)$ принадлежит L-поверхности и, следовательно, выполняется условие

$$f[\varphi(\vartheta)] \equiv \sum_{j=1}^{n}\Delta_{jk_1}(0)\left[-\varphi_j(0) + \sum_{l=1}^{n}\int_{-\tau}^{0}\left[\int_0^{\vartheta}\varphi_l(\vartheta_1)\,d\vartheta_1\right]d\eta_{jl}(\vartheta)\right] = 0$$

На множестве дифференцируемых функций $\varphi(\vartheta)\,(-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0)$, принадлежащих L, оператор A^{-1} ограничен по норме

$$\| A^{-1}\varphi(\vartheta) \| = \sup(| A_k^{-1}\varphi(\vartheta) | / \| \varphi(\vartheta) \|) = M$$

где M — положительное число.

Вектор-функция $A^{-1}\varphi(\vartheta)$ имеет производную по ϑ на отрезке $[-\tau, 0]$.

Нетрудно показать, что для любой дифференцируемой функции $\varphi(\vartheta) \in L\,(-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0)$ имеют место тождества

$$AA^{-1}\varphi(\vartheta) = \varphi(\vartheta) \qquad A^{-1}A\varphi(\vartheta) = \varphi(\vartheta) \tag{3.3}$$

Теорема 3.1. Система уравнений (3.2) имеет единственное решение $u(y, \vartheta)$, аналитическое относительно y в окрестности точки $y = 0$, $u(0, \vartheta) = 0$, непрерывное по ϑ и $u(y, \vartheta) \in L$. Это решение $u(y, \vartheta)$ можно искать, стараясь удовлетворить уравнению (3.2) формальными рядами, расположенными по целым и положительным степеням y с неизвестными коэффициентами в виде

$$u(y, \vartheta) = u_{m_1}(\vartheta)\,y^{m_1} + u_{m_1+1}(\vartheta)\,y^{m_1+1} + \ldots \tag{3.4}$$

Коэффициенты однозначно определяются из условия, что $u_j \in L$.

Доказательство. В силу свойств оператора A^{-1} решение уравнения

$$u(\vartheta) = -A^{-1}Z(y, u(\vartheta), \vartheta) \tag{3.5}$$

будет решением и уравнения (3.2).

Так как оператор A^{-1} ограничен по норме, оператор Z удовлетворяет условию Липшица со сколь угодно малым коэффициентом q и оператор A^{-1} всякий элемент $\varphi(\vartheta) \in L$ переводит в элемент $A^{-1}\varphi(\vartheta) \in L$, то из принципа сжатых отображений [9] вытекает справедливость теоремы (3.1). Нетрудно ее доказать и простым методом последовательных приближений.

3°. Пусть $u^*(y, \vartheta)$ решение уравнения (3.1). Тогда в уравнении (2.14) сделаем замену переменной $z(\vartheta)$ на $z_1(\vartheta)$ по формуле

$$z(\vartheta) = z_1(\vartheta) + u^*(y, \vartheta), \qquad z_1(\vartheta) = \{z_{1k}(\vartheta)\} \tag{3.6}$$

При этом система (2.14) примет вид

$$\frac{dy}{dt} = Y(y, z_{1t}(\vartheta) + u^*(y, \vartheta)) \tag{3.7}$$

$$\frac{dz_{1t}(\vartheta)}{dt} = Az_{1t}(\vartheta) + Z_1(y, z_{1t}(\vartheta) + u^*(y, \vartheta), \vartheta) \tag{3.8}$$

где

$$Z_1 = Au^*(y, \vartheta) + Z(y, z_1 + u^*(y, \vartheta), \vartheta) - \frac{\partial u^*}{\partial y} Y$$

Соответствующая функция

$$Z_1^\circ(y, \vartheta) \equiv -\frac{\partial u^*(y, \vartheta)}{\partial y} Y(y, u^*(y, \vartheta))$$

Поэтому $m_1 > m$, если только функция $Y^\circ(y) \equiv Y(y, u^*(y, \vartheta)$ не равна тождественно нулю. Последний случай будем называть особым.

