

ЗАДАЧА СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ ТОНКОСТЕННЫХ ТРУБ С КРУГОВОЙ ОСЬЮ

К. Ф. Черных

(Ленинград)

В своей работе [1] Карман дал метод расчета тонкостенных труб, изгибаемых моментом в плоскости гiba. Существенно новым в его методе был учет сплющивания поперечного сечения. Многочисленные более поздние работы других авторов (критический обзор их дан в [2]) были посвящены либо уточнению результатов Кармана применительно к более широкому интервалу параметров, либо рассмотрению иных частных видов нагружения. Общей чертой этих работ было использование минимальных принципов при задании приближенных выражений для перемещений и напряжений. Особняком стоит работа Кларка и Рейснера [3], в которой задача изгиба трубы моментом в плоскости гiba сведена к решению уравнения Мейснера.

В настоящей работе дан единообразный подход к задаче о деформации трубы, свободной от поверхностной нагрузки и нагруженной краевой нагрузкой общего вида. Проблема трактуется как задача теории тонких оболочек. При этом граничные условия на концах трубы удовлетворяются по Сен-Венану. Используемые обозначения совпадают, в основном, с принятыми в [4].

1. Рассмотрим часть трубы, ограниченную сечениями $\varphi = 0$ и $\varphi = -\varphi_0$ (фиг. 1). Введем дислокационные перемещения [5], т. е. непериодические по φ перемещения, которым отвечают периодические компоненты деформации. В рассматриваемой задаче

$$U^g = \{U^\circ + \Omega^\circ \times r\} \frac{\varphi + \varphi^\circ}{\varphi^\circ} \quad (1.1)$$

Здесь r — радиус-вектор произвольной точки срединной поверхности трубы, а все выражение, стоящее в фигурной скобке, представляет собой вектор перемещения срединной поверхности, как жесткого целого. При этом в качестве полюса выбрано начало координат (точка O). Составляющие векторов

$$U^\circ = U_x^\circ e_x + U_y^\circ e_y + U_z^\circ e_z, \quad \Omega^\circ = \Omega_x^\circ e_x + \Omega_y^\circ e_y + \Omega_z^\circ e_z$$

суть постоянные дислокации. Проектируя вектор U^g на направления, связанные со срединной поверхностью трубы (фиг. 1), получим

$$\begin{aligned} u^g &= \{\cos \theta \cos \varphi U_x^\circ + \cos \theta \sin \varphi U_y^\circ - \sin \theta U_z^\circ - \\ &\quad - (\alpha + \sin \theta) \sin \varphi R_0 \Omega_x^\circ + (\alpha + \sin \theta) \cos \varphi R_0 \Omega_y^\circ\} \frac{\varphi + \varphi_0}{\varphi_0} \\ w^g &= \{\sin \theta \cos \varphi U_x^\circ + \sin \theta \sin \varphi U_y^\circ + \cos \theta U_z^\circ + \\ &\quad + \cos \theta \sin \varphi R_0 \Omega_x^\circ - \cos \theta \cos \varphi R_0 \Omega_y^\circ\} \frac{\varphi + \varphi_0}{\varphi_0} \\ v^g &= \{-\sin \varphi U_x^\circ + \cos \varphi U_y^\circ - \alpha \cos \theta \cos \varphi R_0 \Omega_x^\circ - \\ &\quad - \alpha \cos \theta \sin \varphi R_0 \Omega_y^\circ + (1 + \alpha \sin \theta) R_0 \Omega_z^\circ\} \frac{\varphi + \varphi_0}{\varphi_0} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Полагая в (1.2) последовательно $\varphi = 0$ и $\varphi = -\varphi_0$, имеем

$$\begin{aligned} u^g(0) &= \cos \theta U_x^\circ - \sin \theta U_z^\circ + (\alpha + \sin \theta) R_0 \Omega_y^\circ, & u^g(-\varphi_0) &= 0 \\ w^g(0) &= \sin \theta U_x^\circ + \cos \theta U_z^\circ - \cos \theta R_0 \Omega_x^\circ, & v^g(-\varphi_0) &= 0 \\ v^g(0) &= U_y^\circ - \alpha \cos \theta R_0 \Omega_x^\circ + (1 + \alpha \sin \theta) R_0 \Omega_z^\circ, & w^g(-\varphi_0) &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

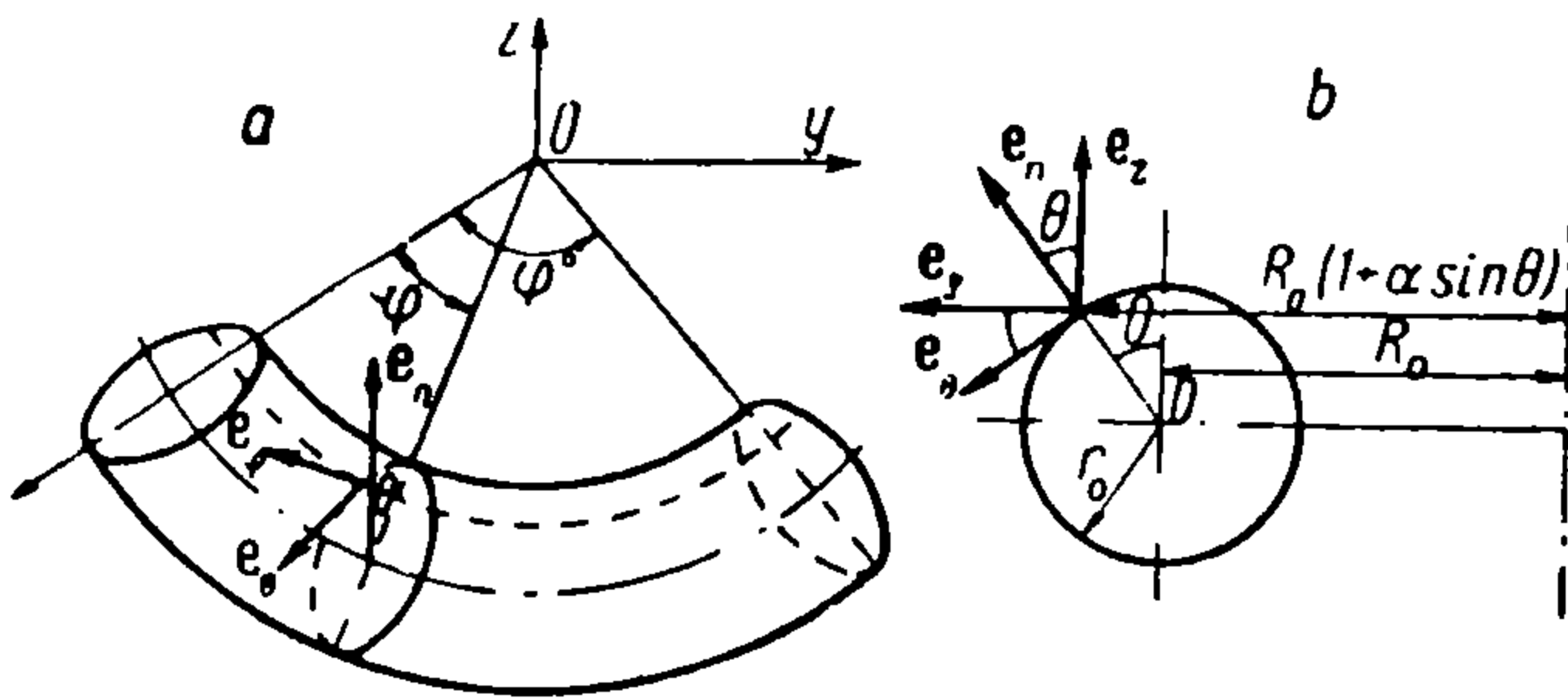
Отсюда для горизонтального и вертикального смещений

$$\Delta_\rho = u \cos \theta + w \sin \theta, \quad \Delta_z = -u \sin \theta + w \cos \theta \quad (1.4)$$

