Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ВОЛНЫ НАПРЯЖЕНИЯ В УПРУГОЙ ПЛИТЕ

К. И. Огурцов

(Ленинград)

Рассмотрение задач о разрушении твердых тел под действием импульсивных динамических нагрузок встречает большие трудности. Еще до начала разрушения процесс оказывается весьма усложненным, так как различные участки тела находятся в различных состояниях взаимосвязи «напряжение-деформация», а положение границ между этими участками меняется с течением времени. С появлением же трещин, которые приводят к новым зависящим от времени граничным условиям, не может быть и речи о каком-то строгом рассмотрении задачи.

Ниже приводится исследование динамических напряжений в среде, подчиняющейся закону Гука. Для материалов, предел упругости и предел прочности которых близки (при динамических нагрузках), подобные исследования могут указать точки, от которых прежде всего начнется развитие трещин на первом этапе разрушения. Если же между пределом упругости и пределом прочности имеется заметный интервал, в котором тело подвержено каким-то неупругим деформациям, то упомянутые исследования могут указать моменты времени и участки тела, в которых появление опасных напряжений можно ожидать с наибольшей вероятностью.

Строгое решение оказывается полезным и для анализа встречающихся в литературе некоторых приближенных теорий; оно показывает, например, что акустическая теория [1, 2] несостоятельна, а квазистатическая [3] ограничена для применений.

Динамические задачи теории упругости в случае полупространства, одного слоя или многослойной среды с плоско-параллельными границами раздела рассматриваются во многих работах. Бóльшая часть этих работ посвящена получению, а также качественному и количественному исследованию формул для составляющих вектора смещений. Переход к напряжениям несколько усложняет решения. Однако это усложнение является несущественным для аналогичных исследований.

1. Введем цилиндрические координаты r, θ, z; предположим, что к границе $z = 0$ плиты в точке $r = 0$, $z = 0$ приложена нормальная единичная сила, изменяющаяся во времени по закону

$$\varepsilon(t) = 0 \quad \text{при } t < 0, \qquad \varepsilon(t) = 1 \quad \text{при } t > 0 \tag{1.1}$$

а граница $z = h$ свободна от напряжений. При этом сначала будут образовываться продольная p и поперечная s прямые волны, характеризующие волновое поле в полупространстве $z \geqslant 0$.

Попадая на границу $z = h$, волна p образует продольную pp и поперечную ps отраженные волны. Волна же s образует соответственно продольную sp и поперечную ss отраженные волны. В последующие моменты времени будет происходить отражение от границы $z = 0$, затем вновь от границы $z = h$ и т. д.

Для краткости и удобства сравнения получаемых результатов с результатами предыдущих работ [1, 2, 4], посвященных объяснению явлений откола, исследуем пока динамические процессы на оси симметрии и ограничимся рассмотрением лишь прямых волн p и s, а также отраженных волн pp, ps, sp и ss.

Заметим, что упомянутые волны изучались Н. В. Зволинским. Однако Н. В. Зволинский оценивал асимптотически поле напряжений лишь в окрестностях фронтов. Такие оценки могут быть в какой-то степени оправданы лишь для точек, располагающихся от источника на расстояниях, значительно превосходящих длину волны. В работе [4] выполнялись количественные исследования для волн такого же типа в слое, лежащем на жидком полупространстве. Но в этой работе так же, как и в работах [1,2], посвященных акустическим задачам, был допущен ряд неточностей, обусловивший неправильные расчеты интенсивностей волновых полей.

Формулы для составляющих вектора смещений, соответствующих различным волнам, сразу же можно выписать, например, согласно справочнику [5], в виде двукратных интегралов. Выполняя дифференцирование под знаком интегралов (законность которого неоднократно обсуждалась в работах Г. И. Петрашеня) и пользуясь формулами Ляме, легко получить выражения для напряжений. Представляя, наконец, эти выражения через однократные интегралы [6] по контуру l, проходящему вдоль мнимой оси в правой полуплоскости комплексной переменной ζ, и полагая $r = 0$, найдем главное напряжение σ_z в следующем виде:

