ОДНОМЕРНОЕ ТЕЧЕНИЕ СЖИМАЕМОГО ГАЗА С КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ ПРИ НАЛИЧИИ ПОПЕРЕЧНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

И. Б. Чекмарев

(Ленинград)

В работе Г. С. Голицына и К. П. Станюковича [1] проанализированы уравнения одномерного течения сжимаемого проводящего газа при наличии поперечного магнитного поля.

Ниже приводится интегрирование указанной системы уравнений для случая одномерного стационарного течения проводящего совершенного газа при наличии поперечного магнитного поля H. Вязкостью и теплопроводностью газа пренебрегаем. Ось x имеет направление движения газа. В сечении $x = 0$ заданы параметры состояния газа, его скорость и напряженность магнитного поля, т. е.

$$u = u_0, \quad p = p_0, \quad \rho = \rho_0, \quad T = T_0, \quad H = H_0 \quad \text{при } x = 0 \tag{1}$$

Предположим, что токи, текущие в газе, замыкаются на землю так, что объемные электрические заряды не возникают и электрическое поле отсутствует.

Примем за масштабы координаты x, скорости газа u, давления p, плотности ρ, температуры T и напряженности магнитного поля H соответственно величины L, u_0, p_0, ρ_0, T_0, H_0, где L — характерный размер; в дальнейшем будем предполагать все величины безразмерными, не прибегая к специальным обозначениям.

Тогда исходные уравнения задачи в безразмерной форме будут

$$\rho u \frac{du}{dx} + \frac{1}{kM_0^2} \frac{dp}{dx} = -SH \frac{dH}{dx}, \qquad \frac{d}{dx} \rho u = 0 \tag{2}$$

$$\frac{1}{k-1} \rho u \frac{dT}{dx} + p \frac{du}{dx} = \frac{SkM_0^2}{R_m} \left(\frac{dH}{dx}\right)^2, \quad p = \rho T, \quad \frac{dH}{dx} = R_m u H \tag{3}$$

где

$$M_0^2 = \frac{u_0^2}{kp_0 / \rho_0}, \quad k = \frac{c_p}{c_v}, \quad S = \frac{\mu H_0^2}{\rho_0 u_0^2}, \quad R_m = \sigma \mu u_0 L \tag{4}$$

Граничные условия задачи (1) в безразмерных величинах имеют вид

$$u = p = \rho = T = H = 1 \quad \text{при } x = 0 \tag{5}$$

Из уравнений (2) находим два интеграла системы

$$u + \frac{1}{kM_0^2} p + S \frac{H^2}{2} = h = 1 + \frac{1}{kM_0^2} + \frac{S}{2}, \quad \rho u = 1 \tag{6}$$

Исключая из первых двух уравнений (3) температуру T, а затем из полученного уравнения при помощи первых из равенств (2) и (6) давление p, получаем уравнение

$$\frac{k}{k-1}\left(h - \frac{k+1}{k} u\right) \frac{du}{dx} = \frac{k}{k-1} \frac{S}{2} H^2 \frac{du}{dx} + \frac{S}{k-1} u H \frac{dH}{dx} + \frac{S}{R_m}\left(\frac{dH}{dx}\right)^2 \tag{7}$$

Интегрируя третье уравнение (3) при граничном условии $H = 1$ при $x = 0$, находим выражение напряженности магнитного поля через скорость газа

$$H = \exp\left(R_m \int_0^x u\,dx\right) \tag{8}$$

Подставляя (8) в (7), получаем уравнение

$$\left(h - \frac{k+1}{k} u\right) \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{S}{2} u \exp\left(2R_m \int_0^x u\,dx\right)\right] \tag{9}$$

Интегрируя (9) при граничном условии $u = 1$ при $x = 0$, имеем

$$\exp\left(2R_m \int_0^x u\,dx\right) = \frac{2}{Su}\left(hu - \frac{k+1}{2k} u^2 - h + \frac{k+1}{2k} + \frac{S}{2}\right) \tag{10}$$

Введем характерные скорости (11)

$$u_1 = \frac{kh + \sqrt{(kh - k - 1)^2 + Sk\,(k+1)}}{k+1} \qquad u_2 = \frac{kh - \sqrt{(kh - k - 1)^2 + Sk\,(k+1)}}{k+1}$$

являющиеся корнями уравнения

$$u^2 - \frac{2kh}{k+1}\,u + \frac{2kh}{k+1} - \frac{kS}{k+1} - 1 = 0 \tag{12}$$

Тогда уравнение (10) примет вид

$$\exp\left(2R_m \int_0^x u\,dx\right) = -\frac{(k+1)\,(u-u_1)\,(u-u_2)}{Sku} \tag{13}$$

Логарифмируя и дифференцируя уравнение (13), получаем

$$2R_m\,dx = \frac{u\,(u-u_1) + u\,(u-u_2) - (u-u_1)\,(u-u_2)}{u^2\,(u-u_1)\,(u-u_2)}\,du \tag{14}$$

Проинтегрировав (14) и использовав граничное условие для скорости, находим

$$2R_m\,x = \frac{1}{u_1}\ln\frac{u-u_1}{u\,(1-u_1)} + \frac{1}{u_2}\ln\frac{u-u_2}{u\,(1-u_2)} + \frac{1-u}{u} \tag{15}$$

Уравнение (14) можно переписать в виде

$$2R_m\,dx = \frac{u^2 - u_1u_2}{u^2\,(u-u_1)\,(u-u_2)}\,du \qquad \left(u_1u_2 = \frac{1 + {}^1/_2\,(k-1)\,M_0^2}{{}^1/_2\,(k+1)\,M_0^2}\right) \tag{16}$$

При $M_0 > 1$ получаем непрерывное замедление потока от скорости $u = u_1$ при $x = -\infty$ до скорости $u = \sqrt{u_1u_2}$ (местное число $M = 1$). При $M_0 < 1$ поток непрерывно ускоряется от скорости $u = u_2$ при $x = -\infty$ до скорости $u = \sqrt{u_1u_2}$.

Для напряженности магнитного поля H имеем формулу

$$H = \sqrt{-\frac{(k+1)\,(u-u_1)\,(u-u_2)}{Sku}} \tag{17}$$

Давление p, плотность ρ и температура T находятся соответственно из уравнений (6) и второго уравнения (3).

Поступила 4 XI 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Голицын Г. С., Станюкович К. П. Некоторые вопросы магнитогазодинамики с учетом конечной проводимости. ЖЭТФ, 1957, т. 33, вып. 6 (12), 1417.

ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

С. А. Регирер

(Воркута)

1. В работе Гартмана [1], а также в ряде последующих исследований (например, [2]) изучалось течение вязкой электропроводной жидкости между параллельными плоскими стенками при условии, что все параметры неизменны в направлении потока. Это ограничение в части, касающейся магнитного поля, может быть устранено, и тогда удается получить новое точное решение уравнений магнитной гидродинамики, более общее, нежели решения [1,2].

Для основных уравнений

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\,\mathbf{V}\right) = -\nabla p^* + \eta\Delta\mathbf{V} + \varkappa\,(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\,\mathbf{H} = (\mathbf{H}\nabla)\,\mathbf{V} + \lambda\Delta\mathbf{H} \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \tag{1.3}$$