Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ПОНЯТИЯ РАЗНЫХ СКОРОСТЕЙ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕНЗОРОВ *

Л. И. Седов
(Москва)

Тензоры можно рассматривать как объекты, связанные с фиксированными частицами движущейся сплошной среды и вводить в различных смыслах индивидуальные производные по времени — скорости изменения тензоров.

Полную теорию дифференцирования тензоров любой валентности по скалярному параметру легко построить при помощи техники операций над тензорами [1,2], которые рассматриваются как инвариантные объекты, представляемые в виде символических сумм

$$\boldsymbol{T} = T^{\alpha\,\cdot\,\gamma}_{\cdot\,\beta\,\cdot}\,\mathfrak{z}_\alpha \mathfrak{z}^\beta \mathfrak{z}_\gamma \tag{1}$$

Здесь $\mathfrak{z}_\alpha$ и $\mathfrak{z}^\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ ковариантные и контрвариантные векторы координатного базиса. Векторы базиса могут быть функциями точек пространства и времени t.

Подобно тому как используются различные относительные векторы скорости в механике твердого тела, изучение движения деформируемого континуума можно производить с использованием различным образом определенных относительных скоростей тензоров.

В докладе В. Прагера приводились интуитивные соображения о четырех различных видах скоростей тензора напряжения в декартовых координатах, предложенных Няманном [3], Коттером и Ривлиным [4], Ольдройдом [5] и Трусделлом [6].

В теории пластических и упруго-вязких сред и в других случаях Прагер предлагает пользоваться определением Няманна, при котором в скорости тензора напряжения исключается эффект вращения частицы и производные по времени от инвариантов в координатных системах отсчета для тензора напряжения обращаются в нуль одновременно с этой скоростью.

Ниже, в произвольных криволинейных системах координат, устанавливается внутренняя связь между перечисленными скоростями тензоров. Введем еще другие тензорные скорости, имеющие существенное значение, и покажем, что соображения Прагера, на основе которых он указывал преимущество определения Няманна, недостаточны для фикси-

---

* Работа представляет собой развитое в деталях выступление автора в дискуссии по докладу В. Прагера «Об элементарном определении скоростей напряжения», прочитанного им на I Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике в январе 1960 г. в Москве.

рования понятия скорости тензора напряжения. Ниже указываются также дополнительные соображения, которые позволяют установить в приложениях правила использования производных в различных смыслах от тензоров по параметру.

Рассмотрим криволинейные системы координат, в которых «жонглирование» индексами осуществляется при помощи фундаментального метрического тензора

$$G = g_{ij}\text{э}^i\text{э}^j = g^{ij}\text{э}_i\text{э}_j = \delta_j^{\,i}\text{э}_i\text{э}^j$$

причем квадрат элемента длины ds представляется формулой

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha\,dx^\beta, \qquad g_{\alpha\beta} = (\text{э}_\alpha,\ \text{э}_\beta)$$

Рассмотрим некоторый подвижный континуум, заполняющий пространство непрерывным образом. Пусть индивидуализация точек континуума произведена с помощью лагранжевой системы координат ξ^1, ξ^2, ξ^3, определенных в подвижной криволинейной системе координат, вмороженной в среду с базисами $\hat{\text{э}}_i$ и $\hat{\text{э}}^i$ $(i = 1, 2, 3)$. Координаты ξ^i можно рассматривать также в неподвижной лагранжевой системе координат с базисами $\overset{\circ}{\text{э}}_i$ и $\overset{\circ}{\text{э}}{}^i$, которые совпадают с подвижной системой $\hat{\text{э}}_i$ и $\hat{\text{э}}^i$ в некоторый начальный момент времени t_0.

Обозначим через x^1, x^2, x^3 координаты точек пространства с базисами э^i и э_i в системе отсчета, относительно которой определено движение точек подвижного континуума.