находим

$$\begin{aligned} \Delta_\rho^g(0) &= U_x^\circ + \alpha \cos \theta R_0 \Omega_y^\circ, & \Delta_\rho^g(-\varphi_0) &= 0 \\ \Delta_z^g(0) &= U_z^\circ - (1 + \alpha \sin \theta) R_0 \Omega_y^\circ, & \Delta_z^g(-\varphi_0) &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Отсюда видно, что введенные дислокационные перемещения определяют смещение как жесткого целого сечения $\varphi = 0$ относительно закрепленного сечения $\varphi = -\varphi_0$. Это перемещение характеризуется шестью параметрами $U_x^\circ, U_y^\circ, U_z^\circ, \Omega_x^\circ, \Omega_y^\circ, \Omega_z^\circ$. Если характеризовать смещение сечения $\varphi = 0$ вектором перемещения его центра $U^{\circ\circ} \{U_x^{\circ\circ}, U_y^{\circ\circ}, U_z^{\circ\circ}\}$ и вектором углов поворота $\Omega^{\circ\circ} \{\Omega_x^{\circ\circ}, \Omega_y^{\circ\circ}, \Omega_z^{\circ\circ}\}$, то из фиг. 1 нетрудно усмотреть, что



Фиг. 1

$$\begin{aligned} U_x^{\circ\circ} &= U_x^\circ \\ U_y^{\circ\circ} &= U_y^\circ + R_0 \Omega_z^\circ \\ U_z^{\circ\circ} &= U_z^\circ - R_0 \Omega_y^\circ \\ \Omega_x^{\circ\circ} &= \Omega_x^\circ, & \Omega_y^{\circ\circ} &= \Omega_y^\circ \\ \Omega_z^{\circ\circ} &= \Omega_z^\circ \end{aligned} \quad (1.6)$$

По известным формулам определим отвечающие перемещениям (1.2) дислокационные компоненты деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_2^g &= \frac{1}{R_0 \varphi_0 (1 + \alpha \sin \theta)} \{ -\sin \varphi U_x^\circ + \cos \varphi U_z^\circ - \alpha \cos \theta \cos \varphi R_0 \Omega_x^\circ - \\ &\quad - \alpha \cos \theta \sin \varphi R_0 \Omega_y^\circ + (1 + \alpha \sin \theta) R_0 \Omega_z^\circ \} \\ \omega^g &= \frac{1}{R_0 \varphi_0 (1 + \alpha \sin \theta)} \{ \cos \theta \cos \varphi U_x^\circ + \cos \theta \sin \varphi U_y^\circ - \sin \theta U_z^\circ - \\ &\quad - (\alpha + \sin \theta) \sin \varphi R_0 \Omega_x^\circ + (\alpha + \sin \theta) \cos \varphi R_0 \Omega_y^\circ \} \\ \kappa_2^g &= \frac{1}{R_0^2 \varphi_0 (1 + \alpha \sin \theta)^2} \{ \sin \theta \sin \varphi U_x^\circ - \sin \theta \cos \varphi U_y^\circ - \\ &\quad - (2 + \alpha \sin \theta) \cos \theta \cos \varphi R_0 \Omega_x^\circ - \\ &\quad - (2 + \alpha \sin \theta) \cos \theta \sin \varphi R_0 \Omega_y^\circ + (1 + \alpha \sin \theta) \sin \theta R_0 \Omega_z^\circ \} \\ \tau^g &= \frac{1}{R_0^2 \varphi_0 (1 + \alpha \sin \theta)^2} \{ \sin \theta \cos \theta \cos \varphi U_x^\circ + \sin \theta \cos \theta \sin \varphi U_y^\circ + \cos^2 \theta U_z^\circ - \\ &\quad - (\alpha + \sin \theta) \sin \theta \sin \varphi R_0 \Omega_x^\circ + (\alpha + \sin \theta) \sin \theta \cos \varphi R_0 \Omega_y^\circ \} \end{aligned}$$

$$\varepsilon_1^g = \kappa_1^g = 0$$

Если, используя соотношения обобщенного закона Гука, определить по выражениям (1.7) усилия и моменты, а при помощи последних отве-

чающую им поверхностную нагрузку, то она, вообще говоря, будет отлична от нуля. Поэтому полные перемещения будем искать в виде

$$u = u^g + u^k, \quad v = v^g + v^k, \quad w = w^g + w^k$$

При этом периодические корректирующие смещения u^k , v^k , w^k будут определяться из условия, чтобы полные перемещения отвечали сформулированной выше задаче.

Пользуясь статико-геометрической аналогией [6], построим решение системы уравнений равновесия (заменяющее у нас обычно используемое безмоментное решение)

$$\begin{aligned} T_1^* &= \frac{Eh^2}{\nu R_0^2 \varphi_0 (1 + \alpha \sin \theta)^2} \{ \sin \theta \sin \varphi \bar{U}_x^\circ - \sin \theta \cos \varphi \bar{U}_y^\circ - \\ &\quad - (2 + \alpha \sin \theta) \cos \theta \cos \varphi R_0 \bar{\Omega}_x^\circ - (2 + \alpha \sin \theta) \cos \theta \sin \varphi R_0 \bar{\Omega}_y^\circ + \\ &\quad + (1 + \alpha \sin \theta) \sin \theta R_0 \bar{\Omega}_z^\circ \} \\ S^* &= \frac{Eh^2}{\nu R_0^2 \varphi_0 (1 + \alpha \sin \theta)^2} \{ - \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \bar{U}_x^\circ - \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \bar{U}_y^\circ - \\ &\quad - \cos^2 \theta \bar{U}_z^\circ + (\alpha + \sin \theta) \sin \theta \sin \varphi R_0 \bar{\Omega}_x^\circ - (\alpha + \sin \theta) \sin \theta \cos \varphi R_0 \bar{\Omega}_y^\circ \} \\ M_1^* &= \frac{Eh^2}{\nu R_0 \varphi_0 (1 + \alpha \sin \theta)} \{ \sin \varphi \bar{U}_x^\circ - \cos \varphi \bar{U}_y^\circ + \alpha \cos \theta \cos \varphi R_0 \bar{\Omega}_x^\circ + \\ &\quad + \alpha \cos \theta \sin \varphi R_0 \bar{\Omega}_y^\circ - (1 + \alpha \sin \theta) R_0 \bar{\Omega}_z^\circ \} \\ 2H^* &= \frac{Eh^2}{\nu R_0 \varphi_0 (1 + \alpha \sin \theta)} \{ \cos \theta \cos \varphi \bar{U}_x^\circ + \cos \theta \sin \varphi \bar{U}_y^\circ - \sin \theta \bar{U}_z^\circ - \\ &\quad - (\alpha + \sin \theta) \cos \varphi R_0 \bar{\Omega}_y^\circ - (\alpha + \sin \theta) \sin \varphi R_0 \bar{\Omega}_x^\circ \} \end{aligned}$$

$$T_2^* = M_2^* = 0, \quad \nu = \sqrt{12(1 - \mu^2)}$$

Здесь h — толщина оболочки. Надлежащий выбор параметров \bar{U}_x° , \bar{U}_y° , \bar{U}_z° , $\bar{\Omega}_x^\circ$, $\bar{\Omega}_y^\circ$, $\bar{\Omega}_z^\circ$ обеспечивает периодичность корректирующих перемещений u^k , v^k , w^k . Введем, наконец, функции X , Y , Z , определив их как периодические решения следующих уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{d\theta^2} + \frac{\alpha \cos \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \frac{dX}{d\theta} + \left[-\frac{\alpha^2 \cos^2 \theta}{(1 + \alpha \sin \theta)^2} + i2d^2 \frac{\sin \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \right] X &= -d^2 \frac{\cos \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \\ \frac{d^2 Y}{d\theta^2} + \frac{\alpha \cos \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \frac{dY}{d\theta} + \left[-\frac{4\alpha^2 \cos^2 \theta}{(1 + \alpha \sin \theta)^2} + i2d^2 \frac{\sin \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \right] Y &= -d^2 \frac{\cos \theta}{(1 + \alpha \sin \theta)} \\ \frac{d^2 Z}{d\theta^2} + \frac{\alpha \cos \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \frac{dZ}{d\theta} + \left[-\frac{4\alpha^2 \cos^2 \theta}{(1 + \alpha \sin \theta)^2} + i2d^2 \frac{\sin \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \right] Z &= -d^2 \frac{\sin \theta + \alpha}{(1 + \alpha \sin \theta)^2} \end{aligned}$$

$$(2d^2 = R_0 \alpha^2 \nu / h)$$

Нетрудно убедиться, что функции X и Y являются четными относительно замены θ на $(\pi - \theta)$, а Z — нечетной. Интегрированием третьего уравнения в пределах от 0 до 2π устанавливается справедливое в рамках теории тонких оболочек равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta Z d\theta}{1 + \alpha \sin \theta} = 0 \quad (1.10)$$