для прямых волн $(p+s)$

$$\sigma_z = \frac{1}{2\pi^2 bi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_l \left\{\frac{g^2}{2\zeta^2 R\,[bt\zeta - z\alpha]} - \frac{2\alpha\beta}{\zeta^2 R\,[bt\,\zeta - z\beta]}\right\} d\zeta \tag{1.2}$$

для отраженных волн $(pp + ps + sp + ss)$

$$\sigma_z = \frac{-1}{2\pi^2 bi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_l \left\{\frac{g^2 T}{2\zeta^2 R^2\,[bt\,\zeta - (2h-z)\,\alpha]} - \frac{4g^2\alpha\beta}{\zeta^2 R^2\,[bt\,\zeta - h\alpha - (h-z)\,\beta]} - \right.$$
$$\left. - \frac{4g^2\alpha\beta}{\zeta^2 R^2\,[bt\,\zeta - h\beta - (h-z)\,\alpha]} + \frac{2\alpha\beta T}{\zeta^2 R^2\,[bt\,\zeta - (2h-z)\,\beta]}\right\} d\zeta \tag{1.3}$$

где

$$\gamma = \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}}, \qquad \alpha = \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}, \qquad \beta = \sqrt{1+\zeta^2}$$
$$g = 2+\zeta^2, \qquad R = g^2 - 4\alpha\beta, \qquad T = g^2 + 4\alpha\beta \tag{1.4}$$

причем b обозначает скорость распространения поперечных волн, a — скорость распространения продольных волн, а σ — коэффициент Пуассона. Как указано в работе [5], ветви радикалов α и β должны фиксироваться условиями

$$\arg\alpha = \arg\beta = 0 \quad \text{при } \zeta > 0 \tag{1.5}$$

2. Введем следующие обозначения

$$\tau = bt/h, \qquad k = z/h \tag{2.1}$$
$$\varphi_1 = \tau\zeta - k\alpha, \qquad \varphi_2 = \tau\zeta - k\beta \tag{2.2}$$
$$\varphi_3 = \tau\zeta - (2-k)\,\alpha, \qquad \varphi_4 = \tau\zeta - \alpha - (1-k)\,\beta \tag{2.3}$$
$$\varphi_5 = \tau\zeta - \beta - (1-k)\,\alpha, \qquad \varphi_6 = \tau\zeta - (2-k)\,\beta \tag{2.4}$$
$$\varkappa_1 = \varepsilon(\tau - k\gamma), \qquad \varkappa_2 = \varepsilon(\tau - k) \tag{2.5}$$
$$\varkappa_3 = \varepsilon\,[\tau - (2-k)\,\gamma], \qquad \varkappa_4 = \varepsilon\,[\tau - (\gamma + 1 - k)] \tag{2.6}$$
$$\varkappa_5 = \varepsilon\,[\tau - 1 - (1-k)\,\gamma], \qquad \varkappa_6 = \varepsilon\,[\tau - (2-k)] \tag{2.7}$$

Вынесем в (1.2) и (1.3) множитель h^{-1} за знак интеграла и выполним интегрирование по теореме о вычетах в точках ζ_ν правой полуплоскости

ζ, являющихся вещественными корнями соответствующих уравнений

$$\varphi_\nu(\zeta) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \tag{2.8}$$

где $\varphi_\nu(\zeta)$ определяются по (2.2) — (2.4).

Учитывая, что

$$\varphi_1'(\zeta_1) = \frac{k}{\zeta_1\sqrt{1+\gamma^2\zeta_1^2}}, \qquad \varphi_2'(\zeta_2) = \frac{k}{\zeta_2\sqrt{1+\zeta_2^2}} \tag{2.9}$$

для прямых волн $(p+s)$ получим

$$\sigma_z = -\frac{1}{\pi h^2 k}\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\varkappa_1\frac{\alpha g^2}{2\zeta R}\Big|_{\zeta=\zeta_1} - \varkappa_2\frac{2\alpha\beta^2}{\zeta R}\Big|_{\zeta=\zeta_2}\right\} \tag{2.10}$$

где

$$\zeta_1 = \frac{k}{\sqrt{\tau^2-k^2\gamma^2}}, \qquad \zeta_2 = \frac{k}{\sqrt{\tau^2-k^2}} \tag{2.11}$$

