

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О ПЛАСТИНКЕ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ СЛОЕ

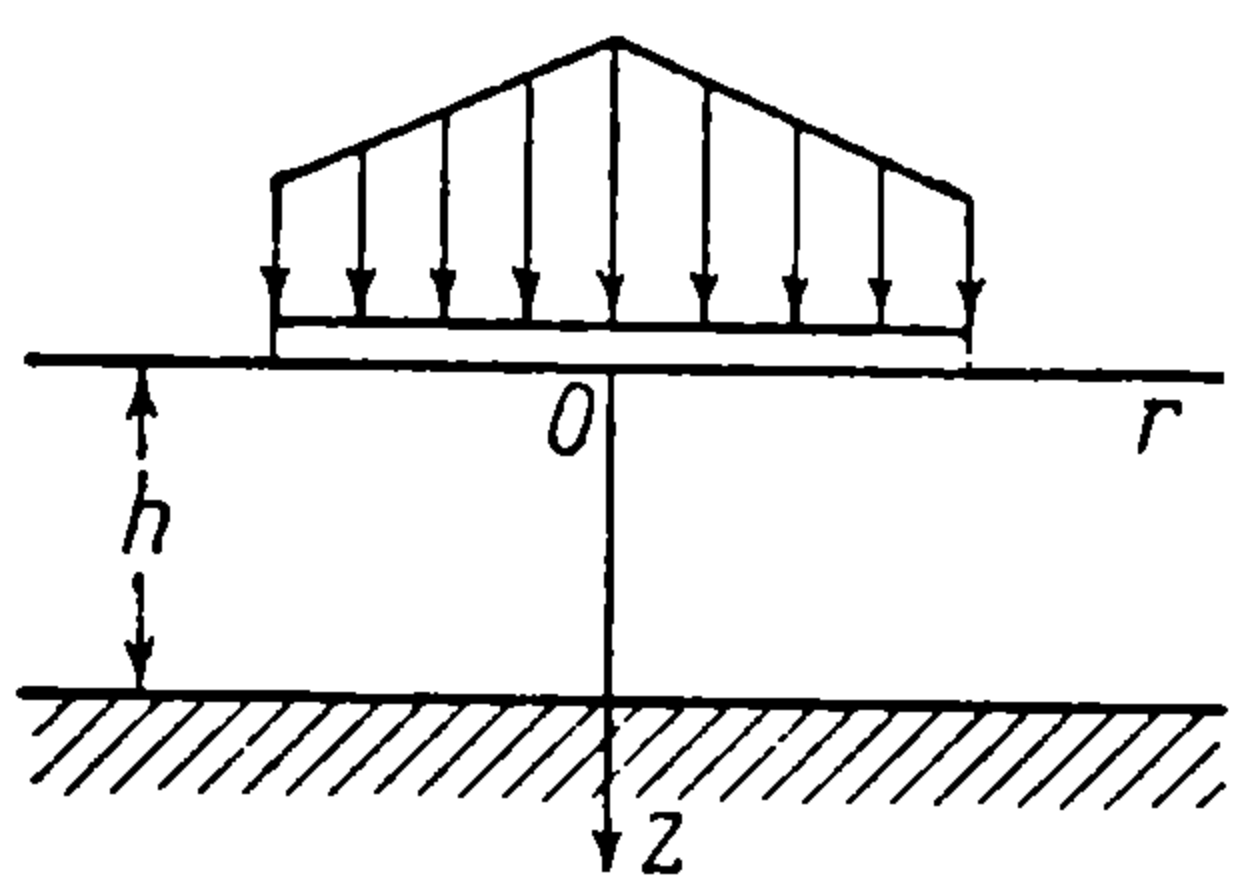
В. А. Пальмов

(Ленинград)