Закон движения представляется функциями вида:

$$x^i = x^i\,(\xi', \xi^2, \xi^3, t)$$

Обозначим через $\mathbf{r}$ радиус-вектор точек пространства, по определению базисов имеем

$$d\mathbf{r} = dx^\alpha\text{э}_\alpha, \qquad d\mathbf{r} = d\xi^\alpha\hat{\text{э}}_\alpha, \qquad d\mathbf{r}_0 = d\xi^\alpha\overset{\circ}{\text{э}}_\alpha \tag{2}$$

Скорость частиц определена формулами

$$\mathbf{V} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\xi^i} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial t}\,\text{э}_\alpha = v^\alpha\text{э}_\alpha = \hat{v}^\alpha\hat{\text{э}}_\alpha \tag{3}$$

Очевидно, что каждому тензору, определенному в деформированном пространстве с метрикой

$$ds^2 = \hat{g}_{\alpha\beta}d\xi^\alpha\,d\xi^\beta = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta$$

соответствует несколько различных тензоров с равными компонентами, определенных в пространстве начальных состояний с метрикой

$$ds_0{}^2 = \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}d\xi^\alpha\,d\xi^\beta, \qquad \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta} = (\overset{\circ}{\text{э}}_\alpha\cdot\overset{\circ}{\text{э}}_\beta)$$

Различные тензоры получаются для разных фиксированных систем ковариантных и контрвариантных индексов, при которых осуществляется равенство компонент. Компоненты соответствующих тензоров в разных пространствах в другой системе индексов, отличной от фиксированной, получаются различными. Например

$$\boldsymbol{T} = \hat{T}^{\alpha\cdot\gamma}_{\cdot\beta\cdot}\,\hat{\text{э}}_\alpha\hat{\text{э}}^\beta\hat{\text{э}}_\gamma, \qquad \overset{\circ}{\boldsymbol{T}} = \overset{\circ}{T}{}^{\alpha\cdot\gamma}_{\cdot\beta\cdot}\,\overset{\circ}{\text{э}}_\alpha\overset{\circ}{\text{э}}{}^\beta\overset{\circ}{\text{э}}_\gamma$$

причем
$$\hat{T}^{\alpha\cdot\gamma}_{\cdot\beta\cdot} = \mathring{T}^{\alpha\cdot\gamma}_{\cdot\beta\cdot}, \qquad \hat{\boldsymbol{T}}_{\alpha\beta\cdot}^{\gamma} = \hat{g}_{\alpha\omega}\hat{T}^{\omega\cdot\gamma}_{\cdot\beta\cdot} \neq \mathring{T}_{\alpha\beta\cdot}^{\gamma} = \mathring{g}_{\alpha\omega}\mathring{T}^{\omega\cdot\gamma}_{\cdot\beta\cdot}$$

Одному тензору $\mathring{\boldsymbol{T}}$ также соответствует несколько тензоров в деформированном пространстве.

Дифференцирование тензоров любой валентности с помощью представлений (1) сводится к дифференцированию компонент и векторов базиса и вполне аналогично задаче дифференцирования векторов.

На основании (2) и (3) легко получить формулы
$$\frac{d\hat{\mathfrak{z}}_i}{dt} = \nabla_i v^\alpha \hat{\mathfrak{z}}_\alpha, \qquad \frac{d\hat{\mathfrak{z}}^i}{dt} = -\nabla_\beta v^i \hat{\mathfrak{z}}^\beta$$
$$\frac{d\mathfrak{z}_i}{dt} = v^\lambda \Gamma_{\lambda i}{}^{\alpha} \mathfrak{z}_\alpha, \qquad \frac{d\mathfrak{z}^i}{dt} = -v^\lambda \Gamma_{\lambda\beta}{}^{i} \mathfrak{z}^\beta \tag{4}$$
где
$$\Gamma_{jk}{}^{i} = \frac{1}{2} g^{i\alpha}\left(\frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\alpha}\right)$$

Введем еще декартов базис $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$, вращающийся относительно системы отсчета $\mathfrak{z}_i$ с некоторой угловой скоростью $\Omega = \Omega_\beta \mathbf{i}_\beta$. Для производных $d\mathbf{i}_\alpha / dt$ верны формулы
$$\frac{d\mathbf{i}_\alpha}{dt} = \Omega \times \mathbf{i}_\alpha = \Omega_{\beta\alpha}\mathbf{i}_\beta \tag{5}$$
При этом
$$\Omega_{21} = -\Omega_{12} = +\Omega_3, \qquad \Omega_{31} = -\Omega_{13} = -\Omega_2, \qquad \Omega_{23} = -\Omega_{32} = -\Omega_1$$
$$\Omega_{11} = \Omega_{22} = \Omega_{33} = 0, \qquad \Omega^{i}_{\cdot j} = \Omega_{ij}$$

