ОБ УЛУЧШЕНИИ СХОДИМОСТИ МЕТОДА ФУРЬЕ

Р. П. Поплавский

(Москва)

1. Известно, что для улучшения сходимости обычного ряда Фурье применяется метод А. Н. Крылова [1].

Можно предложить аналогичный метод для решения граничных задач гармонического типа в области, представляющей обобщенный прямоугольник. Обобщенными прямоугольниками будем называть области, границы которых являются координатными линиями в системах ортогональных координат ξ, η, допускающих разделение переменных для уравнения Лапласа. Кроме того, будем предполагать, что область является конечной не только в системе декартовых координат x, y, но и в системе ξ, η. Тогда без ограничения общности можно считать, что граница $S = S_\xi + S_\eta$ области $\overline{\Omega} = \Omega + S$ задана уравнениями

$$\xi = \pm\alpha\,(S_\xi), \qquad \eta = \pm\beta\,(S_\eta) \qquad (0 < \alpha,\ \beta < \infty) \tag{1}$$

Известно, что в этих условиях решение граничной задачи 1, 2 и 3-го рода для уравнения Пуассона

$$\Delta w = \frac{1}{h^2(\xi, \eta)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}\right) = q(X), \qquad X \in \overline{\Omega} \tag{2}$$

полученное методом Фурье, состоит в общем случае из суммы частного решения $\Psi(X)$ уравнения (2) и двух бесконечных рядов

$$w = \Psi + u, \qquad u = u_\xi + u_\eta \tag{3}$$

Оба ряда (u_ξ, u_η) являются гармоническими функциями двух переменных, удовлетворяющими соответствующим однородным граничным условиям на одноименных границах (S_ξ, S_η), а на разноименных превращаются в обычные ряды Фурье. Из этих граничных условий (для $u_\xi(\xi, \beta)$ на S_η, для $u_\eta(\alpha, \eta)$ на S_ξ), преобразованных выделением частного решения Ψ (3), и находятся коэффициенты рядов, так же как и при обычном разложении функции в ряд Фурье.

В рассматриваемом случае, однако, непосредственное применение метода А. Н. Крылова невозможно прежде всего потому, что u_ξ и u_η являются функциями от двух переменных.

Кроме того, в отличие от обычного разложения в ряд Фурье здесь разлагаемая функция определена неоднозначно, так как она существенно зависит от выбора частного решения Ψ. Поэтому из многообразия частных решений уравнения (2) должно быть выбрано такое Ψ, которое обеспечивает наилучшую для данной граничной задачи сходимость (не только наилучшее убывание коэффициентов ряда, но и наименьшие модули их).

2. Покажем, что эти требования выполняются, если выбрать частное решение, которое удовлетворяет граничным условиям на двух противоположных длинных сторонах обобщенного прямоугольника (1). Эти две стороны составляют часть границы (для определенности S_ξ), удовлетворяющую соотношению

$$\frac{|S - S_\xi|}{|S_\xi|} = \frac{|S_\eta|}{|S_\xi|} = \sigma \leqslant 1 \tag{4}$$

Будем рассматривать в дальнейшем обобщенные прямоугольники (1) в декартовой, полярной и эллиптической системах координат.

Если нагрузка $q(X)$ в (2) и граничные функции на каждой из четырех сторон прямоугольника (1) могут быть достаточно хорошо аппроксимированы полиномами, то, как показано в [2], всегда может быть найдено частное решение, удовлетворяющее граничным условиям на любых двух противоположных сторонах этого прямоугольника. Если частное решение связано с противоположными длинными сторонами [S_ξ по (4)], то, следуя [2], будем называть его главной частью решения и обозначать Ψ_0.

Рассмотрим параллельно задачу Дирихле и задачу Неймана. Функции, относящиеся к задаче Дирихле, будем отмечать индексом плюс внизу, к задаче Неймана — индексом минус внизу. Там, где индексы отсутствуют, это относится к обеим граничным задачам.

Для определенности будем считать w_+ симметричной, w_- антисимметричной по обеим координатам ξ, η. Имеем тогда граничные условия

$$\begin{aligned} &(w_+)_{\xi=\pm\alpha} = f_{2+}(\eta), && (w_+)_{\eta=\pm\beta} = f_{1+}(\xi) \\ &\left(\pm\frac{\partial w_-}{\partial \xi}\right)_{\xi=\pm\alpha} = \pm f_{2-}(\eta), && \left(\pm\frac{\partial w_-}{\partial \eta}\right)_{\eta=\pm\beta} = \pm f_{1-}(\xi) \end{aligned} \tag{5}$$