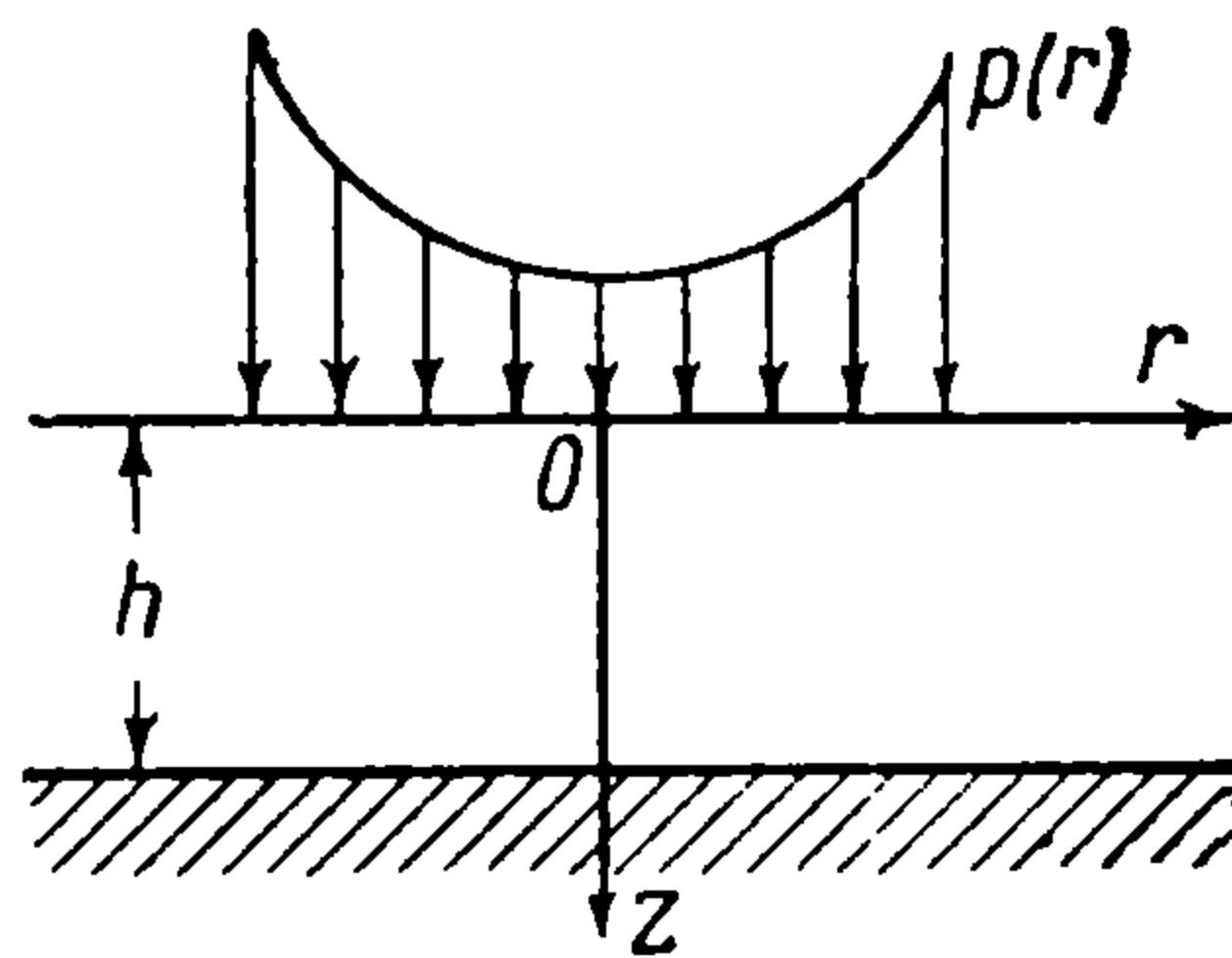
Рассматривается равновесие неограниченного упругого слоя, лежащего на жестком неподвижном основании и деформирующегося под действием упругой симметрично нагруженной круглой пластинки, находящейся с ним в контакте по всей своей поверхности (фиг. 1).

Предполагается отсутствие трения между пластинкой и слоем, а также между основанием и слоем. Радиус пластинки будем считать единичным. Толщину слоя обозначим h , а толщину пластинки δ .