Всякий тензор $\boldsymbol{H}$ второго ранга можно представить в следующих формах:
$$\boldsymbol{H} = h_{ij}\hat{\mathfrak{z}}^i\hat{\mathfrak{z}}^j = h^{i}_{\cdot j}\hat{\mathfrak{z}}_i\hat{\mathfrak{z}}^j = h_i^{\cdot j}\hat{\mathfrak{z}}^i\hat{\mathfrak{z}}_j = h^{ij}\hat{\mathfrak{z}}_i\hat{\mathfrak{z}}_j = h'^{ij}\mathfrak{z}_i\mathfrak{z}_j = h^{*ij}\mathbf{i}_i\mathbf{i}_j \tag{6}$$

Системы $\mathfrak{z}_i$ и $\mathring{\mathfrak{z}}_i$ можно считать декартовыми. Система $\hat{\mathfrak{z}}_i$, рассматриваемая с течением времени, по существу криволинейная. Если положить $t_0 = t$, то можно принять, что все три системы в данный момент времени совпадают (они могут быть криволинейными или декартовыми).

Тензору $\boldsymbol{H}$ соответствуют различные тензоры
$$\mathring{\boldsymbol{H}}_1 = h_{ij}\mathring{\mathfrak{z}}^i\mathring{\mathfrak{z}}^j, \qquad \mathring{\boldsymbol{H}}_2 = h^{i}_{\cdot j}\mathring{\mathfrak{z}}_i\mathring{\mathfrak{z}}^j, \qquad \mathring{\boldsymbol{H}}_3 = h_i^{\cdot j}\mathring{\mathfrak{z}}^i\mathring{\mathfrak{z}}_j, \qquad \mathring{\boldsymbol{H}}_4 = h^{ij}\mathring{\mathfrak{z}}_i\mathring{\mathfrak{z}}_j \tag{7}$$

Все введенные разным способом компоненты тензоров $\boldsymbol{H}$ и $\mathring{\boldsymbol{H}}_i$ будем рассматривать как функции лагранжевых переменных ξ^i и времени t. На основании (4) и (5) из (7) и (6) различные индивидуальные производные по времени t представятся формулами
$$\mathring{V}_1 = \frac{d\mathring{\boldsymbol{H}}_1}{dt} = \frac{dh_{ij}}{dt}\mathring{\mathfrak{z}}^i\mathring{\mathfrak{z}}^j, \qquad \mathring{V}_2 = \frac{dh^{i}_{\cdot j}}{dt}\mathring{\mathfrak{z}}_i\mathring{\mathfrak{z}}^j, \qquad \mathring{V}_3 = \frac{dh^{ij}}{dt}\mathring{\mathfrak{z}}_i\mathring{\mathfrak{z}}_j \tag{8}$$
$$\frac{d\boldsymbol{H}}{dt} = \left(\frac{dh_{ij}}{dt} - h_{\omega j}\nabla_i v^\omega - h_{i\omega}\nabla_j v^\omega\right)\hat{\mathfrak{z}}^i\hat{\mathfrak{z}}^j = \left(\frac{dh^{i}_{\cdot j}}{dt} + h_j^{\,\omega}\nabla_\omega v^i - h^{i}_{\cdot\omega}\nabla_j v^\omega\right)\hat{\mathfrak{z}}_i\hat{\mathfrak{z}}^j =$$
$$= \left(\frac{dh^{ij}}{dt} + h^{\omega j}\nabla_\omega v^i + h^{i\omega}\nabla_\omega v^j\right)\hat{\mathfrak{z}}_i\hat{\mathfrak{z}}_j = \left(\frac{dh'^{ij}}{dt} + v'^\lambda \Gamma'_{\lambda\omega}{}^{i} h^{\omega j} + v'^\lambda \Gamma'_{\lambda\omega}{}^{j} h^{i\omega}\right)\mathfrak{z}_i\mathfrak{z}_j =$$
$$= \left(\frac{dh^{*ij}}{dt} + h^{*\omega j}\Omega^{i}_{\cdot\omega} + h^{*i\omega}\Omega^{j}_{\cdot\omega}\right)\mathbf{i}_i\mathbf{i}_j \tag{9}$$

Аналогичное выражение для производных от $h_{i\cdot}^{\cdot j}$ здесь для сокращения числа формул не выписано.