Введем следующие обозначения:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta X d\theta, \quad I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta Y d\theta}{1 + \alpha \sin \theta}, \quad I_3 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Z d\theta}{1 + \alpha \sin \theta} \quad (1.11)$$

$$J_k(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + \alpha \sin \theta)^k}$$

$$\Lambda_1 = 2 \frac{(\operatorname{Re} I_1)^2 + (\operatorname{Im} I_1)^2}{\operatorname{Re} I_1}, \quad \Lambda_2 = 2 \frac{(\operatorname{Re} I_2)^2 + (\operatorname{Im} I_2)^2}{\operatorname{Re} I_2}, \quad \Lambda_3 = 2\alpha \frac{(\operatorname{Re} I_3)^2 + (\operatorname{Im} I_3)^2}{\operatorname{Re} I_3} \quad (1.12)$$

Как видно из соотношений (1.7), компоненты дислокационной деформации имеют весьма простую форму зависимости от угла φ . Это предопределяет вид корректирующих перемещений. В соответствии с используемым аппаратом разобьем задачу на три.

2. Первой симметричной задачей назовем случай, отвечающий U_z° . При этом, как видно из (1.7), отличные от нуля компоненты деформации ω^g , τ^g не зависят от φ . Этот случай соответствует симметричному кручению оболочки вращения. Решение его элементарно. Поэтому можно ограничиться приведением окончательного результата.

Для крутящего момента и сдвигающей силы имеем

$$M_\varphi = R_0 P_z = \frac{EJ}{R_0^2} \left\{ \frac{1}{(1 + \mu) \varphi_0} \frac{[J_2(\alpha)]^2}{J_3(\alpha)} \right\} U_z^\circ \quad (2.1)$$

($J = \pi r_0^3 h$ — диаметральный момент инерции поперечного сечения трубы).

Сдвигающее напряжение равно

$$\sigma_{12} = \sigma_0 \left\{ \frac{1}{J_2(\alpha)} \frac{1}{(1 + \alpha \sin \theta)^2} \right\} \quad \left(\sigma_0 = \frac{M_\varphi}{2J/r_0} \right) \quad (2.2)$$

где σ_0 — максимальное напряжение по элементарной теории кручения.

$$v^k = \alpha (1 + \alpha \sin \theta) \left\{ \left[\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin \theta d\theta}{(1 + \alpha \sin \theta)^2} + \frac{\alpha J_2(\alpha)}{J_3(\alpha)} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{(1 + \alpha \sin \theta)^3} \right] \frac{U_z^\circ}{\varphi_0} + R_0 C_1 \right\} \quad (2.3)$$

3. Вторым симметричным назовем случай, соответствующий Ω_z° . Поскольку при этом согласно (1.7) ε_2^g и κ_2^g не зависят от φ , для решения задачи используем уравнение Мейснера в преобразованном виде

$$\frac{d^2 \vartheta^{\vee k}}{d\theta^2} + \frac{\alpha \cos \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \frac{d\vartheta^{\vee k}}{d\theta} + \left[-\frac{\alpha^2 \cos^2 \theta}{(1 + \alpha \sin \theta)^2} + i2d^2 \frac{\sin \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \right] \vartheta^{\vee k} = \\ = i2d^2 \frac{\sin \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \left\{ \vartheta^g + i \frac{\nu}{Eh^2} \vartheta^* \right\}$$

Здесь

$$\vartheta^g = \frac{1}{\alpha \sin \theta} \left[\frac{d(1 + \alpha \sin \theta) \varepsilon_2^g}{d\theta} - \alpha \cos \theta \varepsilon_1^g \right] = \frac{\Omega_z^\circ}{\varphi_0} \operatorname{ctg} \theta \quad (3.1)$$

$$\vartheta^* = -\frac{1}{\alpha \sin \theta} \left[\frac{d(1 + \alpha \sin \theta) M_1^*}{d\theta} - \alpha \cos \theta M_2^* \right] \frac{Eh^2 \bar{\Omega}_z^\circ}{\nu \varphi_0} \operatorname{ctg} \theta$$

Сравнивая полученное уравнение с первым уравнением (1.9), находим

$$\vartheta^{\vee k} = \frac{2d^2}{\varphi_0} (\bar{\Omega}_z^\circ - i\Omega_z^\circ) X \quad (3.2)$$

Усилия и моменты через функцию X выражаются при помощи следующих соотношений

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \frac{Eh^2}{\nu r_0} \left\{ \frac{2\bar{\Omega}_z^\circ}{\varphi_0} \left(\frac{\alpha \cos \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \operatorname{Im} X + \frac{\alpha \sin \theta}{2(1 + \alpha \sin \theta)} \right) - \frac{2\Omega_z^\circ}{\varphi_0} \frac{\alpha \cos \theta \operatorname{Re} X}{1 + \alpha \sin \theta} \right\} \\
 T_2 &= \frac{Eh^2}{\nu r_0} \left\{ \frac{2\bar{\Omega}_z^\circ}{\varphi_0} \operatorname{Im} \frac{dX}{d\theta} - 2 \frac{\Omega_z^\circ}{\varphi_0} \operatorname{Re} \frac{dX}{d\theta} \right\} \\
 M_1 &= \frac{Eh^3}{\nu^2 r_0} \left\{ \frac{2\bar{\Omega}_z^\circ}{\varphi_0} \operatorname{Re} \left(\frac{dX}{d\theta} + \mu \frac{\alpha \cos \theta X}{1 + \alpha \sin \theta} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2\Omega_z^\circ}{\varphi_0} \left[\operatorname{Im} \left(\frac{dX}{d\theta} + \mu \frac{\alpha \cos \theta X}{1 + \alpha \sin \theta} \right) + \frac{\mu}{2} \frac{\alpha \sin \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \right] \right\} \\
 M_2 &= \frac{Eh^3}{\nu^2 r_0} \left\{ \frac{2\bar{\Omega}_z^\circ}{\varphi_0} \operatorname{Re} \left(\mu \frac{dX}{d\theta} + \frac{\alpha \cos \theta X}{1 + \alpha \sin \theta} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2\Omega_z^\circ}{\varphi_0} \left[\operatorname{Im} \left(\mu \frac{dX}{d\theta} + \frac{\alpha \cos \theta X}{1 + \alpha \sin \theta} \right) + \frac{\alpha \sin \theta}{2(1 + \alpha \sin \theta)} \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Вертикальное перемещение

$$\Delta_z^k = r_0 \left(C_2 - \int_{\theta^\circ}^{\theta} \cos \theta \operatorname{Re} \mathfrak{D}^{\nu k} d\theta \right) \tag{3.4}$$

Нетрудно видеть, что условие периодичности Δ_z^k запишется согласно (3.2) и (1.11) в виде

$$\bar{\Omega}_z^\circ = - \frac{\operatorname{Im} I_1}{\operatorname{Re} I_1} \Omega_z^\circ \tag{3.5}$$

Исключим $\bar{\Omega}_z^\circ$ из соотношений (3.3). Нетрудно найти, используя отмеченные выше свойства функции X , что усилия и моменты, приложенные к произвольному поперечному сечению (по существу T_2), статически эквивалентны изгибающему моменту

$$M_z = \frac{EJ}{R_0^2} \left\{ \frac{\Lambda_1}{d^2 \varphi_0} \right\} R_0 \Omega_z^\circ \tag{3.6}$$

Вводя цепные и изгибающие напряжения

$$\sigma_1^{\text{II}} = \frac{T_1}{h}, \quad \sigma_2^{\text{II}} = \frac{T_2}{h}, \quad \sigma_1^{\text{изг}} = \frac{6M_1}{h^2}, \quad \sigma_2^{\text{изг}} = \frac{6M_2}{h^2} \tag{3.7}$$