Выделяя частное решение Ψ_0 уравнения (2), удовлетворяющее граничным условиям (5) на границе S_ξ, заданной в (1), (4), получим, прежде всего, что в (3) $u_\eta \equiv 0$. Для u_ξ получим соответствующие ряды:

$$u_{\xi+} = \sum_{(k)} A_k^\xi \frac{\operatorname{ch}(\lambda_\xi k\eta)}{\operatorname{ch}(\lambda_\xi k\beta)} \cos(\lambda_\xi k\xi), \qquad u_{\xi-} = \sum_{(k)} B_k^\xi \frac{\operatorname{sh}(\lambda_\xi k\eta)}{\lambda_\xi k \operatorname{ch}(\lambda_\xi k\beta)} \sin(\lambda_\xi k\xi) \tag{6}$$

$$(\lambda_\xi = \pi / 2\alpha, \qquad k = 2r + 1)$$

Интегрируя на S_η по частям, получим выражения для коэффициентов

$$A_k^\xi = \frac{4}{\pi}(-1)^{\frac{k+1}{2}} \lambda_\xi \sum_{(\nu)} \frac{M_{2\nu}^\xi}{(\lambda_\xi k)^{2\nu+1}}, \qquad B_k^\xi = \frac{4}{\pi}(-1)^{\frac{k+1}{2}} \lambda_\xi \sum_{(\nu)} \frac{M_{2\nu+1}^\xi}{(\lambda_\xi k)^{2\nu+2}} \tag{7}$$

Здесь $M_{2\nu}^\xi$, $M_{2\nu+1}^\xi$ соответствуют скачкам разлагаемой функции в методе А. Н. Крылова [1] и выражаются просто через дифференциальные операции в углах (α, β) от f в (5) и

$$q^* \equiv qh^2 \tag{8}$$

где q — нагрузка, а h — коэффициент Ляме (2). Из закона построения Ψ_0 [2] имеем

$$M_0^\xi = (-f_{1+} + f_{2+})_{\alpha,\beta}, \qquad M_1^\xi = \left(-\frac{\partial f_1}{\partial \xi} + \frac{\partial f_{2-}}{\partial \eta}\right)_{\alpha,\beta} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} M_{2\nu}^\xi &= \left((-1)^{\nu+1}\frac{\partial^{2\nu} f_{1+}}{\partial \xi^{2\nu}} + \frac{\partial^{2\nu} f_{2+}}{\partial \eta^{2\nu}} + (-1)^\nu \left[\frac{\partial^{2(\nu-1)} q^*}{\partial \xi^{2(\nu-1)}} - \frac{\partial^{2(\nu-1)} q^*}{\partial \xi^{2(\nu-2)}\partial \eta^2} + \ldots + \frac{\partial^{2(\nu-1)} q^*}{\partial \eta^{2(\nu-1)}}\right]\right)_{\alpha,\beta} \\ M_{2\nu+1}^\xi &= \left((-1)^{\nu+1}\frac{\partial^{2\nu+1} f_{1-}}{\partial \xi^{2\nu+1}} + \frac{\partial^{2\nu+1} f_{2-}}{\partial \eta^{2\nu+1}} + \right. \\ &\qquad \left. + (-1)^\nu \left[\frac{\partial^{2\nu} q^*}{\partial \xi^{2\nu-1}\partial \eta} - \frac{\partial^{2\nu} q^*}{\partial \xi^{2\nu-3}\partial \eta^3} + \ldots + \frac{\partial^{2\nu} q^*}{\partial \xi\, \partial \eta^{2\nu-1}}\right]\right)_{\alpha,\beta} \end{aligned} \tag{10}$$

3. Таким образом, видно, что метод приводит лишь к одному ряду $u = \boldsymbol{u}_\xi$.

Далее, из (7), (9), (10) видно, что метод выделения главной части решения Ψ_0 обеспечивает естественным образом наилучшее убывание коэффициентов, определяемое данной граничной задачей. Действительно, если для f выполнены условия непрерывности (отсутствие скачков в f_+ и в первых производных f_- в углах), то $M_0^\xi = M_1^\xi = 0$, а A_k^ξ и B_k^ξ убывают не медленнее k^{-3} и k^{-4} соответственно. При использовании произвольного Ψ в методе Фурье для получения такой же сходимости требуется применение искусственных приемов, так как необходимо обратить в нуль в углах не линейные комбинации в (9), а каждый из членов в (9) в отдельности. Далее может оказаться, что

$$M_2^\xi = \left(\frac{\partial^2 f_{1+}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f_{2+}}{\partial \eta^2} - q^*\right)_{\alpha,\beta} = 0, \qquad M_3^\xi = \left(\frac{\partial^3 f_{1-}}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^3 f_{2-}}{\partial \eta^3} - \frac{\partial^2 q^*}{\partial \xi\, \partial \eta}\right)_{\alpha,\beta} = 0 \tag{11}$$

т. е. убывание A_k^ξ и B_k^ξ еще сильнее ($1/k^5$ и $1/k^6$ соответственно) и т. д. (для M_4, M_5 и далее). Несмотря на то, что граничная задача сама по себе определяет весьма сильное убывание коэффициентов, реализуемое при выделении Ψ_0, при произвольных Ψ этого, как легко видеть, не будет.

