Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

# ВОПРОСЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

А. А. Ильюшин

(Москва)

**1. Постулат изотропии** [1]. Общая математическая теория пластичности в первую очередь разрабатывается для твердых тел, материал которых в недеформированном состоянии является изотропным или квазиизотропным (поликристаллическим), подчиняется закону Гука в области упругих деформаций и появление пластических деформаций в них характеризуется условием пластичности, с достаточной точностью совпадающим с условием Губера-Мизеса (как, например, условием Треска и другими, заменяющими поверхность Мизеса близкими к ней многогранниками и т. п.). Для краткости такие тела мы будем называть изотропными в исходном состоянии.

При решении вопроса связи между напряжениями и деформациями, который определяет основу теории, различные условия пластичности указанного типа можно назвать приближенными представлениями условия Мизеса в тех случаях, когда вытекающие из них следствия не существенно отличаются от соответствующих его следствий.

Рассмотрим произвольную фиксированную физическую точку тела (в обычном смысле механики континуума) и определенную для нее систему ортогональных координат (1, 2, 3). Напряженное и деформированное состояния окрестности точки в момент времени $t$ при малых деформациях характеризуются девиаторами напряжений $\sigma_{ij}(t)$ и деформаций $\text{э}_{ij}(t)$, средним напряжением $\sigma(t)$ и средним удлинением $e(t)$, причем все эти величины считаются равными нулю в исходном состоянии (при $t=0$). Напряженное и деформированное состояние в окрестности точки $M$ всегда является однородным и потому этой точке всегда можно поставить в соответствие тело $T$ произвольной формы из того же материала, находящееся в таком же однородном напряженном и деформированном состоянии и одинаковых прочих внешних условиях (т. е. образец, подвергаемый испытанию). Малая окрестность точки $M$ предполагается все же настолько большой, что закономерности одинаковых процессов в $M$ и $T$ (т. е., например, процессов с одинаковыми заданными функциями $\text{э}_{ij}(t)$, $e(t)$) будут одинаковыми.

Учитывая линейную зависимость компонент $\text{э}_{ij}$ ($\text{э}_{ii}=0$) и компонент $\sigma_{ij}$ ($\sigma_{ii}=0$), а также их физическую неоднородность (удлинение, сдвиги; нормальные, касательные напряжения), в работе [1] введены используемые ниже пятимерные ортогональные декартовы векторы деформаций $\mathbf{э} = \text{э}_n \mathbf{e}_n$ (где $\mathbf{e}_n$ — единичный репер) и векторы напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ ($\sigma_n$)

и соответствующие пространства с известными правилами сложения и скалярного умножения в каждом. Компоненты девиатора деформаций $э_{ij}$ выражаются через компоненты вектора $\mathbf{э}$ по формулам

$$
\begin{aligned}
&э_{11}\sqrt{\tfrac{3}{2}} = э_1\cos\beta + э_2\sin\beta, && э_{12}\sqrt{\tfrac{3}{2}} = э_3\cos\tfrac{1}{6}\pi\\
&э_{22}\sqrt{\tfrac{3}{2}} = -э_1\sin\left(\beta+\tfrac{1}{6}\pi\right) + э_2\cos\left(\beta+\tfrac{1}{6}\pi\right) && э_{23}\sqrt{\tfrac{3}{2}} = э_4\cos\tfrac{1}{6}\pi\\
&э_{33}\sqrt{\tfrac{3}{2}} = +э_1\sin\left(\beta-\tfrac{1}{6}\pi\right) - э_2\cos\left(\beta-\tfrac{1}{6}\pi\right) && э_{31}\sqrt{\tfrac{3}{2}} = э_5\cos\tfrac{1}{6}\pi
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

где $\beta$ — произвольное постоянное число. Компоненты $\sigma_{ij}$ через $\sigma_n$ выражаются точно такими же формулами с тем же $\beta$.

Из (1.1) следует, что если некоторый пятимерный декартов вектор $\mathbf{z}$ связан с $\mathbf{э}$ линейной зависимостью $\mathbf{z} = L(\mathbf{э})$, то компоненты тензора $z_{ij}$ связаны с $э_{ij}$ формулами $z_{ij} = L(э_{ij})$.

Процесс деформации в точке $M$ (или в теле $T$) с течением времени в пространстве $Э_5$ изображается траекторией деформации $\mathbf{э}(t)$. Скалярные геометрические характеристики траектории деформаций (модуль $\mathbf{э}$, длина дуги $s$, $ds = |d\mathbf{э}|$, четыре параметра кривизны и кручения $\varkappa$) являются инвариантами тензора $э_{ij}$:

$$
|\mathbf{э}| = \sqrt{э_{ij}{}^2}, \qquad ds = \sqrt{dэ_{ij}{}^2}, \qquad \varkappa_1 \equiv \left|\frac{d^2\mathbf{э}}{ds^2}\right|, \ldots \tag{1.2}
$$

Два процесса деформации (отнесенных к одинаковым физическим осям (1, 2, 3)) называются тождественными (и являются физически тождественными), если их траектории в $Э_5$ тождественно совпадают **и** в соответствующих геометрических точках траекторий скорости $ds/dt$ одинаковы или, иначе говоря, времена $t$ совпадают. Если физические свойства тела явно от времени не зависят (нет явлений типа ползучести — релаксации), то последнее требование в определении тождественных процессов отпадает.

В каждой точке траекторий деформации, используя пять вообще говоря линейно независимых производных векторов $d\mathbf{э}/ds, \ldots, d^5\mathbf{э}/ds^5$, можно построить единственный ортогональный декартов репер с единичными векторами

$$
\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 = \frac{d\mathbf{э}}{ds}, \qquad \mathbf{p}_2 = \frac{1}{\varkappa_1}\frac{d^2\mathbf{э}}{ds^2}, \ldots, \mathbf{p}_5
$$

определяемый лишь внутренней геометрией траектории деформации. Обобщенные формулы Френе

$$
\frac{d\mathbf{p}_n}{ds} = \varkappa_{ni}\mathbf{p}_i, \qquad \varkappa_{ni} = \begin{cases} 0 & (i \neq n-1, n+1)\\ -\varkappa_{n-1} & (i = n-1)\\ \varkappa_n & (i = n+1)\end{cases} \tag{1.3}
$$

где $\varkappa_{ni}$ — антисимметричный тензор кривизны ($\varkappa_0 \equiv \varkappa_5 \equiv 0$), позволяют любую производную $d^m\mathbf{э}/ds^m$ (для $m = 0$ и $m > 5$) выразить через $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_5$ и скаляры (параметры кривизны $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_4$ и их производные по $s$). Отсюда следует, что любой линейный относительно вектора $\mathbf{э}$ оператор $L(\mathbf{э})$ по дуге $s$ или времени $t$ может быть представлен пятичленной формулой

$$
L(\mathbf{э}) = P_1\mathbf{p}_1 + \ldots + P_5\mathbf{p}_5 \tag{1.4}
$$

где $P_n$ — скаляры (зависящие от $s$, $\varkappa$, $d\varkappa/ds, \ldots$).