получим

$$\begin{aligned}
 \frac{\sigma_1^{\text{II}}}{\sigma_0} &= \frac{1}{\Lambda_1} \left\{ - \frac{\alpha \cos \theta \operatorname{Re} X}{1 + \alpha \sin \theta} - \frac{\operatorname{Im} I_1}{\operatorname{Re} I_1} \left(\frac{\alpha \cos \theta \operatorname{Im} X}{1 + \alpha \sin \theta} + \frac{\alpha \sin \theta}{2(1 + \alpha \sin \theta)} \right) \right\} \\
 \frac{\sigma_2^{\text{II}}}{\sigma_0} &= \frac{1}{\Lambda_1} \left\{ - \operatorname{Re} \frac{dX}{d\theta} - \frac{\operatorname{Im} I_1}{\operatorname{Re} I_1} \operatorname{Im} \frac{dX}{d\theta} \right\} \quad \left(\sigma_0 = \frac{M_z}{J/r_0} \right) \\
 \frac{\sigma_1^{\text{изг}}}{\sigma_0} &= \frac{6}{\nu \Lambda_1} \left\{ \operatorname{Im} \left(\frac{dX}{d\theta} + \mu \frac{\alpha \cos \theta}{1 + \alpha \sin \theta} X \right) + \frac{\mu \alpha \sin \theta}{2(1 + \alpha \sin \theta)} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\operatorname{Im} I_1}{\operatorname{Re} I_1} \operatorname{Re} \left(\frac{dX}{d\theta} + \frac{\mu \alpha \cos \theta}{1 + \alpha \sin \theta} X \right) \right\} \\
 \frac{\sigma_2^{\text{изг}}}{\sigma_0} &= \frac{6}{\nu \Lambda_1} \left\{ \operatorname{Im} \left(\mu \frac{dX}{d\theta} + \frac{\alpha \cos \theta}{1 + \alpha \sin \theta} X \right) + \frac{\alpha \sin \theta}{2(1 + \alpha \sin \theta)} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\operatorname{Im} I_1}{\operatorname{Re} I_1} \operatorname{Re} \left(\mu \frac{dX}{d\theta} + \frac{\alpha \cos \theta}{1 + \alpha \sin \theta} X \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Здесь $\sigma_0 = \frac{Mz}{J/r_0}$ — максимальное напряжение по элементарной теории изгиба и, наконец,

$$\Delta_z^k = r_0 \left\{ C_2 + \left[-\operatorname{Im} \int_{\theta^0}^{\theta} \cos \theta X d\theta + \frac{\operatorname{Im} I_1}{\operatorname{Re} I_1} \operatorname{Re} \int_{\theta^0}^{\theta} \cos \theta X d\theta \right] \frac{2\Omega_z^{\circ}}{\varphi_0} \right\} \quad (3.9)$$

$$\Delta_p^k = (1 + \alpha \sin \theta) \left\{ -1 - \frac{2h}{\nu R_0} \left(\operatorname{Re} \frac{dX}{d\theta} + \frac{\operatorname{Im} I_1}{\operatorname{Re} I_1} \operatorname{Im} \frac{dX}{d\theta} \right) \right\} \frac{2R_0 \Omega_z^{\circ}}{\varphi_0}$$

4. Первой и второй обратно-симметричными задачами назовем случаи, когда $U_y^{\circ}, \Omega_x^{\circ} \neq 0$ и $U_x^{\circ}, \Omega_y^{\circ} \neq 0$.

Несколько обобщая результаты, полученные в [7], находим, что основная трудность в рассматриваемом случае заключается в решении уравнения

$$\frac{d^2 \chi^{\vee k}}{d\theta^2} + \frac{\alpha \cos \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \frac{d\chi^{\vee k}}{d\theta} + \left[-\frac{4\alpha^2 \cos^2 \theta}{(1 + \alpha \sin \theta)^2} + i2d^2 \frac{\sin \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \right] \chi^{\vee k} =$$

$$= i2d^2 \frac{\sin \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \left(\chi^g + i \frac{\nu}{Eh^2} \chi^* \right)$$

где

$$\chi^g = \frac{1 + \alpha \sin \theta}{\alpha} \frac{d\varepsilon_{2,1}^g}{d\theta} - \operatorname{ctg} \theta \varepsilon_{1,1}^g \mp \frac{1}{\sin \theta} \omega_{,1}^g \quad (4.1)$$

$$\chi^* = -\frac{1 + \alpha \sin \theta}{\alpha} \frac{dM_{1,1}^*}{d\theta} + \operatorname{ctg} \theta M_{2,1}^* \pm \frac{1}{\sin \theta} 2H_{,1}^*$$

Здесь и ниже индекс единица после запятой означает, что данная величина представляет собой множитель перед $\cos \varphi$ либо $\sin \varphi$ в соответствующем выражении. Далее, при наличии двух функций (знаков), верхняя относится к первому обратно-симметричному случаю, нижняя — ко второму.

Подставляя в (4.1) соответствующие выражения, находим при помощи (1.9)

$$\chi^{\vee k} = \left[-\frac{4}{R_0 \varphi_0} \frac{\overline{U}_y^{\circ}}{\overline{U}_x^{\circ}} + i \frac{4}{R_0 \varphi_0} \frac{U_y^{\circ}}{U_x^{\circ}} \right] Y + \left[\frac{4}{\varphi_0} \frac{\overline{\Omega}_x^{\circ}}{\overline{\Omega}_y^{\circ}} - i \frac{4}{\varphi_0} \frac{\Omega_x^{\circ}}{\Omega_y^{\circ}} \right] Z \quad (4.2)$$

Усилия и моменты через основную комплексную функцию выражаются соотношениями

$$T_{1,1} = \frac{Eh^2}{\nu r_0} \left\{ -\frac{4}{R_0 \varphi_0} \left[\frac{\alpha \cos \theta \operatorname{Im} Y}{1 + \alpha \sin \theta} + \frac{\alpha \sin \theta}{2(1 + \alpha \sin \theta)^2} \right] - \frac{\overline{U}_y^{\circ}}{\overline{U}_x^{\circ}} + \right. \quad (4.3)$$

$$\left. + \frac{4}{R_0 \varphi_0} \frac{\alpha \cos \theta \operatorname{Re} Y}{1 + \alpha \sin \theta} \frac{U_y^{\circ}}{U_x^{\circ}} + \frac{4}{\varphi_0} \left[\frac{\alpha \cos \theta \operatorname{Im} Z}{1 + \alpha \sin \theta} - \frac{\alpha \cos \theta}{2(1 + \alpha \sin \theta)^2} \right] \frac{\overline{\Omega}_x^{\circ}}{\overline{\Omega}_y^{\circ}} - \frac{4}{\varphi_0} \frac{\alpha \cos \theta \operatorname{Re} Z}{1 + \alpha \sin \theta} \frac{\Omega_x^{\circ}}{\Omega_y^{\circ}} \right\}$$

$$T_{2,1} = \frac{Eh^2}{\nu r_0} \left\{ -\frac{4}{R_0 \varphi_0} \operatorname{Im} \left(\frac{dY}{d\theta} + \frac{\alpha \cos \theta Y}{1 + \alpha \sin \theta} \right) - \frac{\overline{U}_y^{\circ}}{\overline{U}_x^{\circ}} + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{R_0 \varphi_0} \operatorname{Re} \left(\frac{dY}{d\theta} + \frac{\alpha \cos \theta Y}{1 + \alpha \sin \theta} \right) \frac{\overline{U}_y^{\circ}}{\overline{U}_x^{\circ}} + \frac{4}{\varphi_0} \operatorname{Im} \left(\frac{dZ}{d\theta} + \frac{\alpha \cos \theta Z}{1 + \alpha \sin \theta} \right) \frac{\overline{\Omega}_x^{\circ}}{\overline{\Omega}_y^{\circ}} - \right.$$

$$\left. - \frac{4}{\varphi_0} \operatorname{Re} \left(\frac{dZ}{d\theta} + \frac{\alpha \cos \theta Z}{1 + \alpha \sin \theta} \right) \frac{\Omega_x^{\circ}}{\Omega_y^{\circ}} \right\}$$

