Введем характерные скорости (11)

$$u_1 = \frac{kh + \sqrt{(kh-k-1)^2 + Sk(k+1)}}{k+1} \qquad u_2 = \frac{kh - \sqrt{(kh-k-1)^2 + Sk(k+1)}}{k+1}$$

являющиеся корнями уравнения

$$u^2 - \frac{2kh}{k+1}u + \frac{2kh}{k+1} - \frac{kS}{k+1} - 1 = 0 \tag{12}$$

Тогда уравнение (10) примет вид

$$\exp\left(2R_m \int_0^x u\,dx\right) = -\frac{(k+1)(u-u_1)(u-u_2)}{Sku} \tag{13}$$

Логарифмируя и дифференцируя уравнение (13), получаем

$$2R_m\,dx = \frac{u(u-u_1) + u(u-u_2) - (u-u_1)(u-u_2)}{u^2(u-u_1)(u-u_2)}\,du \tag{14}$$

Проинтегрировав (14) и использовав граничное условие для скорости, находим

$$2R_m x = \frac{1}{u_1}\ln\frac{u-u_1}{u(1-u_1)} + \frac{1}{u_2}\ln\frac{u-u_2}{u(1-u_2)} + \frac{1-u}{u} \tag{15}$$

Уравнение (14) можно переписать в виде

$$2R_m\,dx = \frac{u^2 - u_1u_2}{u^2(u-u_1)(u-u_2)}\,du \qquad \left(u_1u_2 = \frac{1 + {}^1/_2(k-1)M_0^2}{{}^1/_2(k+1)M_0^2}\right) \tag{16}$$

При $M_0 > 1$ получаем непрерывное замедление потока от скорости $u = u_1$ при $x = -\infty$ до скорости $u = \sqrt{u_1u_2}$ (местное число $M = 1$). При $M_0 < 1$ поток непрерывно ускоряется от скорости $u = u_2$ при $x = -\infty$ до скорости $u = \sqrt{u_1u_2}$.

Для напряженности магнитного поля H имеем формулу

$$H = \sqrt{-\frac{(k+1)(u-u_1)(u-u_2)}{Sku}} \tag{17}$$

Давление p, плотность ρ и температура T находятся соответственно из уравнений (6) и второго уравнения (3).

Поступила 4 XI 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Голицын Г. С., Станюкович К. П. Некоторые вопросы магнитогазодинамики с учетом конечной проводимости. ЖЭТФ, 1957, т. 33, вып. 6 (12), 1417.

ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

С. А. Регирер

(Воркута)

1. В работе Гартмана [1], а также в ряде последующих исследований (например, [2]) изучалось течение вязкой электропроводной жидкости между параллельными плоскими стенками при условии, что все параметры неизменны в направлении потока. Это ограничение в части, касающейся магнитного поля, может быть устранено, и тогда удается получить новое точное решение уравнений магнитной гидродинамики, более общее, нежели решения [1,2].

Для основных уравнений

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}\right) = -\nabla p^* + \eta\Delta\mathbf{V} + \varkappa(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{H} = (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{V} + \lambda\Delta\mathbf{H} \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \tag{1.3}$$

где $p^* = p + \mu H^2 / 8\pi$, $\varkappa = \mu / 4\pi$, $\lambda = c^2 / 4\pi\sigma\mu$ и остальные обозначения общепринятые, будем искать решение вида

$$v_x = v(y),\ v_y = v_z = 0,\ H_x = H_x(x, y),\ H_y = H_y(x, y),\ H_z = 0,\ p^* = p^*(x, y)$$

Это решение соответствует установившемуся течению в направлении оси x при наличии некоторого, пока неопределенного плоского магнитного поля. Неизвестные функции, очевидно, удовлетворяют системе

$$\frac{\partial p^*}{\partial x} = \varkappa\left(H_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + H_y \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) + \eta v'' \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial y} = \varkappa\left(H_x \frac{\partial H_y}{\partial x} + H_y \frac{\partial H_y}{\partial y}\right) \tag{1.5}$$

$$v \frac{\partial H_x}{\partial x} = H_y v' + \lambda \triangle H_x, \qquad v \frac{\partial H_y}{\partial x} = \lambda \triangle H_y \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0 \tag{1.7}$$