Поскольку при определенных внешних условиях (нагревание и другие виды проникающего действия) каждой точке данной траектории деформации физически соответствует свой определенный вектор напряжения $\sigma$, его можно формально построить в каждой точке траектории деформаций, приняв эту точку за нулевую для $\sigma$ и отложив компоненты $\sigma_n$ в определенном масштабе по соответствующим направлениям репера $\mathbf{e}_n$, т. е. вектор $\sigma$ записать в виде $\sigma = \sigma_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \sigma_5\mathbf{e}_5$. При этом столь же формально определяется элементарная «работа» вектора напряжения $\sigma$ вдоль траектории деформации на пути $d\text{э}$, т. е. $\sigma d\text{э}$, которая совпадает с физической работой внутренних сил $\sigma_{ij}$ за время $dt$ в единице объема тела:

$$\sigma d\text{э} \equiv \sigma_n d\text{э}_n = \sigma_{ij} d\text{э}_{ij} \tag{1.5}$$

интеграл $\int \sigma d\text{э}$ по всей предшествующей траектории дает полную работу за время $t$. Вектор напряжений $\sigma$ можно также представить в репере $\mathbf{p}_n$

$$\sigma = S_n\mathbf{p}_n, \qquad S_m = \sigma_n\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{p}_m \tag{1.6}$$

и назвать $S_n$ естественными компонентами вектора напряжений. Работа при этом будет равна

$$\sigma d\text{э} = S_1 ds$$

Совокупность траектории деформации и построенных во всех ее точках векторов напряжений и других физических векторов называем образом процесса деформации тела в $Э_5$. Образы в $Э_5$ процессов одновременной деформации в различных точках тела (в общей для них системе декартовых координат 1, 2, 3) различны и в первоначально одинаковых телах они тождественно совпадают между собой при одинаковых внешних условиях лишь в случае однородной деформации тела.

Наряду с некоторой произвольной фиксированной траекторией деформации можно рассмотреть совокупность всех других траекторий в $Э_5$, обладающих той же или обратной по знаку кривизной в соответствующих точках ($\varkappa_n$ при одинаковых $s$ одинаковы или обратны по знаку). Все эти траектории могут быть приведены к одной путем линейных преобразований вращения и отражения: $\text{э} = (\alpha_{mn})\,\text{э}'$, причем квадратная ортогональная нормированная матрица косинусов будет принимать любые значения (независимые от $t$) и иметь детерминант $|\alpha_{mn}| = +1$ для вращений и $|\alpha_{mn}| = -1$ — для отражений.

Вращениями и отражениями образа процесса деформации называется преобразование его в $Э_5$ при помощи матрицы $(\alpha_{mn})$ (одновременное преобразование векторов э, $\sigma$...).

Многочисленные соображения и факты говорят за то, что физические свойства первоначально изотропных тел, точнее — связь между векторами $\sigma$ и э, находится в согласии с постулатом изотропии, который гласит: образ процесса деформации инвариантен относительно преобразований вращения и отражения, т. е. представление вектора напряжений в естественном репере $\mathbf{p}_n$ траектории деформации инвариантно относительно этих преобразований. Значит компоненты $S_n$ в (1.6) есть инварианты преобразований, то есть зависят (может быть и очень сложно, например, истокообразно) только от длины дуги $s$, кривизн $\varkappa_n$ траектории и (при наличии свойств типа релаксации-ползучести) от скорости $ds/dt$.

Постулат изотропии применительно к проблеме пластичности получил подтверждение в опытах В. С. Ленского [2,3] и некоторых других; В. С. Ленский обследовал весьма сложные неаналитические траектории с многими угловыми точками на траектории, включающие разгрузки и повторные нагружения.

**2. Изоморфизм.** За основное пространство вместо $Э_5$ можно взять пространство напряжений $\sigma_5$, в котором процесс нагружения определяется $\boldsymbol{\sigma}(t)$, и образом определенного процесса нагружения можно назвать траекторию напряжений и построенные в каждой ее точке, например, в естественном репере $\mathbf{q}_n$;

$$\mathbf{q}=\mathbf{q}_1=\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\Sigma},\qquad \mathbf{q}_2=\frac{1}{k_1}\frac{d^2\boldsymbol{\sigma}}{d\Sigma^2},\ \ldots,\ \mathbf{q}_5;\ d\Sigma=|d\,\boldsymbol{\sigma}|,\qquad k_1=\left|\frac{d^2\boldsymbol{\sigma}}{d\Sigma^2}\right|,\ \ldots$$

векторы деформации $\mathbf{э}$ и др. Постулат изотропии теперь можно формулировать и в пространстве $\sigma_5$: образ процесса в $\sigma_5$ инвариантен относительно преобразований вращения и отражения, то есть в представлении

$$\mathbf{э}=E_1\mathbf{q}_1+\ldots+E_5\mathbf{q}_5 \tag{2.1}$$

коэффициенты зависят только от инвариантов $\Sigma$ и $k$.

