Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

К ПОСТРОЕНИЮ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

С. А. Шестериков

(Москва)

В теории идеально жестко-пластического тела отправными пунктами являются определения предельной поверхности и закона течения. Если относительно последнего можно сказать, что разработана достаточно общая точка зрения об ассоциированном законе течения, то относительно условия пластичности существуют различные мнения.

В работе Д. Д. Ивлева [1] впервые рассмотрен вопрос о возможности выбора ус ловия пластичности, с использованием экстремальных принципов. Исследуя все возможные предельные поверхности для случая идеального жестко-пластического тела, Д. Д. Ивлев показал, что условие пластичности Треска характеризуется минимумом работы напряжений на заданных приращениях деформаций. Это доказательство было основано на том, что за единственную экспериментальную точку принималось значение напряжения, соответствующее началу текучести при растяжении (причем оно считалось равным пределу при сжатии). Другие возможные случаи задания исходной экспериментальной точки в упомянутой работе не рассматривались, в то время как для построения изотропной теории выбор исходной точки не должен влиять на результаты исследования. Оказывается, что если за исходную заданную точку принять любую другую, отличную от точки на растяжение, то условие пластичности Треска теряет свое экстремальное свойство.

Б первом параграфе настоящей работы более подробно рассмотрен вопрос о выборе условия текучести в случае задания предельного напряжения на растяжение, когда используются два экстремальных принципа. Во втором параграфе исследован общий случай адания произвольной экспериментальной точки.

§ 1. Считаем, что из эксперимента на растяжение или сжатие задано значение напряжения, соответствующее началу текучести (причем оно одно и то же как для сжатия, так и для растяжения). Тогда из принципа симметрии и невогнутости для поверхности текучести будет следовать, что она может лежать только в пределах двух шестигранных призм. Доказательство этого положения было проведено в указанной выше работе и повторять его здесь не будем.

На фиг. 1 представлена проекция главных осей на плоскость

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \mathrm{const} \qquad (1.1)$$

в пространстве главных напряжений σ_1, σ_2, σ_3, которая перпендикулярна этим призмам. Два шестиугольника представляют пересечение призм с этой плоскостью. Очевидно, что точки A_i являются заданными. Внутренний шестиугольник представляет собой условие пластичности Треска. Внешний для краткости будем называть K-поверхностью.

Работа напряжений на приращениях деформаций определяется следующим образом

$$dW = \sigma\, d\mathbf{e} \qquad (1.2)$$

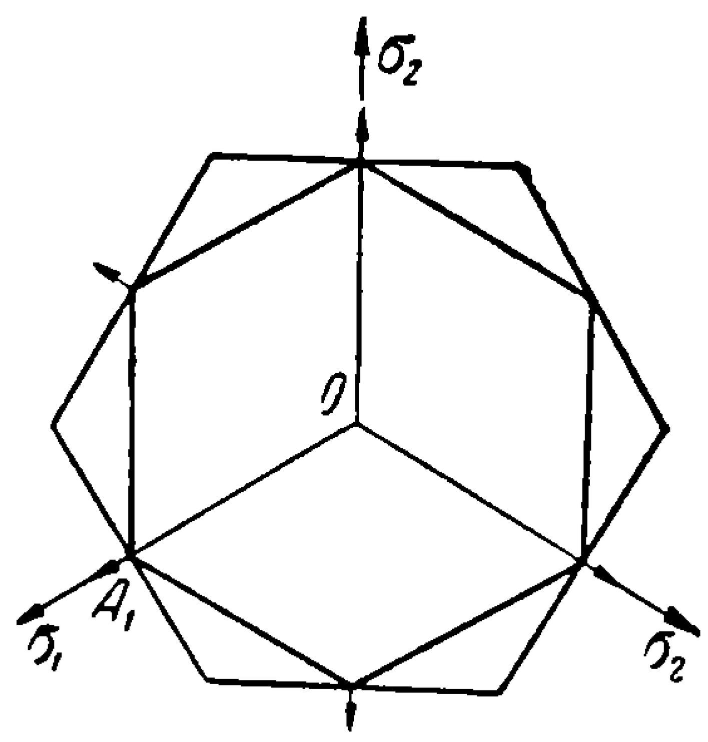
Исследуем dW на минимум при заданных приращениях деформаций. Принимаем, что модуль вектора $d\mathbf{e}$ для всех случаев остается одним и тем же

$$(de_1)^2 + (de_2)^2 + (de_3)^2 = (da)^2 \tag{1.3}$$

Исследуем теперь, как изменяется dW, если наложено условие (1.3).