$$S_{,1} = \frac{Eh^2}{\nu r_0} \left\{ -\frac{4}{R_0 \varphi_0} \frac{\alpha \operatorname{Im} Y}{1 + \alpha \sin \theta} \frac{\bar{U}_y^\circ}{U_x^\circ} + \frac{4}{R_0 \varphi_0} \frac{\alpha \operatorname{Re} Y}{1 + \alpha \sin \theta} \frac{U_y^\circ}{U_x^\circ} + \frac{4}{\varphi_0} \frac{\alpha \operatorname{Im} Z}{1 + \alpha \sin \theta} \frac{\bar{\Omega}_x^\circ}{\bar{\Omega}_y^\circ} - \right. \\ \left. - \frac{4}{\varphi_0} \frac{\alpha \operatorname{Re} Z}{1 + \alpha \sin \theta} \frac{\Omega_x^\circ}{\Omega_y^\circ} \right\}$$

$$M_{1,1} = \frac{Eh^3}{\nu^2 r_0} \frac{4}{R_0 \varphi_0} \left\{ -\operatorname{Re} \left(\frac{dY}{d\theta} + (1 + \mu) \frac{\alpha \cos \theta Y}{1 + \alpha \sin \theta} \right) \frac{\bar{U}_y^\circ}{U_x^\circ} - \right. \\ \left. - \left[\operatorname{Im} \left(\frac{dY}{d\theta} + (1 + \mu) \frac{\alpha \cos \theta Y}{1 + \alpha \sin \theta} \right) + \frac{\mu \alpha \sin \theta}{2(1 + \alpha \sin \theta)} \right] \frac{U_y^\circ}{U_x^\circ} + \right. \\ \left. + \operatorname{Re} \left(\frac{dZ}{d\theta} + (1 + \mu) \frac{\alpha \cos \theta Z}{1 + \alpha \sin \theta} \right) \frac{R_0 \bar{\Omega}_x^\circ}{R_0 \bar{\Omega}_y^\circ} + \left[\operatorname{Im} \left(\frac{dZ}{d\theta} + (1 + \mu) \frac{\alpha \cos \theta Z}{1 + \alpha \sin \theta} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\mu \alpha \cos \theta}{2(1 + \alpha \sin \theta)} \right] \frac{R_0 \Omega_x^\circ}{R_0 \Omega_y^\circ} \right\}$$

$$M_{2,1} = \frac{Eh^3}{\nu^2 r_0} \frac{4}{R_0 \varphi_0} \left\{ -\operatorname{Re} \left(\mu \frac{dY}{d\theta} + (1 + \mu) \frac{\alpha \cos \theta Y}{1 + \alpha \sin \theta} \right) \frac{\bar{U}_y^\circ}{U_x^\circ} - \right. \\ \left. - \left[\operatorname{Im} \left(\mu \frac{dY}{d\theta} + (1 + \mu) \frac{\alpha \cos \theta Y}{1 + \alpha \sin \theta} \right) + \frac{\alpha \sin \theta}{2(1 + \alpha \sin \theta)} \right] \frac{U_y^\circ}{U_x^\circ} + \right. \\ \left. + \operatorname{Re} \left(\mu \frac{dZ}{d\theta} + (1 + \mu) \frac{\alpha \cos \theta Z}{1 + \alpha \sin \theta} \right) \frac{R_0 \bar{\Omega}_x^\circ}{R_0 \bar{\Omega}_y^\circ} + \right. \\ \left. + \left[\operatorname{Im} \left(\mu \frac{dZ}{d\theta} + (1 + \mu) \frac{\alpha \cos \theta Z}{1 + \alpha \sin \theta} \right) - \frac{\alpha \cos \theta}{2(1 + \alpha \sin \theta)} \right] \frac{R_0 \Omega_x^\circ}{R_0 \Omega_y^\circ} \right\}$$

$$H_{,1} = \frac{Eh^3}{\nu^2 r_0} (1 - \mu) \frac{4}{R_0 \varphi_0} \frac{\alpha}{1 + \alpha \sin \theta} \left\{ \operatorname{Re} Y \frac{\bar{U}_y^\circ}{U_x^\circ} + \operatorname{Im} Y \frac{U_y^\circ}{U_x^\circ} - \right. \\ \left. - \operatorname{Re} Z \frac{\operatorname{Re} \bar{\Omega}_x^\circ}{R_0 \bar{\Omega}_y^\circ} - \operatorname{Im} Z \frac{R_0 \Omega_x^\circ}{R_0 \Omega_y^\circ} \right\}$$

Наконец, перемещения можно записать в виде

$$\Delta_{z,1}^k = r_0 (1 + \alpha \sin \theta) \left\{ - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos \theta \operatorname{Re} \chi^{\vee k}}{1 + \alpha \sin \theta} d\theta + 1 \frac{C_3}{C_4} \right\} \quad (4.4)$$

$$(4.5)$$

$$\Delta_{\rho,1}^k = r_0 \left\{ \alpha \cos \theta \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos \theta \operatorname{Re} \chi^{\vee k}}{1 + \alpha \sin \theta} d\theta - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{(\sin \theta + \alpha) \operatorname{Re} \chi^{\vee k}}{1 + \alpha \sin \theta} d\theta - \alpha \cos \theta \frac{C_3}{C_4} + 1 \frac{C_5}{C_6} \right\}$$

Требования периодичности $\Delta_{z,1}$ и $\Delta_{\rho,1}$ согласно (4.2) и (1.11)

$$\frac{\bar{U}_y^\circ}{U_x^\circ} = - \frac{\operatorname{Im} I_2}{\operatorname{Re} I_2} \frac{U_y^\circ}{U_x^\circ}, \quad \frac{\bar{\Omega}_x^\circ}{\bar{\Omega}_y^\circ} = - \frac{\operatorname{Im} I_3}{\operatorname{Re} I_3} \frac{\Omega_x^\circ}{\Omega_y^\circ} \quad (4.6)$$

С учетом этих выражений

$$\Delta_{z,1}^k = (1 + \alpha \sin \theta) \left\{ \left(\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos \theta \operatorname{Im} Y}{1 + \alpha \sin \theta} d\theta - \frac{\operatorname{Im} I_2}{\operatorname{Re} I_2} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos \theta \operatorname{Re} Y}{1 + \alpha \sin \theta} d\theta \right) \frac{4\alpha}{\varphi_0} \frac{U_y^\circ}{U_x^\circ} - \right. \\ \left. - \left(\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos \theta \operatorname{Im} Z}{1 + \alpha \sin \theta} d\theta - \frac{\operatorname{Im} I_3}{\operatorname{Re} I_3} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos \theta \operatorname{Re} Z}{1 + \alpha \sin \theta} d\theta \right) \frac{4\alpha}{\varphi_0} \frac{R_0 \Omega_x^\circ}{R_0 \Omega_y^\circ} + r_0 \frac{C_3}{C_4} \right\} \quad (4.7)$$

$$\Delta_{\rho,1}^k = \left[\left(\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{(\sin \theta + \alpha) \operatorname{Im} Y}{1 + \alpha \sin \theta} d\theta - \cos \theta \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\alpha \cos \theta \operatorname{Im} Y}{1 + \alpha \sin \theta} d\theta \right) - \right. \\ \left. - \frac{\operatorname{Im} I_2}{\operatorname{Re} I_2} \left(\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{(\sin \theta + \alpha) \operatorname{Re} Y}{1 + \alpha \sin \theta} d\theta - \cos \theta \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\alpha \cos \theta \operatorname{Re} Y}{1 + \alpha \sin \theta} d\theta \right) \right] \frac{4\alpha}{\varphi_0} \frac{U_y^\circ}{U_x^\circ} - \\ - \left[\left(\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{(\sin \theta + \alpha) \operatorname{Im} Z}{1 + \alpha \sin \theta} d\theta - \cos \theta \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\alpha \cos \theta \operatorname{Im} Z}{1 + \alpha \sin \theta} d\theta \right) - \frac{\operatorname{Im} I_3}{\operatorname{Re} I_3} \cdot \right. \\ \left. \cdot \left(\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{(\sin \theta + \alpha) \operatorname{Re} Z}{1 + \alpha \sin \theta} d\theta - \cos \theta \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\alpha \cos \theta \operatorname{Re} Z}{1 + \alpha \sin \theta} d\theta \right) \right] \frac{4\alpha}{\varphi_0} \frac{R_0 \Omega_x^\circ}{R_0 \Omega_y^\circ} - r_0 \cos \theta \frac{C_3}{C_4} + r_0 \frac{C_5}{C_6} \pm \\ \pm v_{,1}^k = \frac{1}{\varphi_0} \left\{ -1 \frac{U_y^\circ}{U_x^\circ} + \alpha \cos \theta \frac{R_0 \Omega_x^\circ}{R_0 \Omega_y^\circ} \right\} - \Delta_{\rho,1}$$