Вообще можно определить два линейно независимых пятимерных вектора

$$\mathbf{l}=L(\mathbf{э},\ \boldsymbol{\sigma}),\qquad \mathbf{l}'=L'(\mathbf{э},\ \boldsymbol{\sigma}) \tag{2.2}$$

где $L$, $L'$ — линейные относительно $\mathbf{э}$ и $\boldsymbol{\sigma}$ (не их инвариантов) операторы, причем $\bar{\mathbf{l}}$, $\bar{\mathbf{l}}'$ инвариантны относительно преобразований вращения и отражения с одинаковой матрицей $(\alpha_{ij})$. Образом процесса нагружения будет, например, траектория вектора $\mathbf{l}(t)$ в $l_5$, и построенные в каждой ее точке векторы $\mathbf{l}'$, причем естественный репер $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_5$ получается из $\mathbf{l}(t)$ так же, как $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_5$ из $\mathbf{э}(t)$ или $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_5$ из $\boldsymbol{\sigma}(t)$, и значит определяется инвариантами $d\lambda=|d\mathbf{l}|$, $K_1=|d^2\mathbf{l}/d\lambda^2$... Постулат изотропии в этом случае утверждает инвариантность образа процесса в $l_5$, то есть инвариантность его относительно преобразований с помощью матрицы $(\alpha_{ij})$; таким образом

$$\mathbf{l}'=\Lambda_1\mathbf{r}_1+\ldots+\Lambda_5\mathbf{r}_5 \tag{2.3}$$

где $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_5$ зависят только от кривизны $K$ и длины дуги $\lambda$.

Нет никаких принципиальных оснований сделать предпочтительный выбор из представлений закона связи $\boldsymbol{\sigma}$ и $\mathbf{э}$ в бесконечном разнообразии форм (1.6), (2.1), (2.3) с инвариантными коэффициентами $S_n$, $E_n$, $\Lambda_n$ и параметрами $s$, $\varkappa$, $\Sigma$, $k$, $\lambda$, $K$; все они получаются из постулата изотропии в соответствующем пространстве. Отсюда естественно формулировать следующую теорему.

*Теорема изоморфизма.* Для одного и того же вещества, процесс деформации которого начинается и происходит при одинаковых внешних условиях, постулат изотропии одинаково справедлив в пространствах деформаций $Э_5$, напряжений $\sigma_5$ и производных пространствах $l_5$. Значит связи $\bar{\boldsymbol{\sigma}} \sim \mathbf{э}$ в различных формах (1.6), (2.1), (2.3) тождественны в том смысле, что дают один и тот же физический закон, если начальные условия (для точки $t=0$, $\boldsymbol{\sigma}=0$, $\mathbf{э}=0$) одинаковы.

Доказательство теоремы изоморфизма основывается на том, что в каком-нибудь одном пространстве, например в $Э_5$, постулат изотропии справедлив. Путем пятикратного дифференцирования (1.6) находим ренер $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_5$, используя формулы Френе для $\mathbf{p}_n$:

$$\mathbf{q}_1 d\Sigma = \left(S_n \frac{d\mathbf{p}_n}{ds} + \mathbf{p}_n \frac{dS_n}{ds}\right) ds = S_n^{(1)}\mathbf{p}_n ds, \ldots$$

и связь между инвариантами $(s, \varkappa, \Sigma, k)$, после чего, выражая $\mathbf{p}_n$ через $q_n$, находим

$$\mathbf{э} = \int_0^s \mathbf{p}_1 ds = \int_0^L E_n^{(1)}\mathbf{q}_n d\Sigma$$

и значит (2.1), так как справа находится линейный относительно $\boldsymbol{\sigma}$ оператор, который, как уже отмечалось выше (1.4), можно представить в репере $\mathbf{q}_n$. Имея теперь два представления (1.6) и (2.1) и составляя из них векторы $\mathbf{l} = L(\mathbf{э}, \boldsymbol{\sigma})$ и $\mathbf{l}' = L'(\mathbf{э}, \boldsymbol{\sigma})$, можно найти реперы $\mathbf{r}_n$ и $\mathbf{r}_n'$ и, исключая $\mathbf{p}_n$, $\mathbf{q}_n$, представить $\mathbf{l}'$ в репере $\mathbf{r}_n$ согласно (2.3), т. е. определить $\Lambda_n$; фактическое выполнение до конца таких преобразований встретит трудности, так как нелинейные связи между инвариантами $s, \varkappa$ и $\Sigma, k, \lambda, K$ могут быть неявными и функциональными. Требования взаимной однозначности представлений (1.6), (2.1), (2.3) наложат ограничения на зависимости компоненты $S_n$, $E_n$, $\Lambda_n$ от $s$ и $\varkappa$, $\Sigma$ и $k$ и $\lambda$ и $K$ соответственно, но эти ограничения естественны.

**3. Некоторые следствия постулата изотропии.** Связи между напряжениями $\sigma_{ij}$ и деформациями $э_{ij}$ для макро-объемов первоначально изотропных тел, иногда называемые механическими уравнениями состояния, делятся на векторные и скалярные [1]. Постулат изотропии определяет векторные свойства и сводит проблему определения связи между $\boldsymbol{\sigma}$ и $\mathbf{э}$ к определению только скалярных свойств. Для всех случаев простого нагружения, независимо от реологических свойств тела, постулат изотропии дает векторный закон, всегда приводимый к простейшему виду

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\sigma}{э}\mathbf{э} \qquad \left(\sigma_{ij} = \frac{\sigma}{э} э_{ij}\right) \tag{3.1}$$

и значит скалярные свойства полностью определяются простейшими опытами (поведением образца при простом растяжении или кручении и т. п.), определяющими одну неизвестную функцию $\sigma$ через $э$, $dэ/dt, \ldots$. Формула (3.1) устанавливает общий физический закон для первоначально изотропных материалов, нагружение которых является простым (пропорциональным) [4].

Для металлов в случаях траекторий малой кривизны [1], когда $\varkappa_{ni}$ из (1.3) удовлетворяют условию $|\varkappa_{ni}| \leqslant 1/f e_s$ ($e_s$ — предельное упругое удлинение, $f \approx 4 \sim 10$) из постулата изотропии вследствие свойства запаздывания [1,2] получаем $\boldsymbol{\sigma} = S_1\mathbf{p}_1$ или

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma\frac{d\mathbf{э}}{ds} \qquad \left(dэ_{ij} = \frac{ds}{\sigma}\sigma_{ij}\right) \tag{3,2}$$

причем этот закон содержит (3.1), так как при простом нагружении $d\mathbf{э}/ds = \mathbf{э}/э$. Из сказанного ясно отличие (3.1) и (3.2) от «деформационной теории» и простейшей теории пластического течения: зависимости (3.1), (3.2) представляют общую теорию пластичности для определенных классов траектории деформации (простого и близкого к простому нагружения и траекторий малой кривизны).