Докажем, что для всех условий пластичности в точках A_i найдется такое направление вектора $d\mathbf{e}$, что рассеяние энергии dW будет определяться равенством

$$dW = 2K\sqrt{{}^2/_3}\,da \tag{1.4}$$



Фиг. 1

Действительно, либо кривая в этой точке гладкая, тогда обязательно она касается K-поверхности и $d\mathbf{e}$ компланарен $\boldsymbol{\sigma}$, либо она имеет там угловую точку (как условие Треска), когда среди возможных $d\mathbf{e}$ найдется такое направление, когда $d\mathbf{e}$ компланарен $\boldsymbol{\sigma}$. У выбранного таким образом вектора $d\mathbf{e}$ две компоненты равны. Кроме того, должно выполняться соотношение

$$de_1 + de_2 + de_3 = 0 \tag{1.5}$$

учитывая которое, легко получить выражение (1.4).

Следует особо отметить то обстоятельство, что для условия Мизеса, которое в данном случае имеет вид:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 8\ k^2 \tag{1.6}$$

значение dW, определяемое соотношением (1.4), остается одним и тем же для любого направления вектора $\boldsymbol{\sigma}$.

Рассмотрим любое условие пластичности, которое частично располагается вне круга Мизеса. Для него возьмем максимально удаленную точку от точки O. В этой точке выполняется условие

$$|\boldsymbol{\sigma}| > 2K \tag{1.7}$$

Могут представиться две возможности.

а) Кривая текучести в этой точке гладкая. Тогда в силу ее максимальной удаленности от центра касательная к ней в этой точке нормальна к $\boldsymbol{\sigma}$, а $d\mathbf{e}$ компланарен с $\boldsymbol{\sigma}$. Из условий (1.3), (1.5) и (1.7), для этой точки будет выполняться неравенство

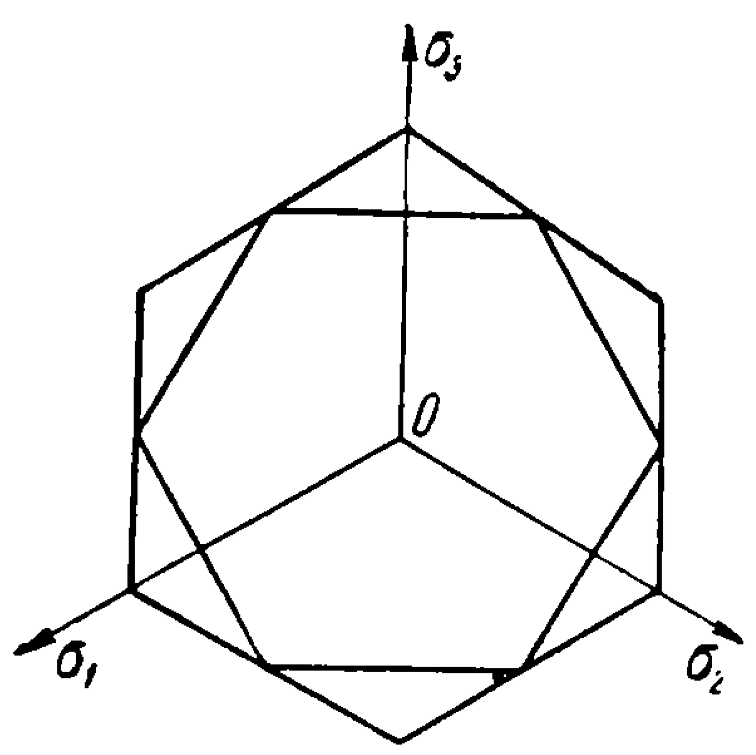
$$dW > 2Kda\,/\sqrt{({}^3/_2)} \tag{1.8}$$