Введем в эти уравнения векторный потенциал магнитного поля A, полагая $H_x = \partial A / \partial y$, $H_y = -\partial A / \partial x$. Исключая затем p^* из (1.4), (1.5) и интегрируя соответственно по x и y уравнения (1.6), получим нелинейную систему

$$\varkappa \frac{D(\triangle A,\ A)}{D(x,\ y)} + \eta v''' = 0, \qquad v \frac{\partial A}{\partial x} = \lambda \triangle A + E \tag{1.8}$$

где постоянная E пропорциональна z-компоненте вектора электрического поля и в общем случае не равна нулю. Если исключить отсюда v, принимая во внимание дополнительное условие $\partial v / \partial x = 0$, то придем к двум уравнениям, которым одновременно должен удовлетворять потенциал A:

$$\varkappa \frac{D(\triangle A,\ A)}{D(x,\ y)} + \eta \frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(\frac{\lambda \triangle A + E}{\partial A / \partial x}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x} \frac{\lambda \triangle A + E}{\partial A / \partial x} = 0 \tag{1.9}$$

Нетрудно видеть, что эти соотношения выполняются при

$$A = -xH_0(y) + \gamma(y) \tag{1.10}$$

причем H_0 и γ определяются из совместной системы двух уравнений. Других решений для A, по-видимому, не существует, так как первое уравнение (1.8) подстановкой $\triangle A$ из второго (1.8) преобразуется к виду

$$v''' - \frac{\varkappa}{\lambda\eta}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 v' + \frac{\varkappa}{\lambda\eta} \frac{D(\partial A / \partial x,\ A)}{D(x,\ y)} v = 0 \tag{1.11}$$

и только (1.10) обеспечивает здесь независимость коэффициентов от x.

Решение (1.10) переходит в решение Гартмана [1] при $H_0 = \mathrm{const}$.

2. Подставив выражение (1.10) в уравнение (1.11) и во второе уравнение (1.8), получим

$$v''' - \frac{2\varkappa}{\lambda\eta} \frac{H_0^2}{2} v' - \frac{\varkappa}{\lambda\eta}\left(\frac{H_0^2}{2}\right)' v = 0 \tag{2.1}$$

$$-vH_0 = \lambda(-xH_0'' + \gamma'') + E \tag{2.2}$$

Из последнего уравнения следует, что $H_0'' = 0$, т. е. $H_0 = hy + h_0$ и h, h_0 — постоянные, которые далее будем считать заданными. Уравнение (2.1) при этом имеет общий интеграл [3]

$$v = H_0(C_1 u_1^2 + C_2 u_1 u_2 + C_3 u_2^2) \tag{2.3}$$

где

$$u_1 = I_{1/4}(mH_0^2 / 4h), \qquad u_2 = K_{1/4}(mH_0^2 / 4h), \qquad m = \sqrt{\varkappa / \lambda\eta}$$

Найдем теперь величину γ', определяющую продольную компоненту поля $H_x = -hx + \gamma'$, из уравнения (2.2), учитывая, что $H_0'' = 0$:

$$\gamma' = C_4 - \frac{Ey}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int vH_0 dy \tag{2.4}$$

Для выполнения квадратуры в (2.4) используются формулы

$$\begin{gathered}\int z^{1/2} I_{1/4}^2(z)\,dz = z^{3/2}\left[I_{1/4}^2(z) - I_{3/4}^2(z) - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} I_{3/4}(z) K_{3/4}(z) - \frac{2}{\pi^2} K_{3/4}^2(z)\right] \\ \int z^{1/2} I_{1/4}(z) K_{1/4}(z)\,dz = z^{3/2}\left[I_{1/4}(z) K_{1/4}(z) - I_{3/4}(z) K_{3/4}(z)\right] \\ \int z^{1/2} K_{1/4}^2(z)\,dz = z^{3/2}\left[K_{1/4}^2(z) - K_{3/4}^2(z)\right]\end{gathered} \tag{2.5}$$

которые выведены по второму методу Ломмеля [4] с учетом рекуррентных формул для $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ и соотношения $K_\nu(z) = \pi\,[I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)]\,/\,2\sin\nu\pi$.