Для произвольных аналитических траекторий деформаций постулат изотропии и теорема изоморфизма дают связь (1.6) между $\sigma$ и $э$, которую можно записать в виде пятичленной формулы

$$\sigma = \sum_{n=N}^{N+4} F_{Nn} \frac{d^n э}{ds^n} \tag{3.3}$$

Здесь $N$ — любое целое число, $F_{Nn}$— универсальные функции (операторы, функционалы), зависящие от $s$ и кривизны в точке $s$ или в точке $s=s_0=\text{const}$ ($s_0$ — любая фиксированная точка).

Если траектория не является аналитической кривой, а состоит из кусков аналитических кривых, соединенных между собой неаналитическими точками (например, угловыми), то на каждом куске сохраняется (3.3); при этом, конечно, предполагается, что входящие в (3.3) векторы $d^n э/ds^n$ линейно независимы.

В общем случае неаналитических траекторий производные в (3.3) должны быть заменены отношениями разностей; если в точке $s$ с использованием предшествующего участка траектории (в области пластических деформаций) можно построить лишь $m<5$ линейно независимых векторов, значит $\sigma$ через $э$ будет выражаться лишь $m$-членной формулой.

В принципе связь между макронапряжением $\sigma$ и деформацией $э$ может быть найдена теоретическим путем; физическое исследование должно дать механику пластических деформаций кристалла (или молекулы) вещества, статистическая механика должна привести к уравнениям состояния и значит дать искомое соотношение $\sigma \sim э$. Поскольку постулат изотропии находится в согласии с макроскопическими опытами, значит выводы из постулата изотропии и молекулярной теории будут совпадать (конечно с определенной точностью), причем выводы из последней теории были бы шире, так как дали бы не только векторные, но и скалярные свойства, то есть вид функций $F_{Nn}$ в (3.3); несовпадение выводов означало бы, что в неизбежном многообразии допущений физического и математического характера при теоретическом выводе уравнений состояния содержатся неточности. С нашей точки зрения представляет интерес следующая полуобратная задача: известна теория вероятности слабо взаимодействующих случайных процессов, известен вероятностный характер распределения зерен по размерам и кристаллической взаимной ориентации, известны некоторые свойства механизма пластичности в зерне (допустимые скольжения и т. п.); каков класс недостающих физических сведений, обладающий тем свойством, что макросоотношения $\sigma \sim э$ удовлетворяют постулату изотропии. Решение ее позволило бы выяснить новые свойства пластических микродеформаций и методов статистической их обработки.

**4. Упруго-пластические свойства при нагружении по ломаной прямой (с одной точкой перелома).** Пусть в пространстве деформаций $Э_5$ траектория деформации представляет простое нагружение вдоль произвольного единичного вектора $\mathbf{p}$ до точки $s=|\mathbf{э}|=э$, в которой в момент $t_0$ происходит излом траектории и дальнейший процесс идет вдоль произвольного вектора $\mathbf{p}_1$, причем в момент времени $t>t_0$ деформация характеризуется вектором $\mathbf{э}_1$ (фиг. 1)

$$\delta s = s_1 - s, \qquad \delta\mathbf{э} = \mathbf{э}_1 - \mathbf{э}, \qquad \mathbf{p} = \frac{\mathbf{э}}{э}, \qquad \mathbf{p}_1 = \frac{\delta\mathbf{э}}{\delta s} \tag{4.1}$$

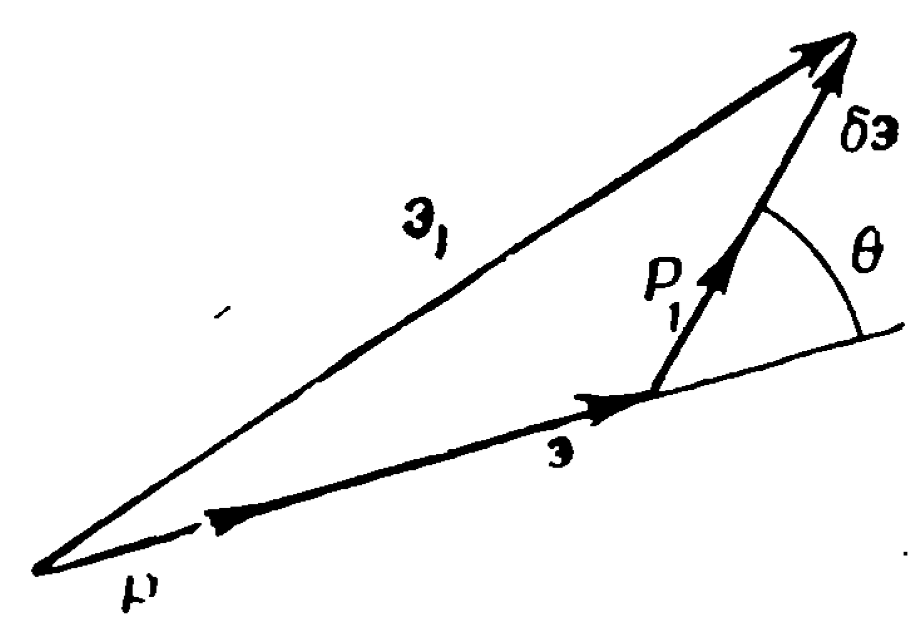
Такие процессы нагружения имеют практическое значение и осуществляются в телах при простом нагружении их до момента потери устойчивости и последующей потере устойчивости и деформациях в закритической области; при этом нагрузки могут также изменяться резко в момент потери устойчивости и затем плавно изменяться во времени. Можно назвать и другие практические вопросы, сводящиеся к рассматриваемому случаю.