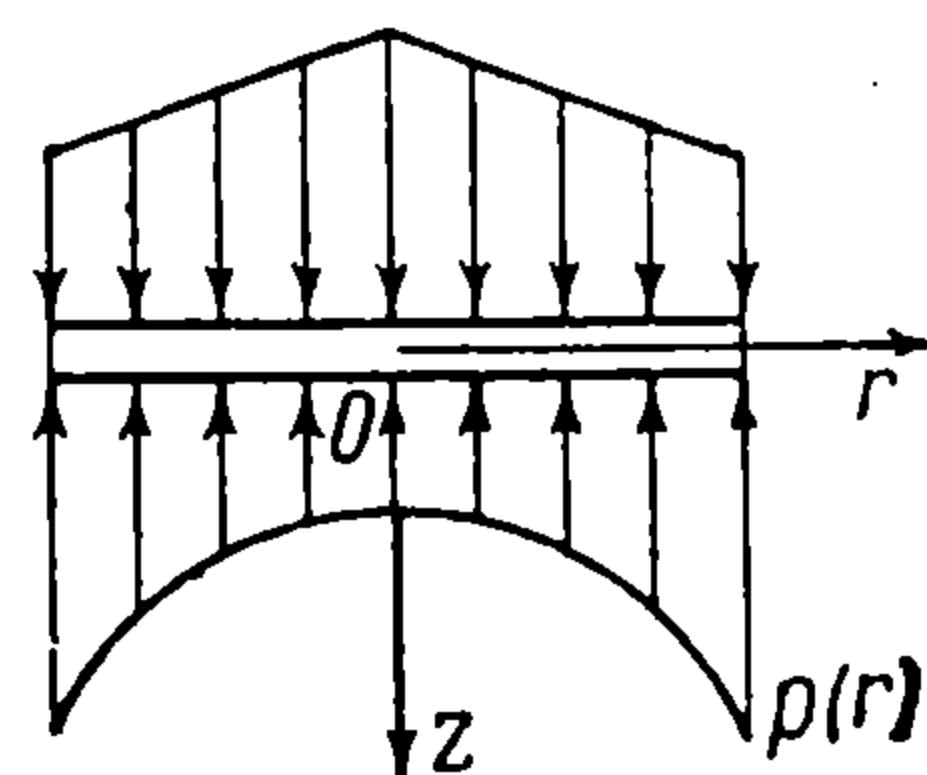
Введем в рассмотрение давление $p(r)$ в области контакта пластинки со слоем. Это позволит свести задачу к рассмотрению двух. Одна будет состоять в рассмот-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

рению равновесия слоя под действием симметричной нагрузки $p(r)$, распределенной по области контакта (фиг. 2), а вторая — в рассмотрении равновесия пластинки под действием системы внешних нагрузок и давления $p(r)$ (фиг. 3).

1. Найдем связь между давлением и нормальными перемещениями поверхности слоя в области контакта. При этом будем следовать работе [1].

При сделанных предположениях задача сводится к интегрированию уравнений теории упругости в цилиндрических координатах r, φ, z со следующими граничными условиями:

$$\tau_{rz} = 0, \quad w = 0 \quad \text{при } z = h, \quad \tau_{rz} = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad (1.1)$$

$$\sigma_z = -p(z) \quad (r < 1), \quad \sigma_z = 0 \quad (r > 1) \quad \text{при } z = 0 \quad (1.2)$$

Здесь и в дальнейшем u, v, w — составляющие вектора перемещений в избранной цилиндрической системе координат, а σ_z, τ_{rz} — нормальные и касательные напряжения.