Используя равенства

$$\varphi_3'(\zeta_3) = \frac{2-k}{\zeta_3\sqrt{1+\gamma^2\zeta_3^2}}, \qquad \varphi_4'(\zeta_4) = \frac{1}{\zeta_4\sqrt{1+\gamma^2\zeta_4^2}} + \frac{1-k}{\zeta_4\sqrt{1+\zeta_4^2}} \tag{2.12}$$

$$\varphi_5'(\zeta_5) = \frac{1-k}{\zeta_5\sqrt{1+\gamma^2\zeta_5^2}} + \frac{1}{\zeta_5\sqrt{1+\zeta_5^2}}, \qquad \varphi_6'(\zeta_6) = \frac{2-k}{\zeta_6\sqrt{1+\zeta_6^2}} \tag{2.13}$$

для отраженных волн $(pp+ps+sp+ss)$ найдем

$$\begin{aligned}\sigma_z = \frac{1}{\pi h^2}\frac{\partial}{\partial\tau}\Bigg\{&\varkappa_3\frac{1}{2-k}\frac{\alpha g^2 T}{2\zeta R^2}\Big|_{\zeta=\zeta_3} - \varkappa_4\frac{4\alpha^2\beta^2 g^2}{[(1-k)\alpha+\beta]\,\zeta R^2}\Big|_{\zeta=\zeta_4} - \\ &- \varkappa_5\frac{4\alpha^2\beta^2 g^2}{[\alpha+(1-k)\,\beta]\,\zeta R^2}\Big|_{\zeta=\zeta_5} + \varkappa_6\frac{1}{2-k}\frac{2\alpha\beta^2 T}{\zeta R^2}\Big|_{\zeta=\zeta_6}\Bigg\}\end{aligned} \tag{2.14}$$

Здесь

$$\zeta_3 = \frac{2-k}{\sqrt{\tau^2-(2-k)^2\gamma^2}} \tag{2.15}$$

$$\zeta_4 = \left(\frac{-k[\gamma^2-(1-k)^2](2-k)+(k^2-2k+2)\,\tau^2+2\,(1-k)\,\tau\sqrt{\tau^2+k\,(1-\gamma^2)(2-k)}}{\tau^4-2\,[\gamma^2+(1-k)^2]\,\tau^2+[\gamma^2-(1-k)^2]^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.16}$$

$$\varphi_5 = \left(\frac{-k\,[1-\gamma^2(1-k)^2]\,(2-k)+(k^2-2k+2)\,\tau^2+2(1-k)\,\tau\sqrt{\tau^2-k\,(1-\gamma^2)\,(2-k)}}{\tau^4-2\,[1+\gamma^2(1-k)^2]\,\tau^2+[1-\gamma^2(1-k)^2]^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.17}$$

$$\zeta_6 = \frac{2-k}{\sqrt{\tau^2-(2-k)^2}} \tag{2.18}$$

Вычисление выражений в фигурных скобках формул (2.10) и (2.14) может быть выполнено так же, как и вычисление смещений [7].

Заметим, что значения ζ_4, ζ_5 практически удобнее находить не по формулам (2.16), (2.17), а непосредственно из уравнений $\varphi_4 = 0$, $\varphi_5 = 0$, табулируя функции $\tau(\zeta_4)$, $\tau(\zeta_5)$.

Для двух других главных напряжений σ_r и σ_θ на оси симметрии аналогично получаем равенства:

в случае прямых волн

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -\frac{1}{\pi h^2 k}\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\varkappa_1\frac{\alpha g\,[(1-2\gamma^2)\,\zeta^2-1]}{2\zeta R}\Big|_{\zeta=\zeta_1} - \varkappa_2\frac{\alpha\beta^2}{\zeta R}\Big|_{\zeta=\zeta_2}\right\} \tag{2.19}$$