Далее, при помощи (4.3) находим (используя упомянутые выше свойства функции Y и Z , равенство (1.10) и обозначения (1.13))

$$R_0 P_\rho = \frac{EJ}{R_0^2} \left\{ \frac{2\Lambda_2}{d^2 \varphi_0} \right\} \frac{U_y^\circ \sin \varphi_0}{U_x^\circ \cos \varphi_0}, \quad M_\varphi = \frac{EJ}{R_0^2} \left\{ \frac{2\Lambda_3}{d^2 \varphi_0} \right\} \frac{-R_0 \Omega_x^\circ \sin \varphi}{R_0 \Omega_y^\circ \cos \varphi} \\ R_0 P_\varphi = \frac{EJ}{R_0^2} \left\{ \frac{2\Lambda_2}{d^2 \varphi_0} \right\} \frac{U_y^\circ \cos \varphi}{-U_x^\circ \sin \varphi}, \quad M_\rho = \frac{EJ}{R_0^2} \left\{ \frac{2\Lambda_3}{d^2 \varphi_0} \right\} \frac{R_0 \Omega_x^\circ \cos \varphi}{R_0 \Omega_y^\circ \sin \varphi} \quad (4.8)$$

$$M_z = \frac{EJ}{R_0^2} \left\{ \frac{2\Lambda_2}{d^2 \varphi_0} \right\} \frac{-U_y^\circ \cos \varphi}{U_x^\circ \sin \varphi}, \quad P_z = 0 \quad (4.9)$$

По элементарной теории изгиба максимальные напряжения в крайних волокнах трубы равны

$$\sigma_{0z} = \frac{M_{z,1}}{J/r_0} = -\frac{4Eh\Lambda_2}{\nu r_0 R_0 \varphi_0} \frac{U_y^\circ}{U_x^\circ}, \quad \sigma_{0\rho} = \frac{M_{\rho 1}}{J/r_0} = \frac{4Eh\Lambda_3}{\nu r_0 \varphi_0} \frac{\Omega_x^\circ}{\Omega_y^\circ} \quad (4.10)$$

Введем напряжения

$$\sigma_1^{(1)} = \frac{T_1}{h}, \quad \sigma_2^{(1)} = \frac{T_2}{h}, \quad \sigma_{12}^{(1)} = \frac{S}{h} \\ \sigma_1^{(2)} = \frac{6M_1}{h^2}, \quad \sigma_2^{(2)} = \frac{6M_2}{h^2}, \quad \sigma_{12}^{(2)} = \frac{6H}{h^2}$$

Согласно (4.3) выражения для них имеют вид (4.11)

$$\sigma_1^{(1)} = \sigma_{0z} \left\{ -\frac{1}{\Lambda_2} \left[\frac{\alpha \cos \theta \operatorname{Re} Y}{1 + \alpha \sin \theta} + \frac{\operatorname{Im} I_2}{\operatorname{Re} I_2} \left(\frac{\alpha \cos \theta \operatorname{Im} Y}{1 + \alpha \sin \theta} + \frac{\alpha \sin \theta}{2(1 + \alpha \sin \theta)^2} \right) \right] \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \right\} + \\ + \sigma_{0\rho} \left\{ -\frac{1}{\Lambda_3} \left[\frac{\alpha \cos \theta \operatorname{Re} Z}{1 + \alpha \sin \theta} + \frac{\operatorname{Im} I_3}{\operatorname{Re} I_3} \left(\frac{\alpha \cos \theta \operatorname{Im} Z}{1 + \alpha \sin \theta} - \frac{\alpha \cos \theta}{2(1 + \alpha \sin \theta)^2} \right) \right] \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \right\} +$$

$$+ \sigma_2^{(1)} = \sigma_{0z} \left\{ -\frac{1}{\Lambda_2} \left[\operatorname{Re} \left(\frac{dY}{d\theta} + \frac{\alpha \cos \theta Y}{1 + \alpha \sin \theta} \right) + \frac{\operatorname{Im} I_2}{\operatorname{Re} I_2} \operatorname{Im} \left(\frac{dY}{d\theta} + \frac{\alpha \cos \theta Y}{1 + \alpha \sin \theta} \right) \right] \cos \varphi \right\} +$$

$$+ \sigma_{0\rho} \left\{ -\frac{1}{\Lambda_3} \left[\operatorname{Re} \left(\frac{dZ}{d\theta} + \frac{\alpha \cos \theta Z}{1 + \alpha \sin \theta} \right) + \frac{\operatorname{Im} I_3}{\operatorname{Re} I_3} \operatorname{Im} \left(\frac{dZ}{d\theta} + \frac{\alpha \cos \theta Z}{1 + \alpha \sin \theta} \right) \right] \sin \varphi \right\}$$

$$\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{0z} \left\{ \mp \frac{1}{\Lambda_2} \left(\operatorname{Re} Y + \frac{\operatorname{Im} I_2}{\operatorname{Re} I_2} \operatorname{Im} Y \right) \frac{\alpha}{1 + \alpha \sin \theta} \sin \varphi \right\} +$$

$$+ \sigma_{0\rho} \left\{ \mp \frac{1}{\Lambda_3} \left(\operatorname{Re} Z + \frac{\operatorname{Im} I_3}{\operatorname{Re} I_3} \operatorname{Im} Z \right) \frac{\alpha}{1 + \alpha \sin \theta} \sin \varphi \right\}$$

$$\sigma_1^{(2)} = \sigma_{0z} \left\{ \frac{\sigma}{\nu \Lambda_2} \left[\operatorname{Im} \left(\frac{dY}{d\theta} + (1 + \mu) \frac{\alpha \cos \theta Y}{1 + \alpha \sin \theta} \right) + \frac{\mu \alpha \sin \theta}{2(1 + \alpha \sin \theta)^2} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{\operatorname{Im} I_2}{\operatorname{Re} I_2} \operatorname{Re} \left(\frac{dY}{d\theta} + (1 + \mu) \frac{\alpha \cos \theta Y}{1 + \alpha \sin \theta} \right) \right] \cos \varphi \right\} +$$

$$+ \sigma_{0\rho} \left\{ \frac{6}{\nu \Lambda_3} \left[\operatorname{Im} \left(\frac{dZ}{d\theta} + (1 + \mu) \frac{\alpha \cos \theta Z}{1 + \alpha \sin \theta} \right) - \frac{\mu \alpha \cos \theta}{2(1 + \alpha \sin \theta)^2} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{\operatorname{Im} I_3}{\operatorname{Re} I_3} \operatorname{Re} \left(\frac{dZ}{d\theta} + (1 + \mu) \frac{\alpha \cos \theta Z}{1 + \alpha \sin \theta} \right) \right] \cos \varphi \right\}$$

$$\sigma_2^{(2)} = \sigma_{0z} \left\{ \frac{6}{\nu \Lambda_2} \left[\operatorname{Im} \left(\mu \frac{dY}{d\theta} + (1 + \mu) \frac{\alpha \cos \theta Y}{1 + \alpha \sin \theta} \right) + \frac{\alpha \sin \theta}{2(1 + \alpha \sin \theta)^2} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{\operatorname{Im} I_2}{\operatorname{Re} I_2} \operatorname{Re} \left(\mu \frac{dY}{d\theta} + (1 + \mu) \frac{\alpha \cos \theta Y}{1 + \alpha \sin \theta} \right) \right] \cos \varphi \right\} +$$

$$+ \sigma_{0\rho} \left\{ \frac{6}{\nu \Lambda_3} \left[\operatorname{Im} \left(\mu \frac{dZ}{d\theta} + (1 + \mu) \frac{\alpha \cos \theta Z}{1 + \alpha \sin \theta} - \right. \right. \right.$$