б) Кривая текучести в этой точке имеет особенность. Тогда в силу ее максимальной удаленности направление $d\mathbf{e}$, компланарное с $\boldsymbol{\sigma}$, находится среди возможных, и для него выполняется условие (1.8). Следовательно, если кривая текучести выходит за условие Мизеса, то для нее найдется значение dW, превосходящее выражение (1.4).

Из выше сказанного следует, что нельзя найти кривую текучести, для которой хотя бы в одной точке не выполнялось условие (1.4), и условие пластичности Мизеса представляет верхнюю границу тех условий текучести, для которых рассеяние энергии не превосходит величины, определяемой (1.4).

Перейдем теперь ко второму принципу. Если заданы силы, вызвавшие течения, то напряжения и приращения деформаций определены по направлению, а модуль вектора напряжений зависит от условия пластичности. Здесь рассматривается только однородное напряженное состояние во всем теле. Следовательно, если в этом случае исследовать (1.2) на максимум, то переменными будут $|\sigma|$ и угол между σ и $d\mathrm{e}$, так как само $d\mathrm{e}$ определено лишь по направлению. Следовательно, в этом случае надо сравнивать только величину

$$S = (dW / |d\mathrm{e}|) = |\sigma| \cos \widehat{\sigma\, d\mathrm{e}} \tag{1.9}$$



Фиг. 2

То что для идеально пластического тела необходимо исследовать на максимум именно это отношение, ясно из того, что при заданных силах на величину деформации никаких ограничений не накладывается, а задается лишь направление течения.

Аналогично предыдущему, значение

$$S = 2K \tag{1.10}$$

в точке A_i выполняется для всех условий пластичности, а для условия пластичности Мизеса оно является стационарным. Очевидно, что для K-поверхности S принимает максимальные значения на ребрах B_i в случае, когда $d\mathrm{e}$ и σ компланарны. Легко показать, что для любой кривой текучести, имеющей участок внутри круга Мизеса, найдется точка, где выполняется условие

$$S < 2K \tag{1.11}$$

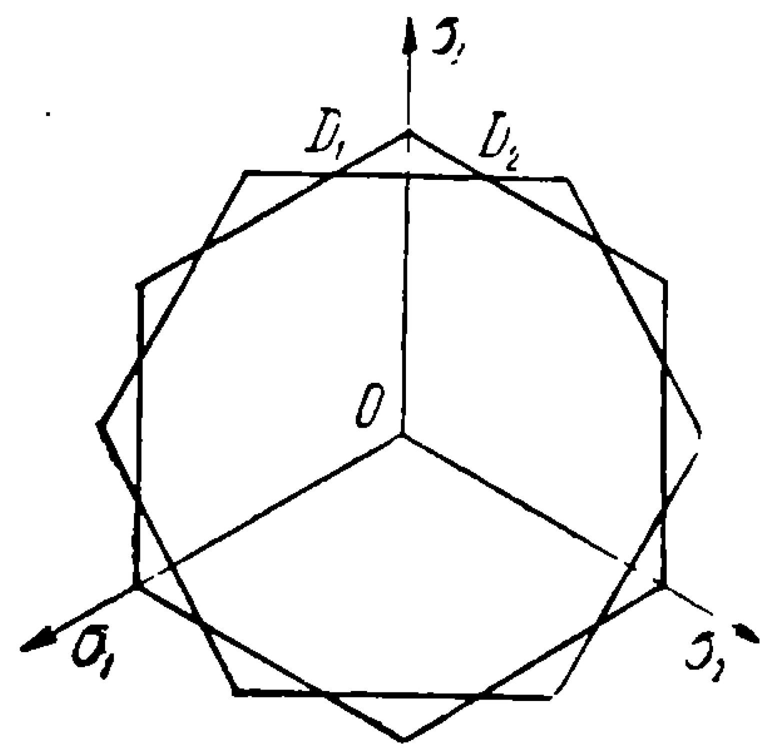
Таким образом, условие пластичности Мизеса будет нижней границей всех условий пластичности, для которых выполняется соотношение