в случае отраженных волн

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{1}{\pi h^2}\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\varkappa_3 \frac{1}{2-k}\frac{g\alpha\left[(1-2\gamma^2)\zeta^2-1\right]T}{2\zeta R^2}\Bigg|_{\zeta=\zeta_3} + \varkappa_4 \frac{2g^2\alpha^2\beta^2}{[(1-k)\alpha+\beta]\zeta R^2}\Bigg|_{\zeta=\zeta_4} - \right.$$

$$\left. - \varkappa_5 \frac{4g\alpha^2\beta^2\left[(1-2\gamma^2)\zeta^2-1\right]}{[\alpha+(1-k)\beta]\zeta R^2}\Bigg|_{\zeta=\zeta_5} - \varkappa_6 \frac{1}{2-k}\frac{\alpha\beta^2 T}{\zeta R^2}\Bigg|_{\zeta=\zeta_6}\right\} \qquad (2.20)$$

3. Исследуем теперь напряжения (2.10), (2.14) и сравним их с соответствующими напряжениями, вытекающими из акустической теории. Точное выражение последних легко получается из формул (2.10), (2.14), если в них отбросить все слагаемые, кроме первого, сделать предельный переход $b \to 0$ и учесть, что производная от $\varkappa_1$ и $\varkappa_3$ (в обобщенном смысле) представляет собой δ-функцию Дирака. Оно имеет следующий вид: для прямых волн

$$\sigma_z = -\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{h^2k^2}\,\varepsilon\left(t-\frac{hk}{a}\right) + \frac{1}{ahk}\,\delta\left(t-\frac{hk}{a}\right)\right\} \qquad (3.1)$$

для волн отраженных

$$\sigma_z = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{h^2(2-k)^2}\,\varepsilon\left(t-\frac{h(2-k)}{a}\right) + \frac{1}{ah(2-k)}\,\delta\left(t-\frac{h(2-k)}{a}\right)\right\} \qquad (3.2)$$

где согласно обозначениям (2.1)

$$hk = z, \qquad h(2-k) = 2h - z$$

Заметим, что в этих формулах исправлены допущенные в работах [1,2] неточности.

Для удобства сравнения выполним в (2.10) и (2.14) дифференцирование. При этом учтем, что

$$\frac{\partial\zeta_\nu}{\partial\tau} = -\frac{\zeta_\nu}{\varphi'(\zeta_\nu)} \qquad (3.3)$$

Тогда, принимая во внимание (2.9), (2.12), (2.13), а также учитывая, что ζ_ν на фронте ν-й волны обращается в бесконечность, можно формулы (2.10), (2.14) переписать в виде

$$\sigma_z = -\frac{1}{\pi h^2 k}\left\{\frac{h}{2a}\,\delta\left(t-\frac{hk}{a}\right) - \varkappa_1\left[\frac{\zeta^2\alpha}{k}\left(\frac{\alpha g^2}{2\zeta R}\right)'\right]_{\zeta=\zeta_1} + \varkappa_2\left[\frac{\zeta^2\beta}{k}\left(\frac{2\alpha\beta^2}{\zeta R}\right)'\right]_{\zeta=\zeta_2}\right\} \qquad (3.4)$$

$$\sigma_z = \frac{1}{\pi h^2}\left\{\frac{h}{2a(2-k)}\,\delta\left(t-\frac{h(2-k)}{a}\right) - \varkappa_3\left[\frac{\zeta^2\alpha}{(2-k)^2}\left(\frac{\alpha g^2 T}{2\zeta R^2}\right)'\right]_{\zeta=\zeta_3} + \right.$$

$$+ \varkappa_4\left[\frac{\zeta^2\alpha\beta}{(1-k)\alpha+\beta}\left(\frac{4\alpha^2\beta^2 g^2}{[(1-k)\alpha+\beta]\zeta R^2}\right)\right]'_{\zeta=\zeta_4} + \qquad (3.5)$$

$$\left. + \varkappa_5\left[\frac{\zeta^2\alpha\beta}{(1-k)\beta+\alpha}\left(\frac{4\alpha^2\beta^2 g^2}{[(1-k\beta)+\alpha]\zeta R^2}\right)'\right]_{\zeta=\zeta_5} - \varkappa_6\left[\frac{\zeta^2\beta}{(2-k)^2}\left(\frac{2\alpha\beta^2 T}{\zeta R^2}\right)_{\zeta=\zeta_6}\right]\right\}$$