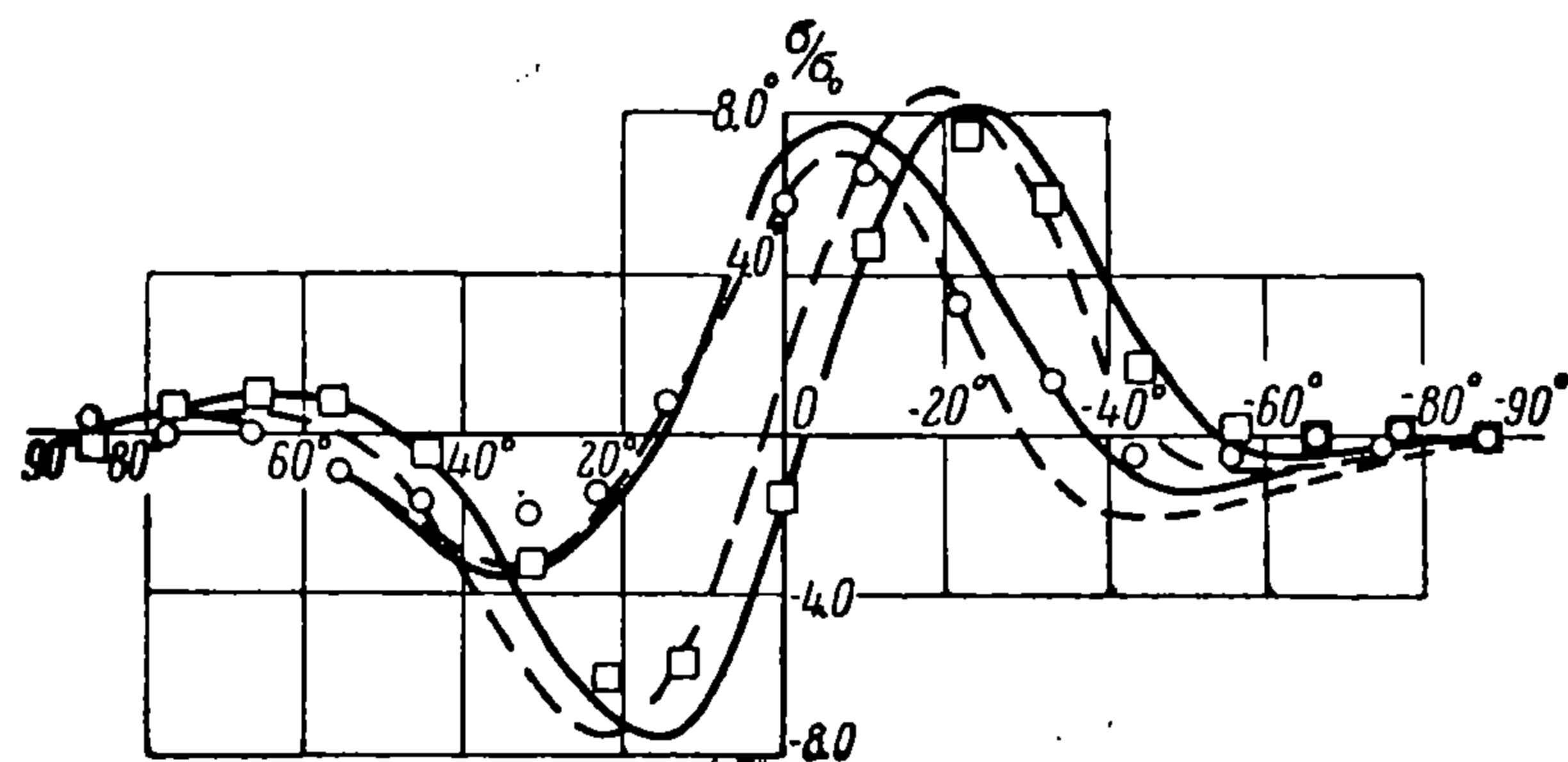
$$\left. \left. - \frac{\alpha \cos \theta}{2(1 + \alpha \sin \theta)^2} - \frac{\operatorname{Im} I_3}{\operatorname{Re} I_3} \operatorname{Re} \left(\mu \frac{dZ}{d\theta} + (1 + \mu) \frac{\alpha \cos \theta Z}{1 + \alpha \sin \theta} \right) \right] \cos \varphi \right\}$$

$$\sigma_{12}^{(2)} = \sigma_{0z} \left\{ \mp \frac{6(1 - \mu)}{\nu \Lambda_2} \left(\operatorname{Im} Y - \frac{\operatorname{Im} I_2}{\operatorname{Re} I_2} \operatorname{Re} Y \right) \frac{\alpha}{1 + \alpha \sin \theta} \sin \varphi \right\} +$$

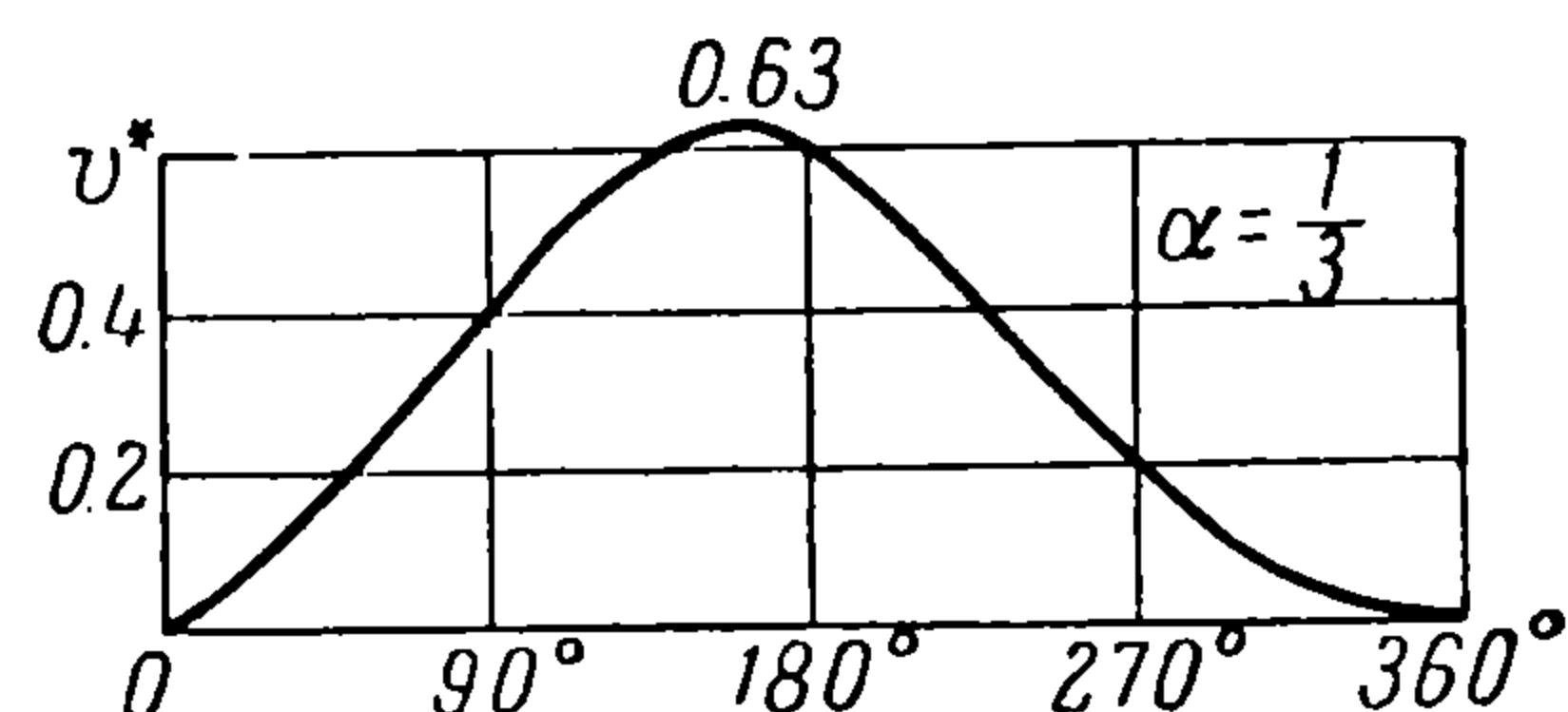
$$+ \sigma_{0\rho} \left\{ \mp \frac{6(1 - \mu)}{\nu \Lambda_3} \left(\operatorname{Im} Z - \frac{\operatorname{Im} I_3}{\operatorname{Re} I_3} \operatorname{Re} Z \right) \frac{\alpha}{1 + \alpha \sin \theta} \sin \varphi \right\}$$

5. При помощи приведенных выше соотношений был рассмотрен ряд примеров на изгиб трубы моментом в плоскостигиба. Было получено хорошее совпадение с результатами других авторов и имеющимися экспериментальными данными. В качестве примера на несимметричный изгиб

было рассмотрено кручение полукольца $\varphi_0 = \pi$ (моментом).