Полагая, что в данный момент времени базисы $э_i$ и $\hat{э}_i$ совпадают, получим следующие формулы, верные в криволинейных системах координат:

$$\frac{dh_{ij}}{dt} = \frac{dh'_{ij}}{dt} + h_{\omega j}\frac{\partial v^{\omega}}{\partial x^i} + h_{i\omega}\frac{\partial v^{\omega}}{\partial x^j} \tag{10}$$

$$\frac{dh^{ij}}{dt} = \frac{dh'^{ij}}{dt} - h^{\omega j}\frac{\partial v^i}{\partial x^{\omega}} - h^{i\omega}\frac{\partial v^i}{\partial x^{\omega}} \tag{11}$$

$$\frac{dh^{i\cdot}_{\cdot j}}{dt} = \frac{dh'^{i\cdot}_{\cdot j}}{dt} - h^{\omega\cdot}_{\cdot j}\frac{\partial v^i}{\partial x^{\omega}} + h^{i\cdot}_{\cdot\omega}\frac{\partial v^{\omega}}{\partial x^j} \tag{12}$$

Если h_{ij} — симметричный тензор, то тензоры (10) и (11) симметричны, тензор (12) и тензор для $dh_{i\cdot}^{\cdot j}/dt$ вообще несимметричны.

Полагая, что система $\mathbf{i}_i$ совпадает с системой $э_i$, получим еще одну формулу в декартовых осях, верную при любом строении индексов

$$\frac{dh^{*ij}}{dt} = \frac{dh'^{ij}}{dt} - h'^{\alpha j}\Omega^{\,i\cdot}_{\cdot\alpha} - h'^{i\alpha}\Omega^{\cdot j}_{\cdot\,\alpha} \tag{13}$$

В формулах (10), (11) и (12) слева стоят компоненты различных тензоров, этим тензорам в пространстве начальных состояний соответствуют разные тензоры $\mathring{V}_i$ и соответственно разные тензоры $\hat{V}_i$ в деформированном пространстве. Величины dh'_{ij}/dt и др. не являются компонентами тензоров, их можно рассматривать как компоненты тензоров только в декартовой системе координат.

Формулы (10) и (11) в декартовых координатах рассматривались в работе Прагера, причем формула (11) отвечает производной, введенной Ольдройдом [4], а формула (10) — производной, введенной Коттером и Ривлиным [3]. Производные для $dh^{i}_{\cdot j}/dt$ и $dh_{i\cdot}^{\cdot j}/dt$ не были отмечены в работе Прагера.

В нелинейной теории упругости отношения компонент тензора напряжения к плотности $p^{ij}/\rho = \sigma^{ij}$ являются термодинамическими величинами, имеющими потенциал. Производная (11), составленная для σ^{ij}, после замены σ^{ij} через p^{ij}/ρ и умножения на ρ является производной[1] от p^{ij} в смысле Трусделла [6]. Наряду с этой производной, можно рассмотреть другие аналогичные производные, вытекающие из формул (10), (12) и (13).

При обобщении теории малых упругих и пластических деформаций на случай конечных деформаций, замена в аналогичных формулах тензора p^{ij} через тензор σ^{ij} может представляться вполне целесообразной.

Рассмотрим тензор конечных деформаций ε и тензор e скоростей деформации. По определению имеем

$$\varepsilon = \varepsilon_{ij}\hat{э}^i\hat{э}^j = \varepsilon_{ij}{}'э^iэ^j \qquad \left(\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\hat{g}_{ij} - \mathring{g}_{ij}\right)\right) \tag{14}$$

$$e = e_{ij}\hat{э}^i\hat{э}^j = e_{ij}{}'э^iэ^j \qquad \left(e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i\right)\right) \tag{15}$$

[1] Этот факт был выяснен аспирантом В. Д. Бондером.