Нетрудно убедиться, что лишь слагаемые, содержащие δ-функцию Дирака, на фронтах волн p и pp у сравниваемых формул совпадают. После же прохождения упомянутых фронтов (3.1) и (3.2) сохраняют постоянное значение, в то время как (3.4) и (3.5) оказываются переменными функциями времени, причем (3.4) имеет разрыв типа конечного скачка в момент прохождения поперечной волны s, а (3.5) — в моменты прохождения обменных ps, sp и поперечной s волн. Величина упомянутых конечных скачков на фронтах поперечных и обменных волн, а также величины напряжений сразу же позади фронтов продольных волн легко определяются по (3.4), (3.5) предельным переходом $\zeta_\nu \to \infty$.

Остановимся несколько подробнее на рассмотрении прямых волн. Производя предельные переходы в формуле (3.4) и принимая во внимание подробные расчеты поля смещений, выполненные в работе [7], можно представить схематически изменение напряжения σ_z на оси симметрии следующим образом. После прохождения фронта волны p (с особенностью типа δ-функции Дирака) напряжение σ_z сразу же оказывается в $1+8\gamma^3$ раза больше акустического приближения (3.1). Затем с течением времени напряжение монотонно возрастает примерно по параболическому закону и к моменту вступления поперечной волны s достигает значения, в несколько раз большего первоначальной величины. В момент прохождения фронта поперечной волны s напряжение σ_z падает скачком на 8γ значений (3.1), а затем изменяется плавно. Вскоре оно становится близким к статическому напряжению, равному утроенному значению (3.1).

Акустическое приближение можно рассматривать как частный случай динамической теории упругости, поэтому его применение к твердым телам уже на основании проведенных вычислений нужно считать недопустимым.

В дальнейшем все же используются напряжения в акустическом приближении для того, чтобы на простых примерах яснее представить качественную картину ряда явлений, которые имеют место в твердах телах, но описываются более сложными формулами. Вычисления по этим формулам не представляют большого труда и в случае надобности могут быть выполнены с любой степенью точности.

4. Чтобы довести исследования волновых полей до практических приложений, необходимо еще сделать переход от решения $\sigma_z(t)$, полученного при воздействии (1.1), к решению $\sigma_z^*(t)$, соответствующему «произвольному» физически реальному воздействию $P(t)$, включаемому в момент $t=0$. Такой переход, как известно, можно произвести по формуле

$$\sigma_z^*(t) = \int_0^t \sigma_z(u)\, P'(t-u)\, du \tag{4.1}$$

Следует иметь в виду, что в зависимости от соотношений длительности воздействия T, момента t_0 вступления фронта продольной волны и времени t интеграл (4.1) вычисляется по-разному. В случае $t > t_0 + T$ необходимо в (4.1) нижний предел заменить на $t-T$, так как при $u > t$ и $u < t-T$ справедливо равенство $P'(t-u)=0$. В случае же $< t_0 + T$ величина интеграла (4.1) представляется в виде двух слагаемых. Первое слагаемое соответствует интегрированию по отрезку t_0+0, t, поскольку $\sigma_z(u)=0$ при $u<t_0$. При этом символ t_0+0 указывает, что из промежутка интегрирования исключается точка $t=t_0$, в которой имеется особенность. Второе же слагаемое равно интегралу от выражения, содержащего множителем функцию Дирака $\delta(u-t_0)$. Если $\sigma_z(u)$ имеет первообразную $\sigma_z^\circ(u)$, равную нулю при $u<t_0$, то второе слагае-

мое будет равно $\sigma_z^\circ(t_0)P'(t-t_0)$. Отсюда вытекает, что решение (4.1) должно содержать те же особенности, что и производная от функции источника $P(t)$. Чтобы получить физически реальные непрерывные значения $\sigma_z^*(t)$ (не имеющие даже разрывов типа конечного скачка), необходимо требовать непрерывности не только функции $P(t)$, но и ее производной $P'(t)$. Такое ограничение на функцию $P(t)$, определяемую, как правило, из опыта, вполне допустимо. Даже при сколь угодно резких воздействиях само давление и изменение скорости давления можно считать протекающими непрерывно в течение каких-то, иногда даже незамечаемых экспериментатором, участков времени. Предположения о строго сосредоточенных и мгновенных (скачкообразных) изменениях воздействий $P(t)$ (а иногда и их производных) при теоретическом рассмотрении практических задач допустимы в математических абстракциях как промежуточный этап.