При помощи (2.5) находим

$$\begin{gathered}\gamma' = C_4 - \frac{Ey}{\lambda} - \frac{H_0^3}{2h\lambda}\left[C_1\left(u_1^2 - w_1^2 - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} w_1 w_2 - \frac{2}{\pi^2} w_2^2\right) + \right. \\ \left. + C_2\,(u_1 u_2 - w_1 w_2) + C_3\,(u_2^2 - w_2^2)\right]\end{gathered} \tag{2.6}$$

где

$$w_1 = I_{3/4}(mH_0^2\,/\,4h), \qquad w_2 = K_{3/4}(mH_0^2\,/\,4h)$$

Формулы (2.3), (2.6) содержат пять постоянных C_i $(i = 1, \ldots, 4)$ и E, четыре из которых определяются из граничных условий для скорости и продольной компоненты поля H_x. Одна постоянная связана с градиентом давления. Для выяснения этой связи в уравнения (1.4), (1.5) подставим $H_y = H_0$, $H_x = -xh + \gamma'$; получим

$$\frac{\partial p^*}{\partial x} = \varkappa\,(xh^2 + H_0\gamma'' - h\gamma') + \eta v'', \qquad \frac{\partial p^*}{\partial y} = \varkappa h H_0 \tag{2.7}$$

Дифференцируя второе уравнение по x, получим $\partial^2 p^*\,/\,\partial x \partial y = 0$, т. е. $\partial p^*\,/\,\partial x$ не зависит от y. Первое уравнение (2.7) представим в виде

$$f(x) = \varkappa\,(H_0\gamma'' - h\gamma') + \eta v'' \qquad (f(x) = \partial p^*\,/\,\partial x - \varkappa x h^2) \tag{2.8}$$

Правая часть (2.8) зависит только от y, поэтому $f(x) = f_0 = \mathrm{const}$. После подстановки в (2.8) найденных выражений для $v(y)$, $\gamma'(y)$ все слагаемые с C_1, C_2, C_3 исчезнут, в результате будем иметь

$$f_0 = -\varkappa\,(Eh_0 + C_4\lambda h) \tag{2.9}$$

Давление p^* может быть вычислено из уравнений

$$\frac{\partial p^*}{\partial x} = -\varkappa\,(Eh_0 + C_4\lambda h + xh^2), \qquad \frac{\partial p^*}{\partial y} = \varkappa h\,(hy + h_0) \tag{2.10}$$

двумя квадратурами с точностью до аддитивной постоянной p_0^*:

$$p^* = p_0^* + \varkappa\left[\frac{h^2y^2}{2} + hh_0 y - \frac{h^2x^2}{2} - (Eh_0 + C_4\lambda h)\,x\right] \tag{2.11}$$

Отсюда чисто гидродинамическое давление p найдется как $p^* - \mu H^2\,/\,8\pi$.

3. Налагая соответствующие граничные условия, из общих формул (2.3), (2.6), (2.11) можно получить решения задач о течении между движущимися или неподвижными параллельными стенками, обобщающие результаты работ [1,2] на случай, когда поперечная компонента поля линейно зависит от поперечной координаты. Ниже рассматривается лишь предельный случай течения в полупространстве.

Будем считать заданными значения скорости и продольной компоненты поля на границе полупространства и в бесконечности, обозначая их соответственно

$$U, \quad H_x(0) = \gamma'(0) - hx, \quad v_\infty, \quad H_{x\infty} = \gamma_\infty' - hx \qquad (h > 0,\ h_0 > 0)$$

Из асимптотического представления [4] функций u_i, w_i при больших положительных значениях аргумента и $\nu > 0$ (3.1)

$$I_\nu(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left[1 - \frac{4\nu^2 - 1}{8z} + o(z^{-4})\right], \quad K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}\left[1 + \frac{4\nu^2 - 1}{8z} + o(z^{-4})\right]$$

следует, что

$$\begin{gathered}H_0 u_1^2 \to \infty, \quad H_0 u_1 u_2 \to 0, \quad H_0 u_2^2 \to 0, \quad H_0^3 u_1^2 \to \infty, \quad H_0^3 u_2^2 \to 0, \quad H_0^3 w_1^2 \to \infty \\ H_0^3 w_2^2 \to 0, \quad H_0^3\,(u_1 u_2 - w_1 w_2) \to 0 \quad \text{при} \quad y \to \infty\ (H_0 \to \infty)\end{gathered}$$

Поэтому, требуя, чтобы v и γ' были ограничены при $y \to \infty$, получим $C_1 = E = 0$, т. е.

$$v = H_0 (C_2 u_1 u_2 + C_3 u_2^2), \qquad \gamma' = C_4 - \frac{H_0^3}{2h\lambda} [C_2 (u_1 u_2 - w_1 w_2) + C_3 (u_2^2 - w_2^2)] \tag{3.2}$$