Поворотом траектории деформации в угловой точке $s=э$ назовем величину

$$\tau = \cos\theta = \frac{э\delta э}{э\delta s} = \frac{\sigma\delta э}{\sigma\delta s} \tag{4.2}$$

Очевидно, что для любой точки на втором участке траектории деформаций на основании имеющегося до нее участка траектории нельзя построить каких-либо векторов (путем линейных операций над **э** и **э**$_1$), линейно независимых относительно **p** и **p**$_1$. Из постулата изотропии следует, что единственным возможным наиболее общим выражением напряжения $\boldsymbol{\sigma}_1$ в точке $э_1$ через деформации будет двучленный закон

$$\delta\boldsymbol{\sigma} = (S\mathbf{p} + S_1\mathbf{p}_1)\,\delta s \qquad (\delta\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}) \tag{4.3}$$




Фиг. 1

и $S$, $S_1$ — функции инвариантов траектории. Инвариантами траектории являются только величины $s$, $\delta s = s_1 - s$ и $\tau = \cos\theta$, причем $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma/э)\mathbf{э}$ и $\sigma = \Phi(э)$ — известная для простого нагружения функция. Значит коэффициенты $S$ и $S_1$ являются функциями только длин отрезков $s$ и $\delta s$ и поворота $\tau$.

$$S = S(s, \tau, \delta s), \qquad S_1 \equiv N = N(s, \tau, \delta s) \tag{4.4}$$

Введем единичный вектор нормали **n**, как вектор, лежащий в плоскости векторов **p** и **p**$_1$

$$\mathbf{n} = -\mathbf{p}\operatorname{ctg}\theta + \mathbf{p}_1\frac{1}{\sin\theta}, \qquad \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}\cos\theta + \mathbf{n}\sin\theta \tag{4.5}$$

и обозначим

$$P = N + \frac{S}{\cos\theta} = N + \frac{S}{\tau} \tag{4.6}$$

Тогда (4.3) можно представить в виде

$$\delta\boldsymbol{\sigma} = (P\cos\theta\,\mathbf{p} + N\sin\theta\,\mathbf{n})\,\delta s$$

Отсюда, обозначая для краткости проекции $\delta\mathbf{э}$ и $\delta\boldsymbol{\sigma}$ на **p** и **n**

$$\delta\mathbf{э}\mathbf{p} = \delta s\cos\theta = \delta s_p, \qquad \delta\mathbf{э}\mathbf{n} = \delta s\sin\theta = \delta s_n, \qquad \delta\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} = \delta\sigma_p, \qquad \delta\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \delta\sigma_n \tag{4.7}$$

находим выражения $P$ и $N$

$$P = \frac{\delta\sigma_p}{\delta s_p}, \qquad N = \frac{\delta\sigma_n}{\delta s_n} \tag{4.8}$$

Эти выражения, как увидим, позволяют найти функции $P$ и $N$ от аргументов $s$, $\delta s$, $\tau$ из простых опытов. Теперь, учитывая соотношения

$$\mathbf{p}_1\delta s = \delta\mathbf{э}, \qquad \mathbf{p}\,\delta s\cos\theta = \mathbf{p}(\mathbf{p}\delta\mathbf{э}) = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sigma^2}(\boldsymbol{\sigma}\delta\mathbf{э})$$

связь между напряжениями и деформациями (4.3) запишем в виде

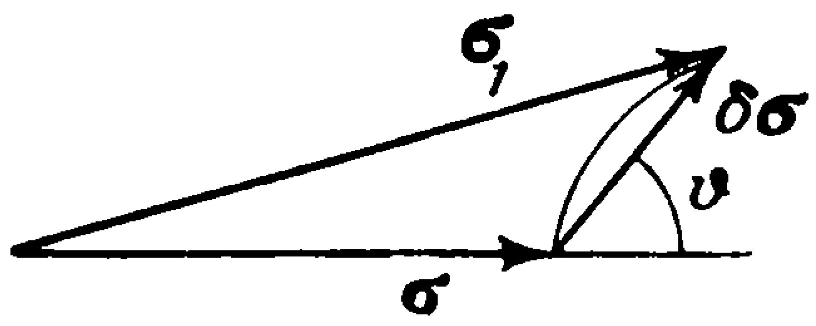
$$\delta\boldsymbol{\sigma} = N\delta\mathbf{э} - (N-P)\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sigma^2}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\delta\mathbf{э}) = N\delta\mathbf{э} - (N-P)\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sigma}\tau\delta s \tag{4.9}$$

причем $N$, $P$ считаются известными функциями от $s$, $\delta s$ и $\tau$ и потому (4.9) представляет наиболее общий закон связи $\boldsymbol{\sigma} \sim \mathbf{э}$ для ломаной прямой. Очевидна следующая теорема приведения.

*Теорема.* Функции $N$ и $P$ полностью определяются из опытов совместного растяжения и кручения тонкостенных трубок и тождественно совпадают с функциями, определенными опытами по типу «веера».

Опыты В. С. Ленского на автоматической машине Института Механики АН СССР осуществляют программу по деформациям: кручение трубки до различных степеней деформации (направление $e_3$, компонента вектора деформации $э_3$) и при каждой степени деформации дальнейшее совместное кручение (включая реверс деформации) и растяжение по прямолинейному лучу под углом $\theta$ к оси $e_3$; для растяжения — направление $e_1$, компонента вектора деформации $э_1$, причем для каждой угловой точки строится веер прямых с различными углами наклона $\theta$; на каждую ломаную прямую расходуется новый образец. При этом построены графики и исследованы свойства функций $N$ и $P$.

Теорема вытекает из того, что рассматриваемая любая пространственная траектория может быть приведена из плоскости $(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1)$ в плоскость $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ путем преобразований вращения и значит является следствием постулата изотропии. Функции




Фиг. 2

$$P_1 = \frac{\delta\sigma_1}{\delta э_1}, \qquad N_1 = \frac{\delta\sigma_3}{\delta э_3}$$

определены по аргументам $э_1$, $\theta$ и $\delta s$

$$\delta s = \sqrt{\delta э_1^2 + \delta э_3^2}, \qquad \delta э_1 = \delta s \cos\theta, \qquad \delta э_3 = \delta s \sin\theta$$

на основании измерения величин $\delta\sigma_1 = \sigma_1' - \sigma_1$, $\delta\sigma_3 = \sigma_3'$ $(\sigma_3 = 0)$. Переход к $P$ и $N$ из (4.9) получается заменой $э$ на $s$ в $P_1 N_1$ и представлением $\theta$ в виде (4.2).