4. Критерий устойчивости. Допустим, что система дифференциальных уравнений (1.8) с операторной правой частью (эквивалентная системе (1.1)) приведена при помощи ляпуновского преобразования (§ 3) к виду

$$\frac{dy}{dt} = Y_1(y, z_1 + (\vartheta)), \qquad \frac{dz_1(\vartheta)}{dt} = Az_{1t}(\vartheta) + Z_1(y, z_{1t}(\vartheta), \vartheta) \qquad (4.1)$$

Здесь $Y_1(y, z_{1t}(\vartheta)) = Y(y, z_{1t}(\vartheta) + u^*(y, \vartheta))$, функция Z_1 определена в (3.8), функция $u^*(y, \vartheta)$ — решение системы (3.2).

$$Y_1^\circ(y) = Y(y, u^*(y, \vartheta)) = gy^m + \ldots$$

$$Z_1^\circ(y, \vartheta) = -\frac{\partial u^*(y, \vartheta)}{\partial y} Y_1^\circ(y) = g_1 y^{m_1} + \ldots \qquad (m_1 > m)$$

Теорема 4.1. Допустим, что систему уравнений (1.8) можно привести при помощи замены переменных (2.11), (3.6) к виду (4.1).

а) Если m — нечетное число, g — отрицательное число, то движение $x = 0$ системы (1.1) асимптотически устойчиво.

б) Если m — четное число, или m — нечетное число и g больше нуля, то невозмущенное движение $x = 0$ будет неустойчиво.

Доказательство. На плоскости L в функциональном пространстве $x_t(\vartheta)$ для линейной системы

$$\frac{dz_{1t}(\vartheta)}{dt} = Az_{1t}(\vartheta), \qquad f[z_{1t}(\vartheta)] = 0 \qquad (4.2)$$

можно построить на основании результатов [1], стр. 191—192 функционал $v_2(z_{1t}(\vartheta), t)$, удовлетворяющий следующим условиям

$$c_1 \| z_{1t}(\vartheta) \| \leqslant v_2(z_{1t}(\vartheta), t)) \leqslant c_2 \| z_{1t}(\vartheta) \| \qquad (4.3)$$

$$\lim\sup \left(\frac{\Delta v_2}{\Delta t}\right) \leqslant -c_3 \| z_{1t}(\vartheta) \| \quad \text{при } \Delta t \to +0 \qquad (4.4)$$

$$| v_2(z_{1t}''(\vartheta), t) - v_2(z_{1t}'(\vartheta), t) \leqslant c_4 \| z_{1t}'' - z_{1t}' \| \qquad (4.5)$$

Здесь c_1, c_2, c_3 и c_4 — положительные постоянные.

Составим функционал $v^*(x_t(\vartheta), t)$ для системы (1.8) (или 4.1) в виде

$$v^*(x_t(\vartheta), t) = -gy^{m+1} + v_2^2(z_{1t} | \vartheta |, t) \qquad (4.6)$$

где y и $z_{1t}(\vartheta)$ определяются через $x_t(v)$ по формулам (2.11), (2.14), (3.6).

Пусть $g < 0$, m нечетное число. Найдутся положительные постоянные числа B, C, D такие, что будут иметь место неравенства

$$\| y \| < B \| x_t(\vartheta) \|, \qquad \| z_{1t}(\vartheta) \| < C \| x_t(\vartheta) \|, \qquad \| x_t(\vartheta) \| < D \{ \| y \| + \| z_{1t}(\vartheta) \| \} \qquad (4.7)$$

Оценивая $v^*(x_t(\vartheta), t)$ сверху, найдем в области $\| x_t(\vartheta) \| < H$

$$\| v^*(x_t(\vartheta), t) \| < (| g | B^{m+1} H^m + H c_2^2) \| x_t(\vartheta) \| \qquad (4.8)$$

Функционал $v^*(x_t(\vartheta), t)$ на множестве $r \leqslant \|x_t(\vartheta)\| \leqslant H$ не может принимать сколь угодно малых значений и ограничен снизу положительным числом. В самом деле, допустим, что $\|v^*\|$ на некоторой функции $x^*(\vartheta)$, удовлетворяющей условию $r \leqslant \|x^*(\vartheta)\| \leqslant H$, меньше произвольно малого положительного числа δ. Тогда

$$\|x^*(\vartheta)\| < D(\|y^*\| + \|z_1^*(\vartheta)\|) < D\left(|g|^{-1}\delta^{\frac{1}{m+1}} + c_1^{-1}\delta^{\frac{1}{2}}\right)$$

Последнее неравенство противоречит условию $\|x^*(\vartheta)\| \geqslant r$.