Все сказанное до сих пор, естественно, справедливо также и для частного решения, связанного с двумя противоположными короткими сторонами S_η. Для u_η в (6), (7), (9), (10), (11) индексы ξ нужно заменить на η, поменять местами α и β, а из вывода (10) следует

$$M^{\eta}_{2\nu,\,2\nu+1} = (-1)^{\nu+1} M^{\xi}_{2\nu,\,2\nu+1} \tag{12}$$

Однако лишь при выделении Ψ_0 обеспечивается не только наилучшее убывание коэффициентов, но и наименьший модуль остаточного ряда. Можно показать, что при заданной погрешности

$$\varepsilon_0 = \frac{\|w - w_n\|}{\|w\|} = \frac{\|u - u_n\|}{\|u\|} \frac{\|u\|}{\|w\|} \tag{13}$$

количество удерживаемых членов n_ξ при выделении Ψ_0 тем меньше соответствующего количества членов n_η (при связи с короткими сторонами), чем меньше σ в (4).

Имеет место оценка

$$n_\xi \approx n_\eta C \sigma \tag{14}$$

где C близко к единице. В полярных координатах ($\xi = \ln r$, $\alpha^2 = \rho$)

$$C \approx \left\{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{\rho-1}{\rho+1}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{\rho-1}{\rho+1}\right)^4 + \ldots\right\}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho-1}{\rho}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\rho-1}{\rho}\right)^2 + \ldots\right\}^{-1/\tau} \tag{16}$$

где для задачи Дирихле $\tau \geqslant 6$ при $M_0 = 0$, для задачи Неймана $\tau = 6$ при $M_1 \neq 0$, $\tau \geqslant 10$ при $M_1 = 0$ и т. д.

Можно показать также, что при произвольных Ψ (даже обеспечивающих такое же убывание коэффициентов, как и Ψ_0) всегда $n \geqslant n_\xi$. Для прямоугольника в декартовых координатах можно, кроме того, получить оценку для среднего $n_{\text{ср}}$ (по всем произвольным Ψ, обеспечивающим такое же убывание коэффициентов, что и Ψ_0):

$$n > n_\xi / \sigma = n_\eta, \qquad \sigma < 1 \tag{16}$$

Отметим попутно, что имеется единственное исключение из только что отмеченного правила для прямоугольников в декартовых координатах x, y. Если задача Дирихле симметрична относительно (x / α, y / β) и $M_0 = 0$, $M_2 \neq 0$, то $A_k^\xi = A_k^\eta$, т. е. две последовательности коэффициентов вырождаются в одну, когда частное решение связано с описанным эллипсом с полуосями ($\sqrt{2}\alpha$, $\sqrt{2}\beta$). В этом случае в качестве главной части решения Ψ_0 следует выбрать частное решение, связанное с указанным эллипсом. Как показано в [2], это всегда можно сделать, предварительно приведя граничные условия к однородным и построив затем частное решение, удовлетворяющее однородным условиям на указанном эллипсе.

Возвращаясь к Ψ_0, связанному с S_ξ, покажем, что метод позволяет аналогично методу А. Н. Крылова [1] дополнительно улучшить сходимость ряда. Действительно, из (9) — (12) видно, что для того, чтобы искусственно получить $M_2 = 0$, достаточно знать решение простой задачи с нагрузкой $q^* = 1$ и $f_1 = f_2 = 0$, для $M_3 = 0$ — решение задачи с $q^* = \xi\eta$ и $f_1 = f_2 = 0$, для $M_4 = 0$ — с $q^* = \xi^2$ и т. д. Решения этих простейших задач, суперпонируемых с искомым, легко могут быть найдены тем же методом выделения главной части решения.

Заметим, что описанный метод, кроме того, позволяет находить коэффициенты ряда A_k, B_k, как видно из (6), (7), без интегрирования — через дифференциальные операции от нагрузки и граничных функций в углах. В тех случаях, когда ряд по ν в (7) сходится, это справедливо для всех A_k, B_k. В тех же случаях, когда ряд по ν может расходиться (если q и f заданы в виде полиномов высоких степеней l по x, y, а прямоугольник — в координатах ξ, η), то вычисление коэффициентов по формуле (7) также возможно, но лишь начиная примерно с $k > [l / \lambda_\xi]$.

Поступила 3 XI 1958

Институт радиотехники
и электроники АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики. Гл. VI. Изд-во АН СССР, 1933.
2. Поплавский Р. П. Об одном методе расчета пластин и мембран. Метод выделения главной части решения. Инж. сб., т. 16, стр. 149, Изд-во АН СССР, 1953.