О ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ЦИФРОВЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН В ОДНОМ ИЗ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ ПОЛУЧЕНИЯ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А. Л. Кудрявцев

(Ташкент)

Рассматривается способ вписывания наибольшего по площади полукруга в область определенной формы. Знание этого способа обеспечивает возможность применения электронных цифровых вычислительных машин для получения конформных отображений на области, близкие к верхней полуплоскости, что примыкает к работам М. А. Лаврентьева и Б. В. Шабата [1,2]. При этом используется одно из отображений, производимых функцией Жуковского.

Рассмотрим односвязную область G, расположенную в верхней полуплоскости и содержащую $i\infty$. Дополнение D области G до открытой верхней полуплоскости назовем для краткости «вырезом», соответствующим G. Высотой h выреза D будем считать наибольшее из расстояний от точек C (границы G с D) до вещественной оси.

Отобразим область G на верхнюю полуплоскость с точностью ε, т. е. отобразим G на область G', для выреза D' которой $h' \leqslant \varepsilon$.

Воспользуемся функцией Жуковского

$$w - a = z - a + \frac{R^2}{z - a} \tag{1}$$

Эта функция отображает на верхнюю полуплоскость область G с вырезом D, имеющим вид полукруга радиуса R с центром в некоторой точке $z = a$ вещественной оси. Для простоты считаем, что граница C задается однозначной непрерывной функцией $y = y(x)$.

В область $D = D_1$ вписываем полуокружность $L = L_1$ по возможности наибольшего радиуса $R = R_1$ с центром в некоторой точке $a = a_1$ вещественной оси. Преобразование

$$w_1 - a_1 = z - a_1 + \frac{R_1^2}{z - a_1} \tag{2}$$

переведет $G = G_1$ в некоторую область G_2 с вырезом D_2 высоты h_2. При этом вырез D_1 понижается на всем протяжении. Поэтому $h_2 < h_1$. Если $h_2 \leqslant \varepsilon$, задача решена.

Если $h_2 > \varepsilon$, то в $D = D_2$ вписываем полуокружность L_2 по возможности наибольшего радиуса R_2 с центром в некоторой точке a_2 вещественной оси. Преобразование

$$w_2 - a_2 = w_1 - a_2 + \frac{R_2^2}{w_1 - a_2} \tag{3}$$

переведет $G = G_2$ в некоторую область G_3 с вырезом D_3 высоты h_3. При этом вырез D_2 понижается на всем протяжении. Поэтому $h_3 < h_2$. Если еще $h_3 \leqslant \varepsilon$, задача решена. Если $h_3 > \varepsilon$, то продолжаем процесс до тех пор, пока не будет получено $h_n \leqslant \varepsilon$.

Таким образом, простые формулы при каждом последовательном преобразовании переводят одну или несколько точек границы C на вещественную ось.

Изложенный метод особенно удобен для определения линий тока в гидродинамике. Действительно, после нескольких преобразований можно добиться неравенства $h \leqslant \varepsilon$, поэтому можно считать, что линия тока с асимптотой $v = c$ (на $\pm\infty$ граница C касается вещественной оси) располагается между прямыми $v = c$ и $v = c + h$. Обратное преобразование $z = z(w)$ отобразит полосу, расположенную между прямыми $v = c$ и $v = c + h$, на криволинейную полосу в плоскости z. Нижний край этой полосы служит асимптотой линии тока, соответствующей на плоскости w линии тока с асимптотой $v = c$. Ширина ε_1 криволинейной полосы в наиболее утолщенной части мало отличается от ε. Поэтому линии тока определяются с точностью $\varepsilon_1 \approx \varepsilon$.