Обозначим через $f(r)$ точную нижнюю границу функционала v^* на множестве $r \leqslant \|x(\vartheta)\| \leqslant H$. Функция $f(r)$ — монотонно убывающая (если $r_1 > r_2$, то $f(r_1) \geqslant f(r_2)$), кроме того, $f(r) < K\|x_t(\vartheta)\|$ в силу (4.8).

Известно, что функцию $f(r)$ на $0 \leqslant r \leqslant H$ можно представить в виде суммы положительных функций $w(r)$ и $s(r)$, где $w(r)$ — непрерывная возрастающая функция, $s(r)$ функция скачков [8].

Поэтому при $\|x(\vartheta)\| < H$

$$\begin{aligned} v^*(x_t(\vartheta), t) &= |g| \cdot \|y(x_t(\vartheta)\|^{m+1} + v_2^2(z_{1t}(\vartheta), t) \geqslant \\ &\geqslant |g| \cdot \|y(x_t(\vartheta))\|^{m+1} + c_1^2\|z_{1t}(v)\|^2 \geqslant w(\|x_t(\vartheta)\|) \end{aligned} \qquad (4.9)$$

Вдоль траектории системы (1.8) вычисляем

$$\begin{aligned} &\limsup_{\Delta t \to +0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)^*_{(1.8)} = -g^2(m+1)y^{2m} + 2|v_2|\limsup_{\Delta t \to +0}\left(\frac{\Delta v_2}{\Delta t}\right)_{(4.2)} - \\ &-g(m+1)y^m Y_1(y, z_{1t}(\vartheta)) + 2|v_2|\limsup_{\Delta t \to +0}\left[\left(\frac{\Delta v_2}{\Delta t}\right)_{(1.8)} - \left(\frac{\Delta v_2}{\Delta t}\right)_{(4.2)}\right] \leqslant \\ &\leqslant -g^2(m+1)y^{2m} - 2c_1c_2\|z_{1t}(\vartheta)\|^2 + g(m+1)y^m[|Y_1(y, 0)| + \\ &+ q\|z_{1t}(\vartheta)\|] + 2c_2c_4\|z_{1t}(\vartheta)\|(\|Z_1(y, 0)\| + q\|z_{1t}(\vartheta)\|) \end{aligned}$$

Выберем H_1 настолько малым, чтобы были выполнены неравенства.

$$\begin{gathered} g^2 - 3gY_1(y, 0)y^{-m} > 0 \\ 2c_1c_2 - 3c_2c_4q(\|y\|\|z_{1t}(\vartheta)\|) > 0 \\ -g^2(m+1)y^{2m} - 2c_1c_3\|z_{1t}(\vartheta)\| + 3q\|z_{1t}(\vartheta)\|y^m < 0 \end{gathered}$$

Последнее неравенство имеет место, если только

$$q < \frac{\sqrt{8}}{3} g\sqrt{m+1}\cdot\sqrt{c_1c_3}$$

При этом получаем оценку

$$\limsup_{\Delta t \to +0}\left(\frac{\Delta v^*}{\Delta t}\right)_{(1.18)} \leqslant \frac{1}{3}[g^2(m+1)y^{2m} + 2c_1c_3\|z_{1t}(\vartheta)\|^2]$$

Можно показать тогда, аналогично тому как это делалось при оценке v^* снизу, что найдется непрерывная монотонно возрастающая положительная функция w_1 такая, что $(w_1(r)r > 0,\ w_1(0) = 0)$

$$\limsup_{\Delta t \to \infty}\left(\frac{\Delta v^*}{\Delta t}\right)_{(1.8)} \leqslant -w_1(r) \qquad (4.10)$$

где $w_1(r)$ найдена аналогично функции $w(r)$ в формуле (4.9).

Из условий (4.8) — (4.10) согласно теореме 30.1 книги [5] (стр. 194) движение $x = 0$ систем (1.8) и (1.1) будет асимптотически устойчиво при выполнении условий $g < 0$, m — нечетное число.