При решении сложных задач динамической теории упругости пользоваться формулой (4.1) неудобно, так как в $\sigma_z(u)$, например, в (3.4), 3.5), входят производные от довольно громоздких выражений. Первообразные же $\sigma_z^\circ(u)$, которые фигурируют в решениях под знаками дифференцирования (2.10), (2.14), отличаются весьма простыми множителями от соответствующих решений задач в смещениях. С ними проще обращаться не только потому, что их легче вычислять, но и потому, что попутно могут быть использованы результаты расчетов, проводимых для смещений.

Считая для простоты $P'(0)=P'(T)=0$, выполним в (4.1) интегрирование по частям. В результате получим удобную для численного интегрирования формулу, которая отличается от (4.1) тем, что у нее в подынтегральное выражение вместо $\sigma_z(u)$ входит первообразная $\sigma_z^\circ(u)$, а вместо $P'(t-u)$ — вторая производная $P''(t-u)$.

Таким образом, в случае $t<t_0+T$ напряжение представляется следующих двух видах:

$$\sigma_z^*(t)=\begin{cases}\displaystyle\int\limits_{t_0+0}^{t}\sigma_z^\circ(u)P'(t-u)\,du+\sigma^\circ_z(t_0)P'(t-t_0)\\ \displaystyle\int\limits_{t_0+0}^{t}\sigma_z^\circ(u)P''(t-u)\,du\end{cases}\tag{4.2}$$

В случае же $t>t_0+T$, нижний предел интегрирования в (4.2) автоматически заменяется на $t-T$, а слагаемое $\sigma_z^\circ(t_0)P'(t-t_0)$ обращается в нуль, поскольку функция P и ее производные равны нулю, если $t-u>T$ и $t-t_0>T$. При решении же акустической задачи находим по (3.2) и (4.1) для прямых волн

$$\sigma_z^*(t)=-\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{z^2}P\left(t-\frac{z}{a}\right)+\frac{1}{az}P'\left(t-\frac{z}{a}\right)\right\}\tag{4.3}$$

Формула для отраженных волн отличается от (4.3) знаком и наличием параметра $2h-z$ вместо z.

5. Возьмем в качестве примера непрерывное воздействие $P(t)$ длительности $c+d$ в виде ломаной линии

$$P(t)=\begin{cases} 0 & (t\leqslant 0)\\ \frac{t}{c} & (0\leqslant t\leqslant c)\\ \left(1+\frac{c}{d}\right)-\frac{t}{d} & (c\leqslant t\leqslant c+d)\\ 0 & (t\geqslant c+d)\end{cases} \tag{5.1}$$

Когда c во много раз меньше d, эту линию можно считать в основных чертах соответствующей кривым давлений $P(t)$, замеряемых при ударах и взрывах. Конечно, функция (5.1) не может быть причислена к физически реальному воздействию, так как она имеет конечные разрывы производных при $t=0$, $t=c$ и $t=c+d$. Это приведет к тому, что соответствующее поле напряжений будет иметь разрывы типа конечного скачка. Но если условиться немного сглаживать углы линии (5.1), то мы не допустим большой ошибки, если оставим прежнее поле напряжений, заменив лишь в нем упомянутые скачки непрерывной быстроизменяющейся монотонной кривой, близкой к скачку.

Форма воздействия (5.1) удобна еще и по следующим причинам. Во-первых, предельным переходом $c\to 0$ можно получить решение при воздействии с мгновенным нарастанием давления, принятым в работах [1,2,4], и сравнить наше решение с решениями, полученными в указанных работах. Во-вторых, при таком воздействии интеграл (4.1) берется в конечном виде, так как в подынтегральном выражении $P'(t-u)$ принимает лишь постоянные величины, а у $\sigma_z(u)$ всегда известна первообразная $\sigma_z^\circ(u)$, как правило, более простая, чем само $\sigma_z(u)$.