Вследствие симметрии задачи $v = 0$, а остальные величины от координаты φ не зависят. Воспользуемся представлением вектора перемещения через гармонические функции Папковича — Нейбера

$$2\mu u = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad 2\mu w = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} + 4(1-\nu)\Phi_1, \quad \Phi = \Phi_0 - z\Phi_1 \quad (1.3)$$

Здесь μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона материала слоя, а Φ_0 и Φ_1 — функции, гармонические в области, занятой слоем. Напряжения σ_z и τ_{rz} через эти функции выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} \\ \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[(1-2\nu) \Phi_1 - \Phi_2 - z \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right], \quad \Phi_2 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.4)$$

В работе [1] показано, что, взяв гармонические функции Φ_1 , Φ_2 в интегральном представлении

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \int_0^\infty A(\lambda) \operatorname{sh} \lambda (h-z) J_0(\lambda r) \frac{d\lambda}{\operatorname{sh} \lambda h} \\ \Phi_2 &= (1-2\nu) \Phi_1 + \int_0^\infty \lambda h A(\lambda) \frac{\operatorname{sh} \lambda z}{\operatorname{sh}^2 \lambda h} J_0(\lambda r) d\lambda \end{aligned} \quad (1.5)$$

мы удовлетворим граничным условиям (1.1). Функция $A(\lambda)$ пока неизвестна, а $J_0(y)$ — функция Бесселя. Выразим перемещение w верхней границы слоя и нормальные напряжения на ней через функцию $A(\lambda)$

$$w = \vartheta \int_0^\infty A(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda, \quad \sigma_z = - \int_0^\infty \lambda A(\lambda) \frac{J_0(\lambda r)}{1-g(\lambda)} d\lambda \quad (1.6)$$

Здесь ϑ — коэффициент, характеризующий материал слоя

$$\vartheta = \frac{1-\nu}{\mu} \quad (1.7)$$

а $g(\lambda)$ — следующая функция λ

$$g(\lambda) = \frac{\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h e^{-\lambda h}}{\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h} \quad (1.8)$$

Подставив (1.6) в (1.2), найдем условия, которые нужно наложить на функцию $A(\lambda)$

$$p(r) = \int_0^\infty \frac{\lambda A(\lambda)}{1-g(\lambda)} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (r < 1), \quad \int_0^\infty \frac{\lambda A(\lambda)}{1-g(\lambda)} J_0(\lambda r) d\lambda = 0 \quad (r > 1) \quad (1.9)$$

2. Рассмотрим теперь равновесие пластинки, изображенной на фиг. 3. Будем предполагать, что центр пластинки имеет заданное перемещение W_0 (в некоторых случаях удобно за W_0 принять прогиб пластинки на краю). Обозначим через $V(r)$ прогиб пластинки, закрепленной в центре, под действием всех приложенных к ней усилий, кроме давления $p(r)$ по площади контакта со слоем. Прогиб под действием давления $p(r)$ обозначим W . Для определения последнего имеем следующее уравнение и граничные условия, соответствующие свободному краю [2]

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dW}{dr} \right) \right] \right\} = - \frac{p(r)}{D} \quad \left(D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)} \right) \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dW}{dr} \right) \right] = 0 \quad \text{при } r = 1 \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dW}{dr} \right) - \frac{(1-\nu)}{r} \frac{dW}{dr} = 0 \quad \text{при } r = 1 \quad (2.3)$$

$$W = 0 \quad \text{при } r = 0 \quad (2.4)$$

Здесь D — цилиндрическая жесткость пластинки, E — модуль Юнга ее материала, ν — коэффициент Пуассона. Воспользовавшись выражением p по формуле (1.9), проинтегрируем уравнение (2.1)

$$W = -\frac{1}{D} \int_0^{\infty} \frac{A(\lambda)}{1-g(\lambda)} [J_0(\lambda r) + C_1(\lambda) \frac{r^2}{4} + C_2(\lambda) \frac{r^2}{4} (\ln r - 1) + C_3(\lambda) \ln r + C_4(\lambda)] d\lambda \quad (2.5)$$