Пусть $g > 0$ и m нечетное число (или m — четное число). В качестве функционала v^* для системы (1.8) выберем функционал

$$v^* \left(x_t(\vartheta), t\right) = g y^{m+1} - v_2{}^2 \left(z_{1t}(\vartheta), t\right) \tag{4.11}$$

Вычислим

$$-\lim_{\Delta t \to \infty} \inf \left(\frac{\Delta v^*}{\Delta t}\right)_{(1.8)} = -(m+1) g^2 y^{2m} - (m+1) g y^m Y_1(y, z_{1t}(\vartheta)) -$$

$$-\lim_{\Delta t \to \infty} \inf \left(\frac{\Delta(-v_2{}^2)}{\Delta t}\right)_{(4.2)} - \lim_{\Delta t \to +0} \inf \left[\left(\frac{\Delta(-v_2{}^2)}{\Delta t}\right)_{(1.8)} - \left(\frac{\Delta(-v_2{}^2)}{\Delta t}\right)_{(4.2)}\right] =$$

$$= -(m+1) g^2 y^{2m} + \lim_{\Delta t \to 0} \sup \left(\frac{\Delta v_2{}^2}{\Delta t}\right)_{(4.2)} +$$

$$+ (m+1) g y^m Y_1(y, z_t(\vartheta)) + \lim_{\Delta t \to 0} \sup \left[\left(\frac{\Delta v_2{}^2}{\Delta t}\right)_{(1.8)}\right] - \lim_{\Delta t \to +0} \sup \left(\frac{\Delta v_2{}^2}{\Delta t}\right)_{(4.2)}$$

Производя оценки, аналогичные тем, которые делались при выводе формулы (4.10), при достаточно малом $\|x_t(\vartheta)\| \leqslant H_1 < H$ найдем

$$\lim_{\Delta t \to \infty} \inf \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)^*_{(1.8)} \geqslant w_3(\|x_t(\vartheta)\|) \tag{4.12}$$

где формула w_3 аналогична $w(r)$, и $w_3(r)\, r > 0$, $w_3(0) = 0$.

Таким образом, левая часть (4.12) знакоопределенна и допускает бесконечно малый высший предел. Легко показать, что v^* ограничена в области $\|x_t(\vartheta)\| \leqslant H_1$.

Покажем, что надлежащим выбором $x_0(v)$, сколь угодно малых по норме, v^* может быть сделана положительной. В самом деле, выберем

$$y(0) = \eta \neq 0, \qquad z_{10}(\vartheta) = 0 \qquad (z_0(\vartheta) = u^*(\eta, \vartheta))$$

Соответствующее выражение $x_0{}^*(\vartheta)$ согласно (2.11) и (3.6) будет

$$b\eta + u^*(\eta, \vartheta)$$

Подставляя $x_0{}^*$ в функцию v^*, можно убедиться, что $v^*(x_0{}^*(\vartheta)) > 0$ при достаточно малом по норме $\|x_0{}^*(\vartheta)\|$.

При этом знак v^* будет положительным при сколь угодно малом по норме $\|x_0{}^*(\vartheta)\|$. Таким образом, выполнены все условия первой теоремы Ляпунова о неустойчивости движения[10], справедливой и для систем с запаздыванием. Движение $x = 0$ систем (1.8) и (1.1) будет неустойчиво.

Замечание 4.1. Из доказанной теоремы 4.1 вытекает, что устойчивость или не устойчивость движения $x = 0$ определяется знаком g или видом члена наинизшего порядка в функции $Y^\circ(y) = gy^m + \cdots$. Поэтому при приведении системы (2.14 к виду (4.1) достаточно вместо решения системы (3.2) взять приближенное решение удовлетворяющее системе (3.2) с точностью до членов $m+1$ степени по y.

Замечание 4.2. Если $Y_1(y, 0) \equiv Y(y, u(y, \vartheta)) \equiv 0$, то имеет место особый случай. Движение $x = 0$ в этом случае будет устойчиво.

5. *Пример 1.* Рассмотрим следующую систему с запаздыванием:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{at} &= x_2(t) + X_1(x_1(t), x_2(t), x_1(t-\tau), x_2(t-\tau)) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= ax_2(t-\tau) + X_2(x_1(t), x_2(t), x_1(t-\tau), x_2(t-\tau)) \end{aligned} \tag{5.1}$$

где X_1 и X_2 — аналитические функции своих аргументов, разложение которых в ряды в окрестности точки $x = 0$ начинается с членов второго порядка.

