

КРУЧЕНИЕ АНИЗОТРОПНОГО КРИВОГО БРУСА

С. Г. Лехницкий

(Ленинград)

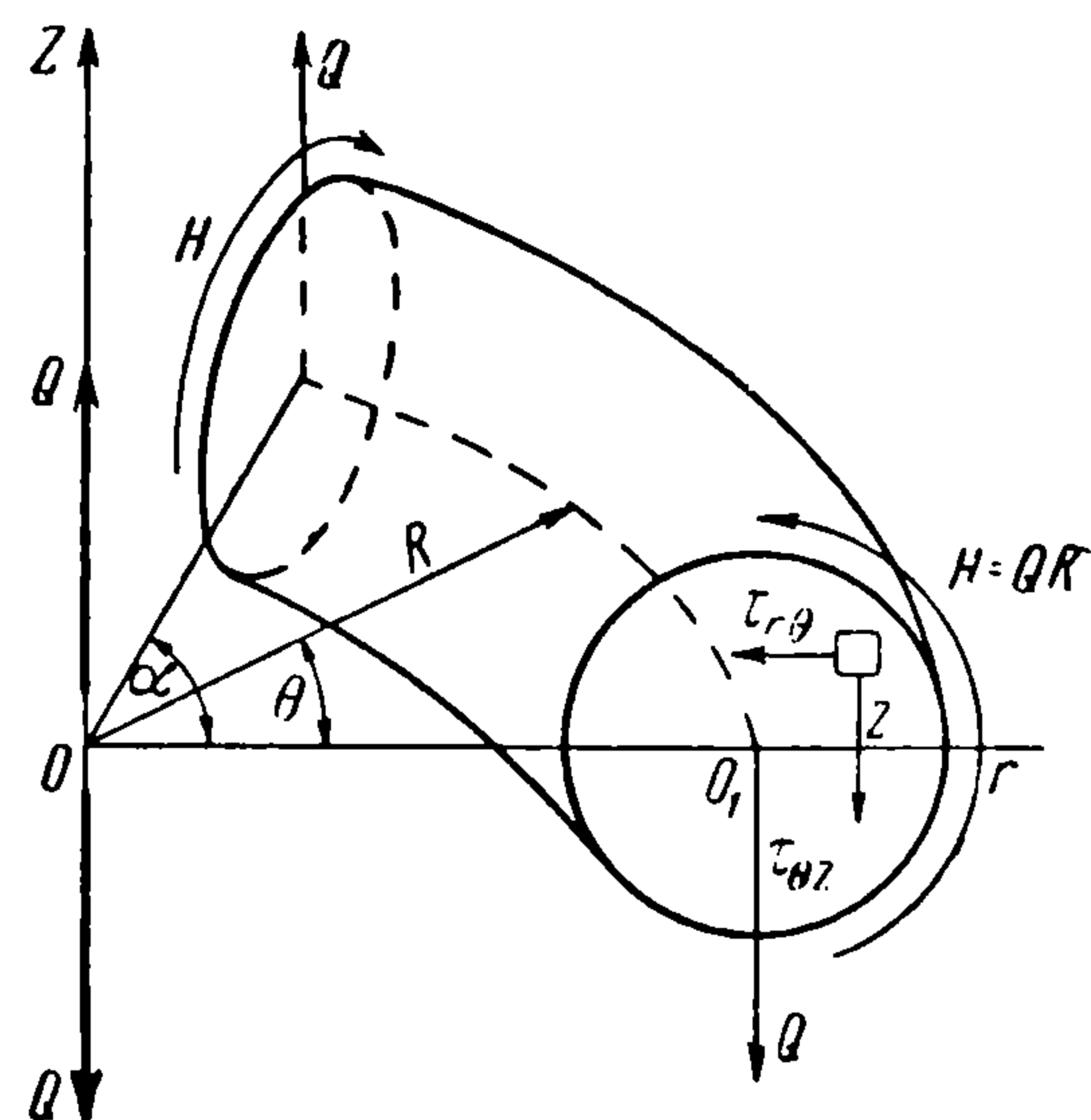
Строгая теория кручения кривого бруса в виде части кругового кольца, аналогичная теории Сен-Венана для призматического стержня, была впервые разработана Мичелом [1], который рассмотрел не только изотропный, но также и брус, обладающий цилиндрической анизотропией и притом ортотропный. Впоследствии задача о кручении рассматривалась еще рядом авторов — Генером [2], Лангхаром [3], Соляником — Красса [4], Рабиновичем [5] и др. (для изотропного бруса) и Чаттарджи [6] (для трансверсально-изотропного бруса), которые получили и исследовали (приближенно и точно) решения для некоторых частных случаев поперечных сечений.