Действительно, по (5.1) получаем

$$P'(t)=\begin{cases} 0 & (t<0)\\ \frac{1}{c}\,\varepsilon(t) & (0<t<c)\\ -\frac{1}{d}\,\varepsilon(t-c) & (<c<c+d)\\ 0 & (t>c+d)\end{cases} \tag{5.2}$$

где ε обозначает функцию (1.1). Заменяя в (5.2) t на $t-u$, подставляя затем (5.2) в (4.1), где под $\sigma_z(u)$ подразумевается $\partial\sigma_z^\circ/\partial u$, и учитывая, что на нижнем пределе при $u<t_0$, где t_0 момент вступления фронта, первообразная равна нулю, находим основные расчетные формулы

$$\sigma_z(t)=\begin{cases} 0 & (t<t_0)\\ \frac{1}{c}\,\sigma_z^\circ(t) & (t_0<t<t_0+c)\\ \frac{1}{c}\,\sigma_z^\circ(t)-\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\sigma_z^\circ(t-c) & (t_0+c<t<t_0+c+d)\\ \frac{1}{c}\,\sigma_z^\circ(t)-\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\sigma_z^\circ(t-c)+\frac{1}{d}\,\sigma_z^\circ(t-c-d) & (t_0+c+d<t)\end{cases} \tag{5.3}$$

По этим общим формулам или, проще, подстановкой (5.1) и (5.2) в (4.3) находим для прямых волн в акустическом приближении

$$\sigma_z^*(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{1}{z^2}\dfrac{1}{c}\left(t-\dfrac{z}{a}\right)+\dfrac{1}{za}\dfrac{1}{c}\right] & \left(\dfrac{z}{a}<t<\dfrac{z}{a}+c\right) \\ -\dfrac{1}{2\pi}\left\{\dfrac{1}{z^2}\left[1+\dfrac{c}{d}-\dfrac{1}{d}\left(t-\dfrac{z}{a}\right)\right]-\dfrac{1}{za}\dfrac{1}{d}\right\} & \left(\dfrac{z}{a}+c<t<\dfrac{z}{a}+c+d\right) \end{cases} \tag{5.4}$$

Складывая (5.4) с подобной же формулой для отраженных волн, легко рассчитать суммарное поле напряжений в любой точке как функцию времени t.

Из (5.4) видно, что в голове фронта волны имеют место лишь сжимающие напряжения, принимающие максимальное значение при $t = z/a + c$. После отражения от границы $z = h$ образуются подобные же растягивающие напряжения. При малых c эти напряжения весьма велики, а при $c = 0$ они содержат особенность типа δ-функции Дирака.

Заметим, что в работах [1, 2, 4] часть волнового поля, переходящая при $c \to 0$ в δ-функцию Дирака, не учитывается. Максимальные растягивающие напряжения, рассчитанные по формуле (5.4), оказываются в хвосте фронта. Однако в зависимости от выбора $P(t)$ они могут отсутствовать или оказаться где-то в середине фронта.

Для твердых сред на оси симметрии нетрудно было бы вычислить напряжения по формулам (5.3), (2.10). При этом выделилось бы слагаемое, содержащее производную $P'(t - z/a)$, такое же как и в (4.3). Оставшаяся же часть волнового поля совпадала бы по знаку, но не совпадала бы по своей (зависящей от z) форме с первым слагаемым (4.3). По интенсивности же она по крайней мере в 2—3 раза была бы больше этого слагаемого. Напряжения в твердом теле имеют лишь некоторое качественное сходство с напряжениями в акустическом приближении.

Нет основания сомневаться, что растягивающие напряжения в отраженной волне играют основную роль при образовании тыльного откола. Образование же лицевого откола невозможно исследовать без знания точного вида функции $P(t)$ и без учета поверхностных и поперечных волн в стороне от оси z, где они согласно [7] более интенсивны, чем на оси z.