$$S \geqslant 2K \tag{1.12}$$

Здесь необходимо отметить, что для K-поверхности $S = 2\,K$ всюду, кроме ребер, где S меняется от $2K$ до максимума.

§ 2. В предыдущем параграфе исследование проведено для случая, когда в качестве единственной экспериментальной характеристики исследовалось предельное значение для напряжения, полученное из опыта на простое растяжение — сжатие. Д. Д. Ивлев в своей работе указывает, что другие экспериментальные точки им не принимаются во внимание в силу несовершенства опыта. То хорошо известное обстоятельство, что большинство исследователей указывает на лучшее соответствие экспериментов условию Мизеса, Д. Д. Ивлев относит за счет анизотропии, упрочнения и тому подобных обстоятельств. Даже если согласиться с такой аргументацией, то представляется весьма интересным, что можно получить из подобного же чисто логического исследования с приложением тех же экспериментальных принципов в случае, когда за единственное экспериментальное данное принять предельное значение напряжения в опыте на простой сдвиг. На фиг. 2 представлена та же плоскость, что и на фиг. 1, но теперь заданными точками являются точки соответствующие. Не будем проводить строгого доказательства, так как оно тривиально, но слишком длинно, а сразу укажем, что в этом случае класс возможных условий пластичности опять заключен между двумя шестиугольниками. Самым интересным фактом является то обстоятельство, что в этом случае условие Треска и K-поверхность поменялись местами.

Совершенно очевидно, что приложение экстремальных принципов в этом случае приводит к тем же самым результатам, т. е. K-поверхность будет теперь экстремальной по первому принципу, условие Треска — по второму.



Фиг. 3

Попутно отметим, что если рассматривать условие Треска с точки зрения только одного первого принципа, как это делал Д. Д. Ивлев, то оно уже в этом случае вообще не обладает экстремальными свойствами, а условие пластичности Мизеса полностью сохраняет все свои свойства и стационарность.

Пойдем еще дальше. Исследуем самый общий случай задания экспериментальной точки. На фиг. 3, который аналогичен фиг. 1 и 2, это точка D_i. Легко получить границы для класса возможных условий пластичности. В этом самом общем случае все возможные условия пластичности находятся между внутренним двенадцатиугольником и внешней ломаной, которая сама не может быть условием текучести, так как в общем случае она не выпукла.

Последовательное приложение экстремальных принципов приводит к тому, что для первого наилучшим является внутренний двенадцатиугольник, а для второго вообще нет единой кривой. Условие пластичности Мизеса опять сохраняет свои отмеченные выше свойства и в этом наиболее общем случае. Это является следствием того хорошо известного факта, что условие пластичности Мизеса является условием постоянства энергии формоизменения.

Очевидно, что условие Треска в этом общем случае не обладает экстремальными свойствами так же как и K-поверхность. Так как с точки зрения построения простейшей изотропной теории идеальной пластичности выбор заданной экспериментальной точки не должен влиять на результаты исследования, то можно утверждать, что в самом общем случае задания экспериментальной точки только условие пластичности Мизеса является инвариантной физической характеристикой. С этой точки зрения вывод Д. Д. Ивлева о том, что только условие пластичности Треска имеет физический смысл, вызывает сомнение. Можно сказать, что такое логическое построение простейшей теории пластичности с использованием экстремальных принципов с большим успехом приводит к условию пластичности Мизеса. Это условие хорошо подтверждается и большим количеством экспериментальных данных.

Поступила 21 X 1959

Московский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Д. Д. К построению теории идеальной пластичности. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 6.