Недостатком изложенного способа будет то, что вычисления приходится производить для каждой точки в отдельности. Поэтому очень важно использовать при решении рассматриваемой задачи ЭЦВМ. Вычисления при помощи ЭЦВМ можно разбить на два этапа:

1) вычисление последовательных значений a_i и R_i;

2) выполнение последовательности обратных преобразований вида

$$z = x + iy = \frac{1}{2}\left(w + a + \sqrt{(w-a)^2 - 4R^2}\right) \qquad (4)$$

или, точнее, вида

$$z = \frac{1}{2}\left\{u + a + \operatorname{sign}\left[(u-a)v\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{g(u, v) + f(u, v)}\right\} + \\ + \frac{1}{2}i\left\{v + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{g(u, v) - f(u, v)}\right\} \qquad (5)$$

Здесь

$$g(u, v) = \sqrt{[(u-a)^2 - v^2 - 4R^2]^2 + 4(u-a)^2v^2},\ f(u, v) = (u-a)^2 - v^2 - 4R^2 \qquad (6)$$

Очевидно, что составление программы для вычисления этого выражения на ЭЦВМ не составляет принципиальной трудности. Рассмотрим способ получения a_i и R_i.

Пусть даны два точечных множества $\{N'\}$ и $\{N''\}$, каждое из которых содержит конечное число точек, расположенных не ниже вещественной оси. Точка N с абсциссой a_0 является единственной общей точкой $\{N'\}$ и $\{N''\}$. Она располагается не ниже других точек множеств над вещественной осью. Точки множеств имеют различные абсциссы. При этом точки N', не совпадающие с N, имеют абсциссы, меньшие a_0, а точки N'', отличные от N, имеют абсциссы, бо́льшие a_0.

Можно доказать, что на вещественной оси всегда найдется единственная точка A, которая одинаково удалена от $\{N'\}$ и $\{N''\}$, если под расстоянием от A до $\{N\}$ понимать наименьшее из расстояний AN.

Можно доказать также, что точка A может быть найдена методом последовательных приближений, состоящим в следующем. В качестве нулевого приближения берем A_0 — проекцию точки N на вещественную ось. Находим ближайшие к A_0 точку N_0' из $\{N'\}$ и точку N_0'' из $\{N''\}$. Пусть $A_0N_0' = R_0'$ и $A_0N_0'' = R_0''$. Если $R_0' = R_0''$, задача решена, если $R_0' \neq R_0''$, то на оси ox находим точку A_1, равноудаленную от N_0' и N_0''. Для точки A_1 находим ближайшие точку N_1' из $\{N'\}$ и точку N_1'' из $\{N''\}$. Пусть $A_1N_1' = R_1'$ и $A_1N_1'' = R_1''$. Если $R_1' = R_1''$, то задача решена, если $R_1' \neq R_1''$, то находим на оси ox точку A_2, равноудаленную от N_1' и N_1'' и т. д. Процесс заканчивается после конечного числа указанных действий. Аналитически a_1 (абсцисса точки A_1) находится по a_0 (абсциссе точки A_0), x_0' и x_0'' (абсциссам точек N_0' и N_0''), а также по величинам R_0' и R_0'' по формуле

$$a_1 = a_0 + \frac{(R_0')^2 - (R_0'')^2}{2(x_0' - x_0'')} \qquad (7)$$

Аналогично находится a_2 по величинам a_1, x_1', x_1'', R_1' и R_1'' и т. д.

Взяв за $\{N'\}$ некоторое множество точек на C' (части C, расположенной не правее точки N), а за $\{N''\}$ — некоторое множество точек на C'' (части C, расположенной не левее N), мы тем самым будем иметь метод получения вписанных полукругов и определения их центров с высокой степенью точности.

После сказанного легко составить схему программы.

1. Задаем шаг Δx. Получаем $\{x\}$ — множество абсцисс точек кривой C. Заносим эти значения в накопители.

2. По формуле $y = y(x)$ находим множество соответствующих ординат $\{y\}$. Заносим эти значения в накопители.

3. Определяем h_1 — наибольшую из полученных ординат y. Пусть такую ординату имеет точка N_1.