Вследствие ограниченности прогиба W в точке $r=0$ следует положить $C_3(\lambda) \equiv 0$. Удовлетворяя условиям (2.2), (2.3), (2.4), находим

$$\begin{aligned} C_1(\lambda) &= \lambda^2 J_0(\lambda) + \frac{1-\nu}{1+\nu} \left[-\lambda^2 J_2(\lambda) + \frac{\lambda^3}{2} J_1(\lambda) \right] \\ C_2(\lambda) &= -\lambda^3 J_1(\lambda), \quad C_4(\lambda) = -1 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Суммарное перемещение точек пластинки, в соответствии со сказанным в начале параграфа, таково:

$$w = W_0 + V(r) + W(r) \quad (2.7)$$

Приравнявая перемещение пластинки вертикальному перемещению верхней границы слоя в области контакта, получим второе интегральное условие, которое нужно наложить на функцию $A(\lambda)$

$$\begin{aligned} & \oint \int_0^{\infty} \frac{A(\lambda)}{1-g(\lambda)} \left\{ J_0(\lambda r) (1-g) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\oint D \lambda^3} \left[J_0(\lambda r) + C_1 \frac{r^2}{4} + C_2 \frac{r^2}{4} (\ln r - 1) - 1 \right] \right\} d\lambda = W_0 + V(r) \quad (r < 1) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Уравнения (1.9) и (2.8) образуют систему парных интегральных уравнений для определения функции $A(\lambda)$.

3. Следуя [1], решение системы $A(\lambda)$ будем искать в виде

$$\frac{\oint A(\lambda)}{1-g(\lambda)} = \int_0^1 \varphi(t) \cos \lambda t dt \quad (3.1)$$

где $\varphi(t)$ — новая неизвестная функция.

Выполним в правой части (3.1) интегрирование по частям и подставим полученное выражение во второе равенство (1.9)

$$\int_0^{\infty} \frac{\lambda A(\lambda)}{1-g} J_0(\lambda r) d\lambda = \frac{1}{\oint} \left[\varphi(1) \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \sin \lambda d\lambda - \int_0^1 \varphi'(t) dt \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \sin \lambda t d\lambda \right]$$

Воспользовавшись известной формулой

$$\int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \sin \lambda t d\lambda = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t < r \\ (t^2 - r^2)^{-1/2} & \text{при } t > r \end{cases} \quad (3.2)$$

убедимся, что интегралы, стоящие в правой части, обращаются в нуль при $r > 1$; поэтому второе условие (1.9) удовлетворяется тождественно.

Подстановка $A(\lambda)$ по (3.1) в (2.8), изменение порядка интегрирования и использование формулы

$$\int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \cos \lambda t d\lambda = \begin{cases} 0 & \text{при } t > r \\ (r^2 - t^2)^{-1/2} & \text{при } 0 \leq t < r \end{cases}$$

приводит к соотношению ($r < 1$)

$$\int_0^r \frac{\varphi(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} + \int_0^1 \varphi(t) \int_0^\infty \left\{ -g(\lambda) J_0(\lambda r) + \right. \quad (3.3)$$

$$\left. + \frac{1}{9D\lambda^3} \left[J_0(\lambda r) - 1 + C_1 \frac{r^2}{4} + C_2 \frac{r^2}{4} (\ln r - 1) \right] \right\} \cos \lambda t d\lambda dt = W_0 + V(r)$$

Для преобразования второго интеграла используем формулы

$$J_0(\lambda r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \cos(\lambda r \sin \theta) d\theta, \quad r^2 = \frac{4}{\pi} \int_0^{1/2\pi} r^2 \sin^2 \theta d\theta, \quad 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} d\theta$$

$$r^2 \ln r = \frac{4}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \left[r^2 \sin^2 \theta \ln 2r \sin \theta - \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta \right] d\theta \quad (3.4)$$

В справедливости последней формулы можно убедиться непосредственным интегрированием с использованием определенного интеграла

$$\int_0^{1/2\pi} \ln \sin \theta d\theta = -\frac{\pi}{2} \ln 2$$

Подставим (3.4) во второй интеграл (3.3), а в первом введем новую переменную, положив $t = r \sin \theta$. Тогда уравнение (3.3) приведет к виду

$$\int_0^{1/2\pi} \left[\varphi(r \sin \theta) + \int_0^1 \varphi(t) R(r \sin \theta, t) dt \right] d\theta = W_0 + V(r) \quad (r < 1) \quad (3.5)$$