Система первого приближения будет

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t), \qquad \frac{dx_2(t)}{dt} = ax_2(t-\tau) \tag{5.2}$$

Характеристическое уравнение ее

$$\Delta(\lambda) \equiv \lambda^2 - \lambda a e^{-\lambda\tau} = 0 \tag{5.3}$$

имеет один нулевой корень. Остальные корни будут с отрицательными вещественными частями, если параметр a удовлетворяет условию

$$-\pi / 2\tau < a < 0 \tag{5.4}$$

Оператор $\mathrm{A}[x_1, x_2]$ имеет вид

$$y_i(\vartheta) = \frac{dx_i(\vartheta)}{d\vartheta} \qquad (-\tau \leqslant \nu < 0) \quad (i=1, 2) \qquad y_1(0) = x_2(0), \qquad y_2(0) = ax_2(-\tau)$$

Оператор $\mathrm{R}(x_1, x_2)$ будет

$$\mathrm{R}(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & (-\tau \leqslant \vartheta < 0), \\ X_i(x_{1t}(\vartheta), x_{2t}(\vartheta)) & (\vartheta, = 0), \; x_{it}(\vartheta) = x_i(t+\vartheta) \quad (i=1, 2) \end{cases}$$

Функционал (2.3) для системы (5.2) имеет вид

$$f[x_1, x_2] \equiv ax_{1t}(0) - x_{2t}(0) - a\int_0^{-\tau} x_{2t}(\vartheta)\,d\vartheta, \qquad b = (b_1, b_2) \equiv (a^{-1}, 0) \tag{5.5}$$

Преобразование (2.11) будет

$$y = ax_{1t}(0) - x_{2t}(0) + a\int_0^{-\tau} x_{2t}(\vartheta)\,d\vartheta, \; x_{1t}(\vartheta) = z_{1t}(\vartheta) + \frac{1}{a}y, \qquad x_{2t}(\vartheta) = z_{2t}(\vartheta) \tag{5.6}$$

При этом система преобразуется к виду (2.14), в котором

$$Y(y, z_t(\vartheta)) \equiv aX_1(x_t(\vartheta)) - X_2(x_t(\vartheta))$$

$$Z_1 = \begin{cases} -\frac{1}{a}Y & (-t \leqslant \vartheta < 0), \\ X_1 - \frac{1}{a}Y & (\vartheta = 0), \end{cases} \qquad Z_2 = \begin{cases} 0 & (-\tau \leqslant \vartheta < 0) \\ X_2 & (\vartheta = 0) \end{cases} \tag{5.7}$$

где $x_{it}(\vartheta)$ определены (1.2). Допустим, что

$$X_1 \equiv k_1 x_{1t}^2(0) + k_2 x_{2t}^2(0), \qquad X_2 \equiv l_1 x_{1t}^2(-\tau) + l_2 x_{1t}(0)\, x_{2t}(0)$$

где k_1, k_2, l_1, l_2 — постоянные. Уравнения (3.6) в рассматриваемом случае будут

$$\begin{gathered} \frac{dz_{1t}(\vartheta)}{d\vartheta} - \frac{1}{a}Y = 0, \qquad \frac{dz_2}{d\vartheta} = 0 \qquad (-\tau \leqslant \vartheta < 0) \\ z_2(0) + \frac{1}{a}X_2 = 0, \qquad z_2(-\tau) + \frac{1}{a}X_2 = 0 \qquad (\vartheta = 0) \end{gathered} \tag{5.8}$$

Будем искать решение (5.8) в виде

$$z_1 = v_2(\vartheta)\,y^2 + v_3(\vartheta)\,y^3 + \cdots \qquad z_2 = u_2(\vartheta)\,y^2 + u_3(\vartheta)\,y^3 + \cdots \tag{5.9}$$

где v_i, u_i — неизвестные коэффициенты. Подставляя (5.9) и (5.8) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях y, в частности, получим

$$\frac{dv_2}{dv} = a^{-3}(k_1 a - l_1), \qquad u_2 = -l_1 a^{-3}$$

Функцию v_2 находим из этого уравнения и из условия, что точка (u_1, u_2) принадлежит L, т. е. удовлетворяется условие $f[v_2, u_2] = 0$; имеем

$$v_2 = \frac{1}{a^3}(ak_1 - l_1)\,\vartheta - \frac{1}{a^4}\,l_1(1 - a\tau)$$

Подсчитаем выражение

$$Y^\circ(y, z(y)) = (ak_1 - l_1)\, a^{-2}y^2 + y^3(\ldots) + \ldots$$

При $ak_1 - l_1 \neq 0$ имеет место неустойчивость движения. Если $ak_1 - l_1 = 0$, то в Y° следует подсчитать коэффициент при y в третьей степени

$$Y^{(0)}(y, z(y)) = \frac{l_1 l_2}{a^4}\, y^3 + y^4(\ldots) + \ldots \tag{5.10}$$