4. Взяв в качестве нулевого приближения центра вписанного полукруга абсциссу $a_{1,0}$ точки N_1, определяем $R_{1,0}'$ и $R_{1,0}''$, смысл которых ясен из предыдущего. Если $R_{1,0}' = R_{1,0}''$, то $a_1 = a_{1,0}$ и $R_1 = R_{1,2}' = R_{1,0}''$.

5. Если $R_{1,0}' \neq R_{1,0}''$, то уточняем положение a_1 по формуле

$$a_{1,1} = a_{1,0} + \frac{(R_{1,0}')^2 - (R_{1,0}'')^2}{2(x_{1,0}' - x_{1,0}'')} \qquad (8)$$

где смысл $x_{1,0}'$ и $x_{1,0}''$ также ясен из предыдущего.

Затем снова находим $R'_{1,1}$ и $R''_{1,1}$. Если они равны, задача решена, если они не равны, производим новое уточнение положения центра. Пункты 4 и 5 создают первый цикл, в результате выполнения которого определяется положение центра вписанного полукруга a_1. Признаком окончания цикла служит равенство $R_1 = R'_{1,n} = R''_{1,n}$. В запоминающее устройство выдаются a_1 и R_1.

6. Производим вычисления для всех пар (x, y) по формуле (2).

Затем из найденных значений $v_1 (w_1 = u_1 + iv_1)$ выбираем наибольшее. Пусть такую ординату имеет точка N_2.

Если $v_1 \leqslant \varepsilon$, решение закончено, если $v_1 > \varepsilon$, то находим новые центр и радиус новой вписанной полуокружности и т. д. Пунктами 3, 4, 5 и 6 создается второй цикл, в результате выполнения, которого получаем последовательные значения a_i и $R_i (i = 1, 2)$. Критерием окончания цикла служит неравенство $h = h_n \leqslant \varepsilon$, где ε определяет точность конформного отображения.

Заметим, что машинное время можно сократить, если рассматривать на C_i каждый раз лишь те точки, которые находятся на части кривой C_i, проходящей через точку N_i и имеющей концы на вещественной оси.

Поступила 27 IV 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А. Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики. М.— Л., 1947.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.—Л., 1951.

Поправка к заметке М. В. Третьякова *Об обтекании проницаемого контура* (ПММ, 1958, т. XXII, вып. 2, стр. 220—225).

В работе допущено ошибочное утверждение, будто интеграл

$$\int_L \gamma(S) \frac{\sin \lambda}{r} dS$$

будет постоянным для всякого гладкого замкнутого контура. Этот интеграл будет постоянным только для кругового замкнутого контура и, следовательно, результаты второго раздела статьи будут справедливыми только для кругового замкнутого равномерно проницаемого контура.

Весьма признателен В. С. Рогожину за указание допущенной ошибки.

М. В. Третьяков

Поправка к статье Ю. Д. Шмыглевского *О сверхзвуковых профилях, имеющих минимальное сопротивление* (ПММ, 1958, т. XXII, вып. 2, стр. 269—273).

В статье рассматривается вариационная задача об определении наилучшей формы сверхзвукового профиля при заданном удлинении и скорости набегающего потока. Изучена область применимости теории, указаны подобласти, в которых искомые профили являются вогнутыми или выпуклыми. Отмечено, что выпуклые профили должны иметь излом. Однако, в настоящее время удалось выяснить, что предложенный метод построения выпуклых профилей, хотя он и позволяет найти профили лучшие, чем прямолинейные, не дает решения вариационной задачи. Ошибка вызвана неучетом того факта, что на участке характеристики BC (фиг. 1), определяемом изломом контура, искомые функции в каждой точке являются функционалами от формы ударной волны. Соответствующая вариационная задача не может быть даже сформулирована, поскольку не известно явное выражение этих функционалов. Та же ошибка имеет место и в моей статье «О телах вращения, имеющих минимальное сопротивление на сверхзвуковых скоростях» (ДАН СССР, 1959, т. 126, № 5, стр. 958—960), в которой рассматривается случай той же задачи.

Ю. Д. Шмыглевский