Здесь

$$R(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{\cos \lambda t}{9D\lambda^3} \left[\cos \lambda x + C_1(\lambda) \frac{x^2}{2} + C_2(\lambda) \frac{x^2}{2} \left(\ln 2x - \frac{3}{2} \right) - 1 \right] - \right. \quad (3.6)$$

$$\left. - g(\lambda) \cos \lambda x \right\} d\lambda$$

Уравнение (3.5) есть уравнение Шлемильха [3]

$$\int_0^{1/2\pi} F(r \sin \theta) d\theta = f(r)$$

единственное решение которого с непрерывной производной будет

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \left[f(0) + x \int_0^{1/2\pi} f'(x \sin \theta) d\theta \right] \quad (3.7)$$

В исходных обозначениях (3.7) принимает вид

$$\varphi(x) + \int_0^1 \varphi(t) R(x, t) dt = \frac{2}{\pi} \left[W_0 + x \int_0^{1/2\pi} V'(x \sin \theta) d\theta \right] \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (3.8)$$

Уравнение (3.8) есть интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Если решение его с непрерывной производной в интервале $[0, 1]$ существует, то формулы (3.1), (1.5), (2.5) дают решение поставленной контактной задачи. Воспользовавшись формулой (3.2), можно получить выражение для давления p в области контакта непосредственно через φ

$$p = \frac{1}{9} \left[\frac{\varphi(1)}{\sqrt{1-r^2}} - \int_r^1 \frac{\varphi'(t) dt}{\sqrt{t^2-r^2}} \right] \quad (3.9)$$

Вычислим силу P , действующую на слой со стороны пластинки

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_0^1 pr dr = \frac{2\pi}{\vartheta} \int_0^1 \left\{ \frac{\varphi(1)}{\sqrt{1-r^2}} - \int_r^1 \frac{\varphi'(t) dt}{\sqrt{t^2-r^2}} \right\} r dr = \\ &= \frac{2\pi}{\vartheta} \left\{ \varphi(1) - \int_0^1 \left(\int_0^t \varphi'(t) \frac{r dr}{\sqrt{t^2-r^2}} \right) dt \right\} = \frac{2\pi}{\vartheta} \int_0^1 \varphi(t) dt \end{aligned} \quad (3.10)$$

Таким образом, при заданном W_0 решение поставленной задачи определено. В случае, когда W_0 неизвестно, а известна величина сосредоточенной силы, приложенной в центре, для определения W_0 послужит уравнение, выражающее равенство усилия, вычисленного по (3.10), сумме проекций всех внешних сил, приложенных к пластинке на ось z .

Выражение (3.6) может быть значительно упрощено.

4. Подставим в (3.6) выражения C_i по (2.6); в результате получим

$$\begin{aligned} R(x, t) &= \frac{2}{\pi \vartheta D} \left\{ I(x, t) + \frac{x^2}{2} \left[\frac{3+\nu}{2(1+\nu)} \int_0^\infty J_1(\lambda) \cos \lambda t dt - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1-\nu}{1+\nu} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda t}{\lambda} J_2(\lambda) d\lambda \right] - \frac{x^2}{2} \left(\ln 2x - \frac{1}{2} \right) \int_0^\infty J_1(\lambda) \cos \lambda t d\lambda \right\} - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} [G(x+t) + G(x-t)] \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь

$$I(x, t) = \int_0^\infty \frac{\cos \lambda t}{\lambda^3} \left(\cos \lambda x + \frac{\lambda^2 I_0(\lambda)}{2} x^2 - 1 \right) d\lambda, \quad G(x) = \int_0^\infty g(\lambda) \cos \lambda x d\lambda \quad (4.2)$$

Все интегралы, кроме $G(x)$, могут быть вычислены. Воспользуемся формулами [3]

$$\int_0^\infty \frac{\cos \lambda t}{\lambda} J_2(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2} (1 - 2t^2), \quad \int_0^\infty J_1(\lambda) \cos \lambda t d\lambda = \sqrt{1-t^2} \quad (4.3)$$