Закон (4.9) дает выражения напряжений через деформации. Найдем обратные соотношения, то есть выражение закона в пространстве напряжений (теорема изоморфизма). Возводя в квадрат левую и правую части (4.9) и обозначая дифференциал дуги соответствующей траектории в пространстве $\sigma_5$ через $\delta\Sigma$, заметим, что $|\delta\sigma|$, вообще говоря, не равен $\delta\Sigma$, так как прямолинейный участок после точки перелома траектории в $Э_5$ не будет прямолинейным в $\sigma_5$ и значит $\delta\Sigma \geqslant |\delta\sigma|$ (фиг. 2); получим следующее выражение

$$|\delta\sigma| = \delta s\sqrt{N^2 + (P^2 - N^2)\tau^2}, \qquad |\delta\sigma| \leqslant \delta\Sigma \tag{4.10}$$

Умножая теперь (4.9) на $\sigma$, получим $\sigma\delta\sigma = P\sigma\delta э$. Обозначим угол между $\sigma$ и $\delta\sigma$ через $\vartheta$ и косинус его через $t$

$$t = \cos\vartheta = \frac{\sigma\delta\sigma}{\sigma|\delta\sigma|} \tag{4.11}$$

получим второе соотношение, связывающее $|\delta\sigma|$, $\vartheta$ с $\delta s$, $\theta$:

$$t = \tau\frac{P\delta s}{|\delta\sigma|} = \frac{\tau P}{\sqrt{N^2 + (P^2 - N^2)\tau^2}} \tag{4.12}$$

Соотношения (4.10), (4.12) выражают $|\delta\sigma| = |\sigma_1 - \sigma|$ и $t(\vartheta)$ через $P$, $N$, $\tau$ и $\delta s$, то есть через $э = \Phi^{-1}(\sigma)$, $\delta s$ и $\tau(0)$ и значит для упрочняющихся материалов позволяют обратно выразить $P$, $N$, $\tau$ и $\delta s$ через $\sigma$, $|\delta\sigma|$ и $t = \cos\vartheta$.

Предполагая, что такое преобразование выполнено и разрешая (4.9) относительно деформации $э$, получаем окончательно преобразованный закон

$$\delta э = \frac{1}{N}\delta\sigma + \frac{N-P}{NP}\frac{\sigma}{\sigma}t|\delta\sigma| = \frac{\delta\sigma}{N} + \frac{N-P}{NP}\frac{\sigma}{\sigma^2}(\sigma\delta\sigma) \tag{4.13}$$

Для рассматриваемой в $Э_5$ фиксированной ломаной прямой при увеличении $\delta s$ угол $\theta$ и $\tau$ остаются постоянными; поскольку из (4.12) при $\tau = \text{const}$ $P$ и $N$ изменяются с увеличением $\delta s$, значит угол $\vartheta$ и наклон $t = \cos\vartheta$ при движении по участку после точки излома в $\sigma_5$ будут изменяться, то есть второй участок траектории будет криволинейным.

Разлагая функции $P(s, \tau, \delta s)$, $N(s, \tau, \delta s)$ в ряд по $\delta s$

$$P = P_0(s, \tau) + \delta s \frac{\partial P}{\partial (\delta s)} + \ldots, \qquad N = N_0(s, \tau) + \delta s \frac{\partial N}{\partial (\delta s)} + \ldots$$

для весьма малых $\delta s$ получим следующие выводы:

$$|\delta\sigma| = \delta\Sigma, \qquad t_0 = \frac{\sigma\delta\sigma}{\sigma\delta\Sigma} = \frac{\tau P_0}{\sqrt{N_0^2 + (P_0^2 - N_0^2)\tau^2}} \tag{4.14}$$

$$\delta\Sigma = \delta s\sqrt{N_0^2 + (P_0^2 - N_0^2)\tau^2}$$

причем поскольку из «веера» $P_0$, $N_0$ — определенные функции $\tau$, значит первая из формул (4.14) дает выражение $\tau$ через $t$, то есть $P_0$, $N_0$ становятся известными функциями $t$. Угловой точке в $Э_5$ с поворотом $\tau$ соответствует угловая точка в $\sigma_5$ с поворотом $t_0$. Выражения напряжений через деформации и деформации через напряжения остаются в виде (4.9), (4.13) с заменой $P$, $N$, $t$ и $|d\sigma|$ на $P_0$, $N_0$, $t_0$ и $\delta\Sigma$.

**5. Деформационная анизотропия и выражения упругих деформаций через напряжения.** Возникающая в процессе пластических деформаций анизотропия, как и другие механические свойства, находятся в согласии с постулатом изотропии и его следствиями. Для простого нагружения, сопровождающегося разгрузкой по любому из возможных прямолинейных направлений, все формулы п. 4 остаются в силе и дают общие свойства упругой деформационной анизотропии, поскольку функции $P$, $N$ известны для любого $\tau = \cos\theta$ из опыта. Как известно, имеются опытные данные, показывающие, что процесс разгрузки после предшествующих пластических деформаций не является строго линейным, чем и объясняется наша оговорка о разгрузках по прямолинейным направлениям.

Однако с определенной удовлетворительной степенью точности процесс разгрузки по любой траектории является обратимым и линейным в отношении связи напряжений с деформациями. В этом предположении упругие свойства (деформационная анизотропия) после упругопластического простого нагружения полностью определяются теоретически. Припишем индекс $k$ точке $K$ конца процесса простого нагружения и всем величинам, относящимся к этой точке, и рассмотрим бесконечно малые приращения $dЭ$, $d\sigma$, отвечающие любому из путей разгрузки.

Эти величины связаны между собой законом (4.9), (4.13), принимающим теперь вид

$$d\sigma = N dЭ - (N - P)\frac{\sigma^k}{\sigma_k^2}(\sigma^k dЭ)$$

или

$$dЭ = \frac{1}{N} d\sigma + \frac{N - P}{NP}\frac{\sigma^k}{\sigma_k^2}(\sigma^k d\sigma) \tag{5.1}$$

причем у векторов индекс $k$ приписан сверху, у скаляров — снизу. По условию эти соотношения должны быть линейными относительно $\sigma$ и $Э$