Цель настоящей заметки — показать, что строгая теория кручения может быть обобщена на случай бруса, обладающего значительно более сложной анизотропией, характеризующейся только тем, что плоскость любого поперечного (радиального) сечения является плоскостью упругой симметрии, а в остальном произвольной.

1. Постановка задачи и общие уравнения. Рассмотрим кривой брус произвольного поперечного сечения в виде части кругового кольца; радиус осевой линии обозначим через R и угол между крайними сечениями через α . Пусть по торцам распределены усилия, приводящиеся к силам Q и скручивающим моментам $H = QR$, или, что то же, к двум равным и противоположно направленным силам Q на оси вращения z (фигура). Предположим, что брус обладает криволинейной анизотропией, при которой каждая плоскость поперечного сечения (т. е. радиальная) является плоскостью упругой симметрии, следует обобщенному закону Гука и испытывает малые деформации.

Если принять ось вращения за ось z и отнести брус к цилиндрической системе координат r, θ, z , показанной на фигуре, то уравнения обобщенного закона Гука запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= a_{11} \sigma_r + a_{12} \sigma_\theta + a_{13} \sigma_z + a_{15} \tau_{rz} \\ \varepsilon_\theta &= a_{12} \sigma_r + a_{22} \sigma_\theta + a_{23} \sigma_z + a_{25} \tau_{rz} \\ \varepsilon_z &= a_{13} \sigma_r + a_{23} \sigma_\theta + a_{33} \sigma_z + a_{35} \tau_{rz} \\ \gamma_{rz} &= a_{15} \sigma_r + a_{25} \sigma_\theta + a_{35} \sigma_z + a_{55} \tau_{rz} \\ \gamma_{\theta z} &= a_{44} \tau_{\theta z} + a_{46} \tau_{r\theta} \\ \gamma_{r\theta} &= a_{46} \tau_{\theta z} + a_{66} \tau_{r\theta} \end{aligned} \quad (1.1)$$



В общем случае коэффициенты деформации a_{ik} , число которых равно 13, могут быть переменными величинами — функциями всех трех координат. Примем лишь одно ограничение: будем считать, что 3 коэффициента a_{44}, a_{46}, a_{66} не зависят от θ , а остальные 10 совершенно произвольны.

Присоединив сюда три уравнения равновесия сплошной среды, получим девять уравнений для определения шести составляющих напряжения и трех проекций перемещения u , v , w на координатные направления r , θ , z .

Предположим, что в данном бруске, так же как в изотропном,

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{rz} = 0 \quad (1.2)$$

а следовательно, $\tau_{\theta z}$, $\tau_{z\theta}$ не зависят от θ . Тогда уравнения (1.1) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} + u = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} = a_{44} \tau_{\theta z} + a_{46} \tau_{r\theta}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = a_{46} \tau_{\theta z} + a_{66} \tau_{r\theta}$$

Интегрируя первые три уравнения, выражаем перемещения через три произвольные функции:

$$u = U(\theta, z), \quad v = V(r, z) - \int U d\theta, \quad w = W(r, \theta) \quad (1.4)$$

Требую, чтобы u , v , w удовлетворяли остальным уравнениям (1.3), определяем вид U , W и находим зависимости между V и напряжениями.