Продифференцируем теперь I по x

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \int_0^\infty \frac{\cos \lambda t}{\lambda^2} [-\sin \lambda x + \lambda x J_0(\lambda)] d\lambda \quad (4.4)$$

Дифференцирование законно, так как получившийся интеграл сходится равномерно относительно x . Введем в рассмотрение интеграл

$$\Pi = \int_0^\infty \frac{\cos \lambda t}{\lambda^2 + \beta^2} [-\sin \lambda x + \lambda x J_0(\lambda)] d\lambda \quad (\beta > 0)$$

Очевидно, что его предельное значение при $\beta \rightarrow 0$ совпадает с $\partial I / \partial x$. Справедливы формулы [4]

$$\int_0^\infty \frac{\cos \lambda t}{\lambda^2 + \beta^2} \lambda J_0(\lambda) d\lambda = \operatorname{ch} \beta t K_0(\beta) \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin \lambda x \cos \lambda t}{\lambda^2 + \beta^2} d\lambda &= \frac{1}{4\beta} \{ e^{-\beta(x-t)} \operatorname{Ei} [\beta(x-t)] + e^{-\beta(x+t)} \operatorname{Ei} [\beta(x+t)] - \\ &\quad - e^{\beta(x-t)} \operatorname{Ei} [-\beta(x-t)] - e^{\beta(x+t)} \operatorname{Ei} [-\beta(x+t)] \} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Здесь $K_0(\beta)$ — функция Макдональда, а $Ei(\beta)$ — интегральная показательная функция. Воспользовавшись их разложениями при малых β

$$K_0(\beta) = -\ln \beta + \ln 2 + C + \dots \quad Ei[\beta] = C + \ln|\beta| + \beta + \dots$$

и используя формулы (4.6) и 4.7), получим

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \lim_{\beta \rightarrow 0} \Pi = x(2C + \ln 2 - 1) + \frac{x-t}{2} \ln|x-t| + \frac{x+t}{2} \ln(x+t) \quad (4.7)$$

Здесь C — постоянная Эйлера ($C = 0.5772 \dots$).

Интегрируя (4.7) по x , получим выражение искомого интеграла

$$I = \frac{1}{2} x^2 (2C + \ln 2 - 1) + \frac{1}{4} (x-t)^2 (\ln|x-t| - \frac{1}{2}) + \frac{1}{4} (x+t)^2 (\ln|x+t| - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} t^2 (\ln t - \frac{1}{2}) \quad (4.8)$$

Подстановки в (4.1) интегралов (4.3), (4.8) дает

$$R(x, t) = \gamma K(x, t) - \frac{1}{\pi} [G(x+t) + G(x-t)]$$

Здесь

$$K(x, t) = x^2 \left[2C + \ln 2 - \frac{3+\nu}{2(1+\nu)} (1 - \sqrt{1-t^2}) + \frac{1-\nu}{1+\nu} t^2 \right] + H(x-t) + H(x+t) - 2H(t) - \sqrt{1-t^2} \frac{H(2x)}{2}$$

$$H(x) = \frac{1}{2} x^2 (\ln|x| - \frac{1}{2}), \quad \gamma = \frac{1}{\pi \vartheta D}$$

В частном случае, когда рассматривается взаимодействие пластинки с полупространством ($h \rightarrow \infty$), функция $g(\lambda)$, а вместе с ней и $G(x)$ обращаются в нуль и ядро $R(x, t)$ уравнения (3.8) принимает особенно простое выражение

$$R(x, t) = \gamma K(x, t)$$

Свободный член уравнения (3.8) в этом случае не меняет вида. Тогда уравнение (3.8) и другие формулы дают новое решение исследованной ранее задачи (см., например, [5,6]).