Если $l_1 l_2 < 0$, то имеет место асимптотическая устойчивость, и если $l_1 l_2 > 0$, то движение $x = 0$ неустойчиво.

Допустим $l_1 l_2 = 0$. Далее надо считать коэффициент при y в четвертой степени в выражении Y°. Для этого предварительно в разложениях (5.9) надо найти u_3 и v_3 при $l_2 = 0$ и при $l_1 = 0$. В первом случае коэффициент при y^4 в (5.10) будет равен $-k_2 l_1 a^{-6}$ и поэтому, при $l_1 k_2 \neq 0$ имеет место неустойчивость движения. При $l_2 = k_2 = 0$ имеет место особый случай. Во втором случае, когда $l_1 = k_1 = 0$, имеет место особый случай и, следовательно, устойчивость движения $x = 0$.

Таким образом, всевозможные случаи приводятся к пяти следующим:

(1)	$ak_1 - l_1 \neq 0$	(невозмущенное движение неустойчиво)
(2)	$ak_1 - l_1 = 0,\ l_1 l_2 > 0$	(невозмущенное движение асимптотически устойчиво)
(3)	$ak_1 - l_1 = 0,\ l_1 l_2 < 0$	(невозмущенное движение неустойчиво)
(4)	$ak_1 - l_1 = 0,\ l_2 = 0,\ l_1 \neq 0$	(невозмущенное движение неустойчиво)
(5)	$ak_1 - l_1 = 0,\ l_2 = 0,\ k_2 = 0$ или $l_1 = 0,\ k_1 = 0$	(невозмущенное движение устойчиво; имеет место особый случай)

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = a\,\frac{dx(t-\tau)}{d\tau} + X(x(t),\ x^\cdot(t),\ x(t-\tau),\ x^\cdot(t-\tau)) \tag{5.11}$$

где—X аналитическая функция аргументов, a — постоянная.

Заменой $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = x^\cdot(t)$ система (5.11) приводится к системе (5.1), в которой $X_1 \equiv 0$, $X_2 \equiv X$. Так как наименьшая степень при y в функциях Y° и Z° всегда одинакова в этом случае, приходим к следующему результату

Рассмотрим функцию

$$X\left(\frac{1}{a}\,y,\ 0,\ \frac{1}{a}\,y,\ 0\right) = gy^m + \ldots$$

Если m — нечетное и $g < 0$, то имеет место асимптотическая устойчивость движения. Если m — нечетное и $g > 0$ или m четное, то имеет место неустойчивость невозмущенного движения. И если

$$X\left(\frac{1}{a}\,y, 0, \frac{1}{a}\,y,\ 0\right) \equiv 0$$

то имеет место устойчивость невозмущенного движения (особый случай).

Поступила 21 XII 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. К р а с о в с к и й Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, 1959.
2. Р и с с Ф., С е к е ф а л ь в и - Н а д ь Б. Лекции по функциональному анализу, М.— Л., 1954.
3. Л я п у н о в А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, 1950.
4. Ч е т а е в Н. Г. Устойчивость движения, Гостехиздат, 1955.
5. М а л к и н И. Г. Теория устойчивости движения. Гостехиздат, 1952.
6. К а м е н к о в Г. В. Об устойчивости движения. Сб. тр. Казанского авиац. ин-та, 1939, № 9.
7. B e l l m a n R. On the existence and boundedness of solutions of non-linear differential-difference equations. Ann. of Math. T. 50, 2, 1959.
8. Н а т а н з о н И. П. Теория функций вещественной переменной. Гостехиздат, 1950.
9. К р а с н о с е л ь с к и й М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. Гостехиздат, 1956.
10. Ш и м а н о в С. Н. О неустойчивости движения систем с запаздыванием. ПММ, 1960, т. XXIII, вып. 1.