Окончательные формулы и уравнения будут иметь вид

$$u = u' \quad v = v_1(r, z) - \vartheta Rz + v', \quad w = \vartheta R^2 \theta + w', \quad v_1 = V + \vartheta Rz \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (r^2 \tau_{\theta z}) = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{v_1}{r} = \frac{1}{r} (a_{44} \tau_{\theta z} + a_{46} \tau_{r\theta}) + \vartheta \left(\frac{R}{r} - \frac{R^2}{r^2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial r} \frac{v_1}{r} = \frac{1}{r} (a_{46} \tau_{\theta z} + a_{66} \tau_{r\theta}) - \frac{\vartheta Rz}{r^2}$$

Здесь u' , v' , w' — «жесткие» смещения:

$$\begin{aligned} u' &= z(\omega_2 \cos \theta - \omega_1 \sin \theta) + a \cos \theta + b \sin \theta \\ v' &= -z(\omega_2 \sin \theta + \omega_1 \cos \theta) - a \sin \theta + b \cos \theta + \omega_3 r \\ w' &= -r(\omega_2 \cos \theta - \omega_1 \sin \theta) + c \end{aligned} \quad (1.7)$$

Постоянные ϑ , ω_i , a , b , c подлежат определению.

На боковой поверхности напряжения должны удовлетворять условию:

$$\tau_{r\theta} \cos(n, r) + \tau_{\theta z} \cos(n, z) = 0 \quad (1.8)$$

На торцах и в любом поперечном сечении должны быть выполнены условия равновесия:

$$\begin{aligned} \iint \tau_{r\theta} dr dz = 0, \quad \iint \tau_{\theta z} dz dz = Q \\ \iint [\tau_{r\theta} z - \tau_{\theta z} (r - R)] dr dz = H = QR \end{aligned} \quad (1.9)$$

(интегралы берутся по площади поперечного сечения).

Как видно из формул (1.5) — (1.7), перемещения не содержат модулей упругости в явном виде, т. е. по форме не отличаются от перемещений изотропного бруса [5]. Влияние анизотропии рассматриваемого типа проявляется в том, что функция v_1 определится из более сложных уравнений (1.6) и постоянная ϑ будет иной.

2. Определение функции напряжений, постоянной ϑ и перемещений. Дальнейший ход решения задачи такой же, как и в случае изотропного бруса (см., напр., [5]). Вводим функцию напряжений $F(r, z)$, полагая

$$\tau_{0z} = \frac{R^2}{r^2} \frac{\partial F}{\partial r}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{R^2}{r^2} \frac{\partial F}{\partial z} \quad (2.1)$$

Исключая v_1 из (1.7), получаем для F уравнение

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r^3} \left(a_{44} \frac{\partial F}{\partial r} - a_{46} \frac{\partial F}{\partial z} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{r^3} \left(a_{46} \frac{\partial F}{\partial r} - a_{66} \frac{\partial F}{\partial z} \right) \right] = -\frac{2\vartheta}{r^3} \quad (2.2)$$

Задача сводится к определению в области поперечного сечения функции F , удовлетворяющей уравнению (2.2) и принимающей на контуре области постоянное значение. Функция F определится с точностью до постоянного множителя ϑ , который найдется из уравнений равновесия (1.9).

В случае односвязной области поперечного сечения можно на контуре принять $F = 0$; все уравнения (1.9) сведутся к одному

$$2R^3 \iint \frac{F}{r^3} dr dz = H \quad (2.3)$$

Для того чтобы определить шесть произвольных постоянных ω_i , a , b , c , необходимо дополнительно сформулировать условия закрепления концов. Рассмотрим один из возможных вариантов, соответствующий закреплению конца. Будем считать правый конец бруса закрепленным и притом так, что центр тяжести торца и исходящие из него линейный элемент, направленный по оси бруса, и плоский элемент в плоскости $r\theta$ остаются неподвижными. Имеем:

$$u = v = w = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} r = R \\ \theta = z = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Получаем выражения для перемещений:

$$u = \vartheta Rz \sin \theta, \quad v = v_1(r, z) - v_1(R, 0) \frac{r}{R} - \vartheta Rz (1 - \cos \theta) \quad (2.5)$$

$$w = \vartheta R (R\theta - r \sin \theta)$$

Компонент вращения вокруг оси, касательной к оси бруса $r = R$, равен

$$\omega_\theta = \vartheta R \sin \theta \quad (2.6)$$

Из уравнения (2.3) получим

$$\vartheta = \frac{H}{C}, \quad C = \frac{2R^3}{\vartheta} \iint \frac{F}{r^3} dr dz \quad (2.7)$$

Прогиб левого конца равен

$$f = \frac{HR^2}{C} (\alpha - \sin \alpha) \quad (2.8)$$

При возрастании R выражения (2.5) стремятся к выражениям для перемещений в скручиваемом прямом брус. А. Л. Рабиновичем предложены, по аналогии с прямым брусом, наименования для величин ϑ и C : «погонный угол закручивания» и «жесткость на кручение» [5].