причем $v_\infty = 0$. Вычисляя C_2, C_3, C_4 из граничных условий, найдем окончательно

$$v = \frac{UH_0}{h_0} \frac{[w_{20}^2 - (1 + N) u_{20}^2] u_1 u_2 + [(1 + N) u_{10} u_{20} - w_{10} w_{20}] u_2^2}{u_{20} w_{20} (u_{10} w_{20} - u_{20} w_{10})} \tag{3.3}$$

$$\gamma' = \gamma_\infty' - \frac{\Gamma H_0^3}{h_0^3} \frac{[w_{20}^2 - (1 + N) u_{20}^2] (u_1 u_2 - w_1 w_2) + [(1 + N) u_{10} u_{20} - w_{10} w_{20}] (u_2^2 - w_2^2)}{N u_{20} w_{20} (u_{10} w_{20} - u_{20} w_{10})}$$

$$(\Gamma = \gamma'(0) - \gamma_\infty', \quad N = 2h\lambda\Gamma / h_0^2 U) \tag{3.4}$$

Здесь u_{i0}, w_{i0} — значения u_i, w_i на границе $y = 0$ $(H_0 = h_0)$.

Перейдем теперь к пределу при $h \to 0$. Пользуясь асимптотическими оценками (3.1), получим решение вида

$$v = U - m\lambda\Gamma (1 - e^{-mh_0 y}), \qquad \gamma' = \gamma_\infty' + \Gamma e^{-mh_0 y} \tag{3.5}$$

Здесь, в предельном случае, v_∞ отлично от нуля, причем

$$\frac{U - v_\infty}{\Gamma} = m\lambda \tag{3.6}$$

Если рассмотреть решение той же задачи при $h = 0$, начиная с уравнений (2.1), (2.2), найдем прежде всего [1,2]

$$v = C_1 + C_2 e^{mh_0 y} + C_3 e^{-mh_0 y}, \quad \gamma' = C_4 - \frac{Ey}{\lambda} - \frac{C_1 h_0 y}{\lambda} - \frac{C_2}{m\lambda} e^{mh_0 y} + \frac{C_3}{m\lambda} e^{-mh_0 y} \tag{3.7}$$

Отсюда

$$E + C_1 h_0 = 0, \qquad C_2 = 0, \qquad C_1 = v_\infty, \qquad C_4 = \gamma_\infty', \qquad C_3 = U - v_\infty$$

Кроме того, из второго уравнения (3.7) вытекает, что $C_3 = m\lambda\Gamma$.

Таким образом, снова приходим к решению (3.5) и равенству (3.6), связывающему четыре граничных условия задачи. Равенство (3.6) для частного случая $\gamma'(0) = 0$ было указано без вывода в работе [5], где изучались нестационарное течение в полупространстве и предельное стационарное течение.

Аналогичным образом может быть рассмотрена задача и в случае $h < 0$. Однако при этом потребуется более тонкий анализ асимптотических свойств цилиндрических функций для больших отрицательных значений аргумента. Отметим еще, что в случае разных знаков h и h_0 величина H_0 обращается в нуль при $y = -h_0 / h$, однако выражения (3.3) и (3.4) остаются при этом ограниченными.

В заключение следует указать, что в настоящей статье отправной точкой было по существу отыскание плоских магнитных полей, в присутствии которых возможно плоское прямолинейное движение жидкости ($v_x = v(y)$, $v_y = v_z = 0$). В результате было найдено поле вида $\mathbf{H} = (\gamma'(y) - hx)\,\mathbf{i} + (hy + h_0)\,\mathbf{j}$. Это решение принадлежит к весьма широкому классу точных решений уравнений магнитной гидродинамики, который был недавно найден и в общих чертах исследован в статье Линя [6] на основе формальных требований к структуре векторов $\mathbf{V}$, $\mathbf{H}$, ∇p^*.

Поступила 18 VIII 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Hartmann J. Hg-Dynamics, I. Kgl. Danske Vidensk. Selskab. Math.-fys. Medd., vol. 15, No. 6, 1937.
2. Lehnert B. On the behaviour of an electrically conductive liquid in a magnetic field. Arkiv f. fys., vol. 5, No. 1—2, 1952.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Изд-во иностр. лит-ры, М., 1950.
4. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. 1, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1949.
5. Регирер С. А. Нестационарная задача магнитной гидродинамики для полупространства. Докл. АН СССР, 1959, т. 127, № 5.
6. Lin C. C. Note on a class of exact solutions in magnetohydrodynamics. Arch. Ration. Mech. a. Anal., vol. 1, No. 5, 1958.