В момент совпадения базисов $\hat{э}^i$ и $э^i$ имеем

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}', \qquad e_{ij} = e_{ij}', \qquad \varepsilon_j^{\ i} = \varepsilon_j'^{\ i} \text{ и т. д.}$$

Учитывая это, из определений (14), (15) и формул (10), (11) и (12) получим

$$e \sim \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = e_{ij} = \frac{d\varepsilon_{ij}'}{dt} + \varepsilon_{\omega j}\frac{\partial v^\omega}{\partial x^\alpha} + \varepsilon_{i\omega}\frac{\partial v_\omega}{\partial x^j}$$

$$e' \sim \frac{d\varepsilon^{i\cdot}_{\cdot j}}{dt} = e^{i\cdot}_{\cdot\alpha}\left(\delta^{\alpha\cdot}_{\cdot j} - 2\varepsilon^{\alpha\cdot}_{\cdot j}\right) = \frac{d\varepsilon_j'^{\ i}}{dt} - \varepsilon^{\alpha\cdot}_{\cdot j}\frac{\partial v^i}{\partial x^\alpha} + \varepsilon^{i\cdot}_{\cdot\alpha}\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^j} \tag{16}$$

$$e'' \sim \frac{d\varepsilon^{ij}}{dt} = e^{\alpha\beta}\left(\delta_\alpha^{\ i}\delta_\beta^{\ j} - 2\delta_\alpha^{\ i}\varepsilon_\beta^{\ j} - 2\delta^{j\cdot}_{\cdot\beta}\varepsilon^{i\cdot}_{\cdot\alpha}\right) = \frac{d\varepsilon'^{ij}}{dt} - \varepsilon^{\omega j}\frac{\partial v^i}{\partial x^\omega} - \varepsilon^{i\omega}\frac{\partial v^j}{\partial x^\omega}$$

Эти системы производных образуют соответственно различные тензоры e, e', e'', которые обращаются в нуль при движении среды как твердого тела. Для бесконечно малых деформаций $e = e' = e''$.

Системы производных

$$\frac{d\varepsilon_{ij}'}{dt}, \qquad \frac{d\varepsilon'^{i\cdot}_{\cdot j}}{dt}, \qquad \frac{d\varepsilon'^{ij}}{dt}$$

в криволинейных координатах не являются тензорами, они отличны от нуля при движении среды как твердого тела.

Если базис $\mathbf{i}_i$ вращается с угловой скоростью главных осей тензора e, равной вихрю, то в любой системе координат верны формулы

$$\Omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial y^\beta} - \frac{\partial v_\beta}{\partial y^\alpha}\right) \tag{17}$$

В этом случае формула (13) определяет компоненты производного тензора, введенного Нýманном.

Полагая $\hat{э}_i = э_i = \mathbf{i}_i$ и учитывая (17), из (12) и (13) получим

$$\frac{dh^{i\cdot}_{\cdot j}}{dt} = \frac{dh^{*i\cdot}_{\cdot j}}{dt} - h_{\alpha j}e_{\alpha i} + h_{i\alpha}e_{\alpha j} = \frac{dh^{*i\cdot}_{\cdot j}}{dt} + A_{ij} \tag{18}$$

Легко видеть, что если тензор h_{ij} симметричный, то тензор $dh^{*i\cdot}_{\cdot j}/dt$ симметричный, а тензор A_{ij} антисимметричный.

Дальше рассмотрим случаи, когда $\boldsymbol{H}$ — симметричный тензор. Очевидно, что $A_{ij} = 0$, если главные оси тензоров $\boldsymbol{H}$ и e совпадают. Если $\boldsymbol{P}$ есть тензор напряжений, то в случае нелинейно-упругого изотропного тела тензоры $\boldsymbol{P}$ и e имеют вообще различные главные оси и в этом случае $A_{ij} \neq 0$. Если $\boldsymbol{H} = \varepsilon$, то верны равенства

$$\frac{d\varepsilon^i_j}{dt} = \left(\frac{d\varepsilon^i_j}{dt}\right)^* + \varepsilon^{i\cdot}_{\cdot\alpha}e^{\alpha\cdot}_{\cdot j} - \varepsilon^{\alpha\cdot}_{\cdot j}e^{i\cdot}_{\cdot\alpha} \tag{19}$$