3. Однородный брус, обладающий цилиндрической анизотропией.

У однородного бруса, обладающего цилиндрической анизотропией, с осью анизотропии, направленной по оси вращения, все коэффициенты a_{ik} из уравнений (1.1) постоянны. Введем переменные

$$\rho = r, \quad \zeta = \frac{z + mr}{\sqrt{n^2 - m^2}} \quad \left(m = \frac{a_{46}}{a_{44}}, \quad n = \sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}} = \sqrt{\frac{G_{\theta z}}{G_{r\theta}}} \right) \quad (3.1)$$

Здесь $G_{\theta z}$, $G_{r\theta}$ — модули сдвига, характеризующие изменения углов между направлениями θ , z в плоскостях, параллельных оси z , и направлениями r , θ в плоскостях, нормальных к оси, вызванные соответственно напряжениями $\tau_{\theta z}$ и $\tau_{r\theta}$. Тогда (2.2) перейдет в уравнение для изотропного бруса с модулем сдвига $G_{\theta z}$ и «погонным углом закручивания» ϑ

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} - \frac{3}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} = -2\vartheta G_{\theta z} \quad (3.2)$$

Задача сводится к задаче о кручении изотропного бруса того же радиуса R с областью поперечного сечения, полученной из данной путем аффинного преобразования (3.1), так как на контуре преобразованной области (односвязной) также должно быть $F = 0$.

Определив напряжения в точке ρ , ζ изотропного бруса (с точностью до множителя $\vartheta G_{\theta z}$), мы можем найти напряжения $\tau_{\theta z}$, $\tau_{r\theta}$ в соответствующей точке анизотропного бруса по формулам:

$$\tau_{\theta z} = \tau_{\theta \zeta} - \frac{m}{\sqrt{n^2 - m^2}} \tau_{\rho \theta}, \quad \tau_{r\theta} = \frac{1}{\sqrt{n^2 - m^2}} \tau_{\rho \theta} \quad (3.3)$$

Для определения ϑ , соответствующего заданному моменту H , послужит формула (2.7); при этом жесткость анизотропного бруса связана, на основании (2.7) и (3.1), с жесткостью C_0 вспомогательного изотропного бруса простой зависимостью

$$C = \sqrt{n^2 - m^2} C_0 \quad (3.4)$$

В случае ортотропного материала $a_{46} = m = 0$.

В тех случаях, когда для изотропного бруса имеются достаточно полные численные данные, формулы (3.3) и (3.4) дают возможность использовать их и тем самым избежать громоздких выкладок и вычислений.

Рассмотрим в виде примера ортотропный брус прямоугольного сечения. Обозначим через R , b , h его радиус, основание сечения и высоту и через R , b_1 , h_1 — те же величины для вспомогательного изотропного бруса. В работе [5] имеются все необходимые формулы и таблицы численных значений для изотропного бруса прямоугольного сечения. Жесткость и напряжение на середине стороны h_1 сечения, ближайшей к оси z , определяются по формулам

$$C_0 = G_{\theta z} b_1 h_1^3 k \left(\frac{2R}{b_1}, \frac{b_1}{h_1} \right), \quad (\tau_{\theta \zeta})_0 = G_{\theta z} \vartheta h_1 k_1 \left(\frac{2R}{b_1}, \frac{b_1}{h_1} \right) \quad (3.5)$$

Значения коэффициентов k , k_1 для ряда отношений $2R/b_1$, b_1/h_1 имеются в табл. 1 и 2 работы [5], которые используются здесь. Для