Фиг. 2



Фиг. 3

Для решения уравнений (1.9) применялись цепные дроби в сочетании с методом разложения по «малому» параметру α . На фиг. 2 сплошной линией нанесены осевые (квадратики) и поперечные (кружочки) напряжения, вычисленные по формулам (4.11), имеющие место на наружной поверхности трубы, характеризуемой параметрами $d^2 = 21.4$ и $\alpha = 1/3$,

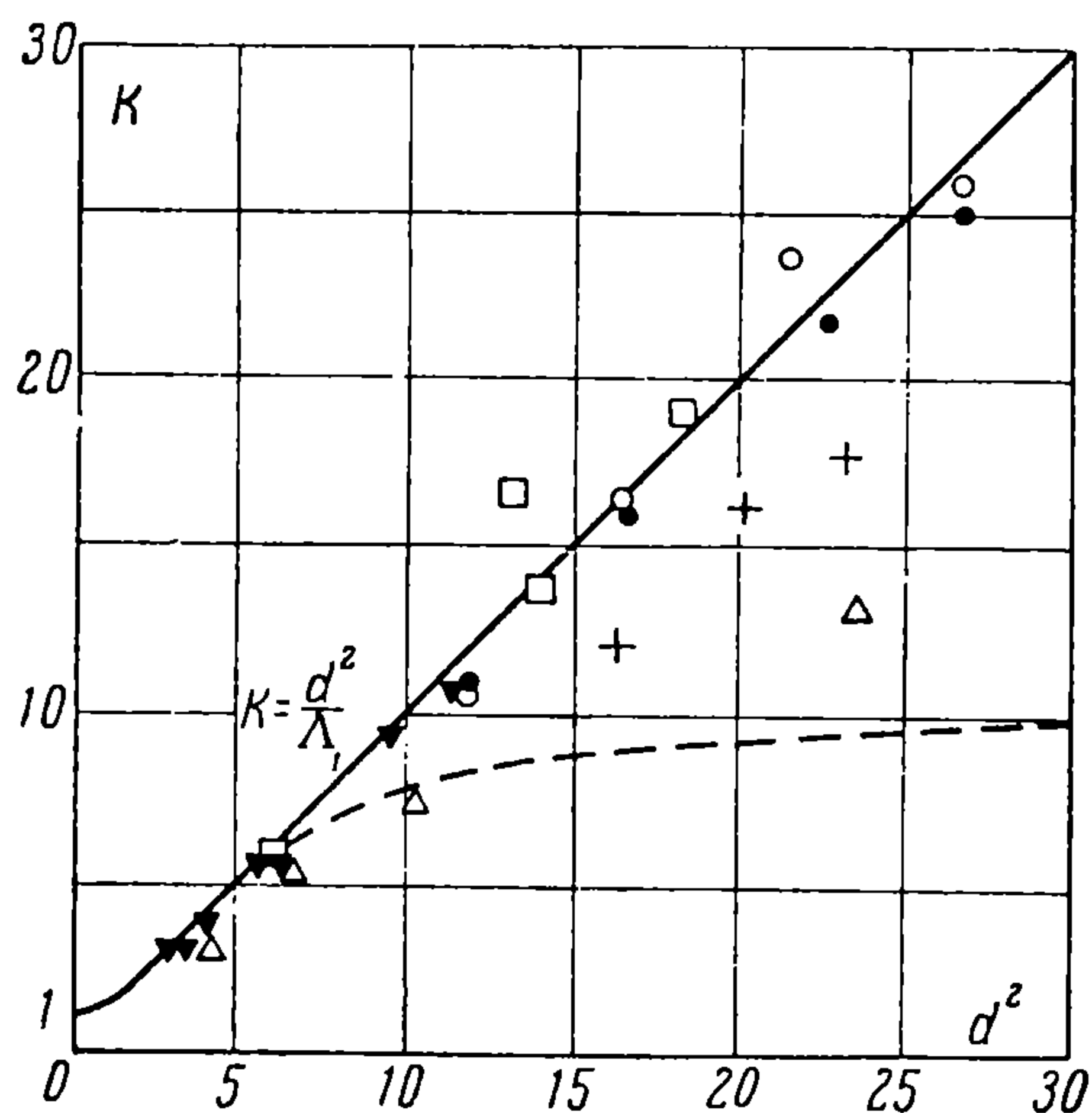
пунктиром нанесены данные из работы [8]. Разрешая (2.1), (3.6), (4.8) и (4.9) относительно параметров дислокации, получим

$$\begin{aligned} U_x^\circ &= \frac{R_0^2}{EJ} \{\beta R_0 P_x^\circ\}, & U_y^\circ &= \frac{R_0^2}{EJ} \{\beta R_0 P_y^\circ\}, & R_0 \Omega_z^\circ &= \frac{R_0^2}{EJ} \{\gamma R_0 P_y^\circ + \gamma M_z^\circ\}, \\ U_z^\circ &= \frac{R_0^2}{EJ} \{\delta R_0 P_z^\circ\}, & R_0 \Omega_x^\circ &= \frac{R_0^2}{EJ} \{\chi M_x^\circ\}, & R_0 \Omega_y^\circ &= \frac{R_0^2}{EJ} \{\chi M_y^\circ - \chi R_0 P_z^\circ\} \end{aligned} \quad (5.1)$$

где

$$\beta = \frac{d^2 \varphi_0}{2\Lambda_2}, \quad \gamma = \frac{d^2 \varphi_0}{\Lambda_1}, \quad \chi = \frac{d^2 \varphi_0}{2\Lambda_3}, \quad \delta = (1 + \mu) \varphi_0 \frac{J_3(\alpha)}{[J_2(\alpha)]^2}$$

Последние соотношения дают возможность выразить при помощи полученных выше выражений перемещения края трубы через величины



Фиг. 4

$P_x^\circ, P_y^\circ, P_z^\circ, M_x^\circ, M_y^\circ, M_z^\circ$, характеризующие приложенную к краю нагрузку. Нетрудно видеть, что корректирующие смещения суть величины того же порядка, что и дислокационные.

Для примера на фиг. 3 изображено депланационное перемещение, $v^* = U_z^\circ / \varphi_0$, отвечающее первому симметричному случаю при $\alpha = 1/3$. На фиг. 4 произведено сопоставление величины

$$\frac{\gamma}{\varphi_0} = \frac{d^2}{\Lambda_1}$$

характеризующей жесткость на изгиб для второго симметричного случая

(случая Кармана), с экспериментальными значениями, полученными различными авторами (см. [2]). Несмотря на то, что величина Λ_1 определялась при упрощающем предположении $\alpha = 0$, совпадение с экспериментальными значениями вполне удовлетворительное.

Что касается других коэффициентов жесткости, то их величина существенно зависит от характера граничных условий на концах трубы.

Построение решения, удовлетворяющего краевым условиям, требует привлечения нового аппарата, в частности решений типа краевого эффекта. При этом данное выше решение может быть принято за основу при построении точного решения.

Поступила 31 VII 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. K a r m a n T. Über die Formänderung dünnwandiger Rohre. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1911, vol. 55, part 2.
2. T u r n e r, F o r d. Examination of the theories for calculating the stresses in pipe bends subjected to in-plane bending. Proc. Inst. Mech. Engs. 1957, vol. 171, No 15.
3. К л а р к и Р е й с н е р. Изгиб труб с криволинейной осью. Механика, Сб. статей под ред. Кармана. Изд-во иностр. лит., 1955.
4. Н о в о ж и л о в В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1951.
5. Ч е р н ы х К. Ф. Связь между дислокациями и сосредоточенными воздействиями в теории оболочек. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 2.
6. Г о л ь д е н в е й з е р А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Гостехтеоретиздат, 1953.
7. Ч е р н ы х К. Ф. Обобщение уравнений Мейснера на случай обратносимметричной нагрузки. Изв. АН СССР, ОТН, 1959. Вып. 6.
8. P a r d u e, V i g n e s s. Properties of Thin walled Curved Tubes of Short-Bend Radius. Trans. ASME, January, 1951, vol. 75, No 1.