Системы инвариантов для тензора $\boldsymbol{H}$ и $\overset{\circ}{\boldsymbol{H}}_2$ одинаковы, но вообще отличаются от инвариантов тензоров $\overset{\circ}{H}_1$ и $\overset{\circ}{H}_4$. Например, вторые инварианты для тензоров $\overset{\circ}{\boldsymbol{H}}_1$ и $\boldsymbol{H}$ можно определить формулами

$$\overset{\circ}{J}_2 = \overset{\circ}{h}{}^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}\overset{\circ}{h}{}^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} = \overset{\circ}{g}_{\alpha\lambda}\overset{\circ}{g}_{\beta\mu}h^{\lambda\beta}h^{\mu\alpha}$$

$$\hat{J}_2 = h^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}h^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} = \hat{g}_{\alpha\lambda}\hat{g}_{\beta\mu}h^{\lambda\beta}h^{\mu\alpha} = 4\varepsilon_{\lambda\alpha}\varepsilon_{\beta\mu}h^{\lambda\beta}h^{\mu\alpha} + 4\varepsilon_{\alpha\lambda}\check{g}_{\beta\mu}h^{\lambda\beta}h^{\mu\alpha} + \check{J}_2$$

Если производные dh^{ij}/dt, определенные формулами (11), равны нулю, то $d\mathring{J}_2/dt = 0$, а величина $d\hat{J}_2/dt$ вообще отлична от нуля.

Очевидно, что производные от любых инвариантов тензора $\mathring{\boldsymbol{H}}_1$ обращаются в нуль одновременно с dh^{ij}/dt, определенными формулами (11), а производные от инвариантов $\mathring{\boldsymbol{H}}_4$ обращаются в нуль одновременно с производными dh_{ij}/dt, определенными формулами (10).

Легко видеть, что производные от любых инвариантов тензора $\mathring{\boldsymbol{H}}_2$ в пространстве начальных состояний и от тензора $\boldsymbol{H}$ в деформированном пространстве равны нулю, когда $dh^{i\cdot}_{\cdot j}/dt = 0$ согласно (12) или $dh^{*i\cdot}_{\cdot j}/dt = 0$ согласно (13) при выполнении равенства (18). Формулы для элементарных приращений от соответственно равных между собой любых инвариантов тензоров $\mathring{\boldsymbol{H}}_2$ и $\boldsymbol{H}$ одинаковы через приращения $dh^{i\cdot}_{\cdot j}$ и $dh^{*i\cdot}_{\cdot j}$, связанных между собой формулой (18). Этот вывод верен и в том случае, когда A_{ij}— произвольный антисимметричный тензор.

При формулировании физических закономерностей рассматриваются механические процессы в частице с точки зрения Лагранжа. Составление уравнений движения относительно систем отсчета можно проводить в системах лагранжевых неподвижных координат, взятых в пространстве начальных состояний или подвижных лагранжевых системах в дерформированном пространстве. В обоих случаях можно рассматривать скорости изменения тензоров (для тензоров деформации, напряжения, отношения тензора напряжения к плотности и т. д.) в смыслах, определенных формулами (10), (11) и (12).

Использование производных по времени (13) в смысле Яуманна может быть удобным потому, что в этом случае исключается эффект вращения осей тензоров скоростей деформации и соответствующая скорость симметричного тензора является симметричным тензором.

Эффекты, связанные с различием производных по времени тензоров, взятых в различных, определенных выше, базисах могут оказаться существенными и в теории движения сплошной среды при бесконечно малых деформациях, когда перемещения и вращения осей деформации конечны.

Поступила 15 III 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Основы нелинейной механики сплошной среды. Изд. Москов. Гос. Унив. 1959 г. Записи лекций, читанных автором в Моск. Гос. Унив. в 1956—59 г.
2. Lagally M. Vorlesungen über Vektor-Rechnung. Leipzig. 1928; руск. пер. Лагали М. Векторное исчисление. М.—Л., ОНТИ. 1936.
3. Jaumann G. Grundlagen der Bewegungslehre, Leipzig, 1905, see also Sitz. be. Akad. Wiss, Wien (IIq) 120 (1911).
4. Cotter B. A. and Rivlin R. S, Tensors associated with time-dependent stress Q. Appl. Math. 13 (1955) 177.; русск. перевод. Сб. механика 1960, № 4 (62).
5. Oldroyd J. G. On the formulation of rheogical equation of state. Proc. Roy. Soc. (A) 200 (1950) 523.
6. Truesdell C. Correction and additions to «The mechanical foundations of elasticity and fluid dinamics». J. Rat. Mech., Analysis 2 (1953) 593.