не только в векторном, но и в общем смысле и значит $N$ и $P$ должны иметь постоянные (не зависящие от $\tau$ или $\sigma$, $t$) значения, то есть определяться только точкой $K$

$$P = P_k, \qquad N = N_k \tag{5.2}$$

В некоторых вариантах теории пластичности вместо общей деформации э рассматривают пластическую деформацию $э^p$, причем понимают под $э^p$ разность общей деформации и упругой $э^e$, которая вычисляется через напряжение $\sigma$ по закону Гука для первоначального (изотропного) состояния тела ($э^e = \sigma / G$); но для этого нет оснований, так как в процессе деформаций тело становится анизотропным и упругая составляющая общей деформации является не известной линейной функцией напряжения, и значит пластическая деформация $э^p$ теоретически принципиально неопределима через э и $\sigma$, если не задан путь предшествующего нагружения и не изучены упругие свойства после разгрузки. Из постулата изотропии, естественно, вытекает представление прироста пластической деформации через вектор напряжения, например, в виде (для аналитических траекторий):

$$dэ^p = Q_n \frac{d^n\sigma}{d\Sigma} d\Sigma \quad (n = 0,1,2,3,4) \tag{5.3}$$

где $Q_n$ будут более или менее сложно зависеть от внутренней геометрии траектории напряжений $\sigma$ в пространстве $\sigma_5$; при этом в эксперименте под $\varepsilon^p$ понимается измеряемая величина остаточной деформации (при разгрузке, когда $\sigma = 0$) и поэтому в принципе $Q_n$ могут быть найдены. Но соотношение (5.3) и другие подобного рода, в которых прирост тензора пластических деформаций $dэ_{ij}{}^p$ каким угодно образом выражается через тензор напряжений $\sigma_{ij}$, не представляют теории пластичности, т. е. не позволяют математически формулировать задачу о деформациях тела при неоднородном напряженном состоянии до тех пор, пока не будет указано выражение упругих деформаций

$$э^e = э - э^p \tag{5.4}$$

через напряжение $\sigma$. Только это соотношение вместе с (5.3) в конечном счете устанавливает связь между компонентами тензора напряжений и компонентами вектора перемещения в теле, то есть замыкает систему уравнений равновесия или движения.

Постулат изотропии и для упругих деформаций позволяет написать выражение, которое для аналитических траекторий всегда можно привести к одному из видов

$$\begin{aligned} э^{(e)} &= R^k \sigma + R_{n,m}{}^k \left(\sigma \frac{d^n\sigma^k}{d\Sigma_k^n}\right) \frac{d^m\sigma^k}{d\Sigma_k^m} \qquad n,m = 0,1,1,3) \\ \sigma &= S^k э + S_{n,m}{}^k \left(э \frac{d^n э^k}{ds_k{}^n}\right) \frac{d^m э^k}{ds_k^m} \qquad (n,m = 0,1,2,3) \end{aligned} \tag{5.5)}$$

Здесь векторы $d^n\sigma^k / d\,\Sigma_k^n, \ldots$ относятся к точке $k$ траектории нагружения, круглая скобка содержит скалярное произведение этих векторов на текущий вектор $\sigma$, э, а $R_{nm}$, $S_{nm}$ — параметры упругой анизотропии, зависящие от кривизны траектории нагружения до точки $K$, что отмечено индексом $k$ сверху. Отсюда, между прочим, следует, что деформационная анизотропия в самом общем случае определяется 11 ($R_{nm} = R_{mn}$) упругими «постоянными», определяющими сдвиговые свойства материала. Теперь вектор пластической деформации $э^p$ согласно (5.9) и (5.5) является вполне определенным, если «константы» $R_{mn}$ известны:

$$э^p = э - э^e$$

В рассматриваемом случае деформационной анизотропии при простом нагружении интегрирование уравнения (5.1) при условии

$$\sigma = \sigma^k, \quad э = э^k = \frac{э_k}{\sigma_k}\sigma^k = \frac{\Phi^{-1}(\sigma_k)}{'\sigma_k}\sigma^k \tag{5.6}$$

дает

$$э = э^k - \frac{\sigma}{N_k} + \frac{N_k - P_k}{N_k P_k}\frac{\sigma^k}{\sigma_k^2}(\sigma^k\sigma) - \frac{\sigma^k}{P} \tag{5.7}$$

Поскольку при $\sigma = 0$ должно быть $э = э^p$, то из (5.7) находим пластическую деформацию

$$э^p = э^k - \frac{\sigma^k}{P_k} = \frac{P_k э_k - \sigma_k}{P_k}\frac{\sigma^k}{\sigma_k} \tag{5.8}$$

и вычитая ее из (5.7), получаем выражение упругой деформации, то есть закон деформационной анизотропии:

$$э^e = \frac{1}{N}\sigma + \frac{N - P_k}{N_k P_k}\frac{\sigma^k}{\sigma_k^2}(\sigma\ \sigma^k) \tag{5.9}$$

Значит тензор упругих констант деформационной анизотропии вполне определенным образом зависит от максимального напряжения при простом нагружении $\sigma$ и от двух констант, вполне определяемых через $\sigma_k$ из простого опыта с тонкостенной трубкой на растяжение и кручение в стадии разгрузки. Из (5.9) видно, что $P_k$ есть модуль упругости в направлении $\sigma^k$, а $N_k$ — модуль в поперечном к $\sigma^k$ направлении.

Разрешая (5.9) относительно напряжения $\sigma$, получим

$$\sigma = N_k э^e - (N_k - P_k)\frac{э^k}{э_k^2}(э^k э^e) \tag{5.10}$$

Переходя к координатной форме, запишем (5.9) и (5.10) в виде

$$э_{ij}^e = \sum \alpha_{ijmn}\sigma_{mn}, \qquad \sigma_{ij} = \sum a_{ijmn} э_{mn}^e \tag{5.11}$$

При этом тензоры упругих «констант» имеют следующие выражения

$$\alpha_{ijmn} = \alpha_{mnij} = \frac{\delta_{ijmn}}{N_k} + \frac{N_k - P_k}{N_k P_k}\frac{\sigma_{ij}^k \sigma_{mn}^k}{\sigma_k^2} \tag{5.12}$$

$$a_{ijmn} = a_{mnij} = N_k \delta_{ijmn} - (N_k - P_k)\frac{э_{ij}^k э_{mn}^k}{э_k^2}$$

где $\delta_{ijmn} = 1$ только при одновременном равенстве $i = m$, $j = n$, а во всех остальных случаях равен 0. Инварианты

$$\sigma_k^2 = (\sigma_{ij}^k)^2, \qquad э_k^2 = (э_{ij}^k)^2$$

Все 11 параметров упругой анизотропии, возникающей после любого пути нагружения до точки $K$, можно найти из тех же опытов, в которых осуществляется этот путь нагружения; для этого достаточно произвести опыты на разгрузку по любым, отличным друг от друга траекториям, измерив каждый раз $\sigma$ (или $\delta\sigma$) и $э^e$ (или $\delta э^e$) и разрешив систему (5.5) относительно неизвестных $R_{mn}$.