подсчета жесткости и напряжений в ортотропном брус, у которого

$$\frac{b}{h} = \alpha, \quad \frac{G_{\theta z}}{G_{r\theta}} = n^2 \quad (3.6)$$

нужно взять изотропный брус того же радиуса R со сторонами $b_1 = b$, $h_1 = h/n$, $b_1/h_1 = n\alpha$. На основании (3.3), (3.4) и (3.5) получим

$$C = G_{\theta z} h^4 \frac{\alpha}{n^2} k\left(\frac{2R}{b}, n\alpha\right), \quad (\tau_{\theta z})_0 = \frac{H}{h^3} \frac{n}{\alpha} \frac{k_1\left(\frac{2R}{b}, n\alpha\right)}{k\left(\frac{2R}{b}, n\alpha\right)} \quad (3.7)$$

Примем для определенности $2R/b = 3$, $\alpha = 3$ и приведем формулы для двух случаев соотношения между модулями сдвига.

Первый случай. $G_{\theta z} = 4G_{r\theta}$ ($G_{\theta z} > G_{r\theta}$), $n = 2$

$$C = G_{\theta z} h^4 0.75 k(3,6), \quad (\tau_{\theta z})_0 = \frac{H}{h^3} \frac{2k_1(3,6)}{3k(3,6)} \quad (3.8)$$

В таблицах работы [5] не указаны значения $k(3,6)$ и $k_1(3,6)$. Их можно найти приближенно по табличным данным путем линейной интерполяции; получим $k(3,6) = 0.355$, $k_1(3,6) = 1.53$

$$C = G_{\theta z} h^4 0.266, \quad (\tau_{\theta z})_0 = \frac{H}{h^3} 2.87 \quad (3.9)$$

Второй случай $G_{\theta z} = 0.25 G_{r\theta}$ ($G_{\theta z} < G_{r\theta}$), $n = 0.5$

$$C = G_{\theta z} h^4 12 k(3,1.5) = G_{\theta z} h^4 2.544, \quad (\tau_{\theta z})_0 = \frac{H}{h^3} 0.969 \quad (3.10)$$

Для изотропного бруса с отношениями $2R/b = 3$, $\alpha = 3$, имеем

$$C = G_{\theta z} h^4 0.912, \quad (\tau_{\theta z})_0 = \frac{H}{h^3} 1.556 \quad (3.11)$$

Сопоставляя все эти числа (а также результаты вычислений для других размеров, которых мы не приводим), можно заметить, что при данном $G_{\theta z}$ жесткость убывает с возрастанием отношения модулей сдвига и возрастает при его уменьшении. Что касается напряжения $(\tau_{\theta z})_0$, то здесь наблюдается обратная картина: при заданном скручивающем моменте напряжение тем больше, чем больше отношение модулей $G_{\theta z} : G_{r\theta}$. Случай изотропного бруса, как видно из (3.9) — (3.11), занимает по отношению к случаям 1 и 2 промежуточное положение, как и следовало ожидать.

Поступила 23 II 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. M i c h e l l J. H. The uniform torsion and flexure of incomplete tores with application to helical springs. Proc. of London Mathem. Society, 1900, 31, p. p. 130—146.
2. G ö h n e r O. Schubspannungsverteilung in Querschnitt eines gedrehten Ringstabs mit Anwendung auf Schraubenfedern. Ingenieur Archiv. 1931, 2, H. 1, p. p. 1—19.
3. L a n g h a a r H. L. Torsion of curved beams of rectangular section. Journ. of Appl. Mech. ASME, 1952, 19, No 1, p. p. 49—53.
4. С о л я н и к - К р а с с а К. В. К расчету винтовых пружин. Тр. Ленинград. Политехн. ин-та им. М. И. Калинина, 1950, № 2.
5. Р а б и н о в и ч А. Л. Кручение элемента кругового кольца (Обобщение задачи Сен-Венана). Тр. Московск. физ. техн. ин-та, исследования по механике и прикл. матем., вып. 1, М., 1958.
6. C h a t t a r j i P. P. Torsion of curved beams of rectangular cross-section having transverse isotropy. Zeitschr. für Angew. Math. u. Mech., 1958, 38, No. 3—4.