6. При рассмотрении вопросов разрушений, производимых динамическими нагрузками, пытаются иногда привлекать [3] так называемое квазистатическое решение, представляющее собой произведение статического решения на функцию воздействия $P(t)$. Такой подход к задаче, очевидно, вполне оправдывается, если $P(t)$ плавно изменяется в течение достаточно длительного времени T. Тогда в каждый момент $t = t^*$ поле напряжений в среде будет приближенно равно тому статическому состоянию, которое имело бы место при постоянной нагрузке $P(t^*)$. В случае же резко изменяющихся $P(t)$ возможность использования квазистатического решения в каждом конкретном случае может быть обоснована или отвергнута лишь после вычисления напряжений по строгой динамической теории упругости для данных воздействий, граничных условий и расстояний от источника колебаний.

Рассмотрим сначала частный случай среды, когда модуль сдвига μ близок к нулю, и исследуем лишь поле напряжений прямых волн. При $\mu \to 0$ оно, как упоминалось, совпадает с акустическим решением (4.3).

В акустическое решение условная «квазистатическая» часть волнового поля входит явно в виде первого слагаемого формулы (4.3). Оно распространяется со скоростью a и изменяется с расстоянием как z^{-2}. Насколько второе слагаемое в (4.3) мало по сравнению с первым, можно судить из отношения

$$\frac{1}{a} P'\left(t - \frac{z}{a}\right) \Big/ \frac{1}{z} P\left(t - \frac{z}{a}\right)$$

Очевидно, что это отношение для любых t оказывается сколь угодно малым при достаточно малом z и непрерывном $P'(t)/P(t)$.

В случае твердой среды (при $\mu \neq 0$) формулы напряжений содержат в явном виде часть волнового поля, равную второму слагаемому в (4.3). Квазистатическое же решение в явном виде не входит в формулы поля напряжений в полупространстве. Для точного сравнения с квазистатическим решением следует вычислять это поле для заданных $P(t)$.

При грубой же оценке на основании выполненных выше исследований напряжений и приведенных в работе [7] графиков смещений достаточно считать его равным удвоенному полю на оси симметрии в безграничной среде [8].

Заметим, что изложенные в настоящей работе исследования для свободного слоя также легко выполняются для многослойных сред. В частном случае таких сред, когда один слой граничит с жидким или твердым полупространством, остаются справедливыми все выведенные выше формулы, если в слагаемые выражений (2.14), (2.19), заключенные в фигурные скобки, ввести согласно справочнику [5] дополнительные множители, содержащие коэффициенты отражения от границы раздела.

Заметим, кроме того, что при введении функций $\varphi_\nu(\zeta) - \frac{1}{nh}$ вместо функций вида (2.2) — (2.4) эти формулы будут соответствовать зависящему от n колоколсобразнвму распределению воздействия по границе [6].

В заключение выражаю глубокую благодарность Г. И. Петрашеню за ряд ценных советов и указаний, способствовавших улучшению работы.

Поступила 1 IV 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Ленский В. С. Акустический вариант теории откола. ПММ, 1956, т. XX, вып. 4.
2. Гусейн-заде М. И. Об акустической теории откола. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 4.
3. Балаенко Ф. А. Исследование полей напряжений и процесса образования трещин при взрыве колонковых зарядов в скальных породах. В сб. «Вопросы теории разрушения горных пород действием взрыва». Изд-во АН СССР, 1958.
4. Гусейн-заде М. И., Кузин П. А. Действие импульсивной нагрузки на упругий слой, лежащий на жидком упругом полупространстве. Изв. АН СССР, ОТН, серия «Механика и машиностроение», 1959, № 1.
5. Петрашень Г. И. Методика построения решений задач на распространение сейсмических волн в изотропных средах, содержащих плоско-параллельные слои (Справочник). «Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн». Сб. 1, Гостоптехиздат (Ленинград. отд.), 1957.
6. Огурцов К. И., Петрашень Г. И. Динамические задачи для упругого полупространства в случае осевой симметрии. Уч. зап. ЛГУ, 1951, № 149, вып. 24.
7. Огурцов К. И. Количественные исследования волновых процессов в упругом полупространстве при различных типах воздействий. Уч. Зап.ЛГУ, 1956, № 208, вып. 30.
8. Ляв А. Математическая теория упругости. М.—Л., ОНТИ, 1935.