**6. Поверхность нагружения, вторичные пластические деформации и некоторые частные случаи.** Для каждой траектории деформации $э(s)$, (в $Э_5$) или траектории напряжений $\sigma(\Sigma)$, (в $\sigma_5$) можно построить предельные поверхности, обладающие тем свойством, что при повторных нагрузках после разгрузки из точки $K$ и выходе конца вектора $э$ на предельную поверхность деформаций (в $Э_5$) и, что то же, выходе конца вектора $\sigma$ (в $\sigma_5$) на предельную поверхность напряжений (поверхность нагружения) начинают появляться вторичные пластические деформации, то есть нарушается связь (5.5). Случай неупрочняющихся материалов, когда предельная поверхность есть сфера $\sigma \equiv \sigma_k = \sigma_s$ (где $\sigma_s$ — постоянный предел текучести) и когда пространство $\sigma_5$ вырождается в четырехмерное подпространство, здесь не рассматриваем, так как в этом случае принципиально не существует однозначной зависимости $э$ от $\sigma$.

Наиболее общий вид уравнения предельной поверхности в $Э_5$ будет

$$\chi \equiv э - \eta(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = 0 \tag{6.1}$$

где инварианты $\pi_n$ есть с точностью до множителей, косинусы углов между вектором $э$ и любыми четырьмя линейно независимыми векторами, построенными в точке $K$ по заданной траектории деформации до точки $K$; в случае аналитической траектории (до точки $K$) инварианты $\pi_n$ можно взять, например, в виде

$$\pi_{n+1} = \frac{э}{э} \cdot \frac{d^n э^k}{ds_k^n} \quad (n = 0, 1, 2, 3), \qquad \text{или} \qquad \pi_n' = p_n^k \cdot \frac{э}{э} \quad (n = 1, 2, 3, 4); \tag{6.2}$$

где $p_n^k$ — четыре единичных вектора пятигранника Френе в точке $K$ траектории деформации.

В пространстве $\sigma_5$ уравнение предельной поверхности для точки $K$ будет иметь вид

$$\psi = \sigma - f(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) = 0 \tag{6.3}$$

где $\rho_n$ — четыре инварианта, аналогичные $\pi_n$. Для аналитической траектории (до точки $K$) инварианты $\rho_n$ можно взять в виде

$$\rho_{n+1} = \frac{\sigma}{\sigma\sigma_{kn}} \cdot \frac{d^n \sigma^k}{d\Sigma^n} \quad (n = 0, 1, 2, 3) \quad \left(\sigma_{kn} = \left|\frac{d^n \sigma}{d\Sigma_k^n}\right|\right) \tag{6.4}$$

так что $\rho_n$ есть косинусы углов между $\sigma$ и $d^{n-1}\sigma^k / d\Sigma_k^{n-k}$

$$\rho_1 = \rho = \frac{\sigma \cdot \sigma^k}{\sigma\sigma_k}, \qquad \rho_2 = \frac{1}{\sigma\left|\frac{d\sigma^k}{d\Sigma_k}\right|}\sigma \cdot \frac{d\sigma^k}{d\Sigma_k}, \ldots$$

Представимость поверхностей в виде (6.1), (6.3) вытекает из постулата изотропии.

Надо учесть при этом, что сам вид функций $\eta$ и $f$ зависит от траекторий $\mathfrak{э}(s)$ и $\sigma(\Sigma)$, то есть уравнения (6.1) и (6.3) являются функциональными. Поэтому переход с поверхности $\psi$ на поверхность $\psi + \delta\psi$ не может быть получен путем формального дифференцирования (6.3) по $\sigma$ и $\rho_n$, а зависит еще от точки на поверхности (6.3), в которой рассматривается $\delta\psi$, и вектора $\delta\boldsymbol{\sigma}$ в этой точке. И только в том случае, если траектория до точки $K$ вполне определенна и точка $K$ фиксирована, функции $\eta$ и $f$ становятся обычными функциями указанных в (6.1), (6.3) аргументов. Поясним подробнее эти утверждения, для чего найдем нормаль, например, к поверхности $\psi$ в некоторой ее точке $\boldsymbol{\sigma}$:

$$m\mathbf{n} = \operatorname{grad}\psi = \operatorname{grad}\sigma - \frac{\partial f}{\partial \rho_i}\operatorname{grad}\rho_i \qquad (i=1,2,3,4)$$

$$\operatorname{grad}\sigma = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sigma}, \qquad \operatorname{grad}\rho_i = -\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sigma^2}\rho_i + \frac{1}{\sigma\sigma_{k,\,i-1}}\frac{d^{i-1}\bar{\boldsymbol{\sigma}}^k}{d\Sigma_k^{i-1}} \tag{6.5}$$

причем $m$ есть модуль правой части (6.5) и потому $\mathbf{n}$ есть единичный вектор нормали к поверхности $\psi = 0$.

Рассмотрим произвольное малое приращение $\delta\boldsymbol{\sigma}$ в этой же точке $\boldsymbol{\sigma}$, имеющее нормальную составляющую

$$\delta\sigma_n = \mathbf{n}\cdot\delta\boldsymbol{\sigma} \tag{6.6}$$

По определению поверхности $\psi = 0$ пластические деформации не будут возрастать, то есть $\delta\boldsymbol{\sigma}$ будет определяться из (5.5), если

$$\delta\sigma_n = n\cdot\delta\boldsymbol{\sigma} < 0 \tag{6.7}$$

и, наоборот, будут возрастать, если

$$\delta\sigma_n = n\cdot\delta\boldsymbol{\sigma} > 0 \tag{6.8}$$

Если переход через предельную поверхность упрочняющихся материалов является непрерывным, то на поверхности $\psi = 0$ должно выполняться условие

$$\mathbf{n}\delta\boldsymbol{\sigma} = 0 \tag{6.9}$$

Равенство (6.9) представляет тождество, которому удовлетворяет функция $f$.

Поступила 29 XII 1959

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред. ПММ, 1954, XVIII, № 6, 641—666.
2. Ленский В. С. Экспериментальная проверка законов изотропии и запаздывания при сложном нагружении. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 11, 15—24.
3. Ильюшин А. А., Ленский В. С. О законах деформирования материалов при сложном нагружении. Acta Mechanica Sinica (КНР), 3, № 3, 1959, 191—206.
4. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат, 1948.