5. В качестве примера рассмотрена пластинка с приложенной в ее центре сосредоточенной силой P . В этом случае $V(r) \equiv 0$ и уравнение (3.8) принимает вид

$$\omega(x) + \int_0^1 R(x, t) \omega(t) dt = 1 \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (5.1)$$

в котором для удобства вычислений введена новая неизвестная $\omega(x)$, связанная с $\varphi(x)$ следующим соотношением:

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} W_0 \omega(x) \quad (5.2)$$

В случае контакта пластинки с упругим полупространством уравнение таково

$$\omega(x) + \gamma \int_0^1 K(x, t) \omega(t) dt = 1 \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (5.3)$$

Решение уравнения (5.3) проведем численным способом с заменой интеграла его приближенным выражением по формуле трапеций. Удовлетворяя уравнению (5.3) в ряде точек, получим систему линейных алгебраических уравнений. Решение последней для не слишком больших значений параметра γ найдено методом последователь-

ных приближений. Используя формулы (3.10) и (5.2), найдем связь между приложенной силой P и прогибом пластинки под ней

$$\alpha(\gamma) = \int_0^1 \omega(t) dt = \frac{P\vartheta}{4W_0}$$

В таблице приведены результаты вычислений значений функции $\omega(x)$ по формуле (5.3) для значений $\gamma = 0.0, 0.3, 0.5, 1.0, 1.5$.

	$\gamma=0,0$	$\gamma=0,3$	$\gamma=0,5$	$\gamma=1,0$	$\gamma=1,5$
0.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.1	1.000	0.992	0.987	0.979	0.973
0.2	1.000	0.971	0.957	0.931	0.913
0.3	1.000	0.943	0.915	0.865	0.830
0.4	1.000	0.908	0.863	0.783	0.730
0.5	1.000	0.867	0.802	0.689	0.615
0.6	1.000	0.821	0.734	0.582	0.484
0.7	1.000	0.769	0.657	0.463	0.338
0.8	1.000	0.712	0.574	0.332	0.177
0.9	1.000	0.651	0.482	0.187	-0.002
1.0	1.000	0.584	0.382	0.029	-0.199

Для указанных значений γ значения функции $\alpha(\gamma)$ согласно (5.4) равны

$\gamma = 0.00$	0.3	0.5	1.0	1.5
$\alpha(\gamma) = 1.000$	0.843	0.766	0.633	0.546

Из таблицы следует, что при $\gamma \geq 1.5$ функция $\omega(x)$ становится отрицательной при x , близком к единице. Тогда, в соответствии с формулой (3.9), давление p становится также отрицательным при $r = 1$ ($W_0 > 0$). При постановке задачи предполагалось плотное прилегание пластинки к слою, поэтому полученный результат вполне правдоподобен.

Если допустить, что пластинка свободно лежит на слое, то при указанных значениях γ края ее оторвутся от слоя и построенное выше решение теряет смысл. Понятно, что отрыв этот происходит при значениях γ , больших γ_* , при котором выполняется условие $\omega(1) = 0$.

Вычисления, более подробные, нежели приведенные в таблице, дают следующее критическое значение $\gamma: \gamma_* = 1.053$.

При рассмотрении задачи о слое конечной толщины h вычисления проводились тем же способом, с использованием таблицы функции $G(x)$, приведенной в [1].

Приведем результаты вычислений γ_* в зависимости от толщины слоя h

$\frac{1}{h} = 0$	0.5	1	2
$\gamma_* = 1.053$	1.019	0.889	0.623

Полученная зависимость $\gamma_*(h^{-1})$ позволяет сделать следующее заключение: при неизменных материалах слоя и пластинки с уменьшением толщины слоя увеличивается минимальная толщина пластинки, соответствующая контакту по всей ее площади.

Поступила 1 II 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедев Н. Н., Уфлянд Я. С. Осесимметричная контактная задача для упругого слоя. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 3.
2. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. ГИТТЛ, 1948.
3. Кузьмин Р. О. Бесселевы функции, ОНТИ, 1935.
4. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГИТТЛ, 1951.
5. Ишкова А. Г., Тулайков А. Н. Некоторые задачи об изгибе пластин, лежащих на упругом полупространстве. Инж. сб., 1956, т. XXIII.
6. Леонов М. Я. К расчету фундаментных плит. ПММ, 1940, т. IV, вып. 3.