выясним знак градиента температуры около стенки. Продифференцировав уравнение (2.8) по R и полагая в полученном выражении $R = 1$, будем иметь

$$\left.\frac{d\vartheta}{dR}\right|_{R=1} = \sigma k(\vartheta_1 - \vartheta_0) - 2\sigma\beta^2 + 4\sigma m^2 + \frac{8\sigma k}{k+2}\beta(1+\beta) - \sigma k(1+\beta)^2 \qquad (2.9)$$

Если $d\vartheta / dR < 0$ при $R = 1$, то тепло переходит от цилиндра к жидкости, и, наоборот, если $d\vartheta / dR$ при $R = 1$, то тепло переходит от жидкости к цилиндру. Следовательно, критерием перехода тепла от нагретого цилиндра к движущейся жидкости (или наоборот) будет следующее неравенство:

$$T_1 - T_0 \gtrless \left[\frac{2\beta^2}{k} - \frac{4m^2}{k} - \frac{8\beta(1+\beta)}{k+2} + (1+\beta)^2\right]\frac{U_0^2}{2gc_p} \qquad (2.10)$$

или, используя (2.5), как и в случае обтекания пластинки потенциальным потоком, будем иметь

$$T_1 - T_0 \gtrless T_e - T_0 \qquad \text{(нагретая стенка} \rightleftarrows \text{жидкость)} \qquad (2.11)$$

Из выражений (2.11) и (2.6) следует, что неоднородность набегающего потока может существенно повысить или, наоборот, снизить охлаждающее действие жидкости, обтекающей цилиндр. По существу все будет зависеть от знака неоднородности набегающего потока β. При $\beta < 0$ градиент температур и толщина теплового пограничного слоя будут меньше, чем в случае обтекания цилиндра потенциальным потоком, и, наоборот, при $\beta > 0$ — больше. Иллюстрацией этого может служить приведенное в нижней части фигуры распределение температур $\vartheta - \vartheta_0$ в пограничном слое, рассчитанное по формуле (2.8) для $m = 10^{-4}$, $R = 10^{-6}$, $\vartheta_1 = \vartheta_0$ и $\sigma = 0.72$ при трех значениях завихренности набегающего потока $\beta = -0.1$, 0 и 0.1.

Поступила 22 XI 1959

ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ СТРУЙНОГО ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕГОСЯ ПО ПОВЕРХНОСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ТОНКИМ СЛОЕМ

Ф. И. Франкль

(Нальчик)

Течения типа, указанного в заглавии, могут иметь место при ударе струи гидромонитора о породу, в лопатках ковшевых (пелтоновых) гидротурбин и т. д.

Введем на обтекаемой поверхности тела криволинейные координаты x_1, x_2, причем координатные линии должны быть направлены вдоль линий главных кривизн. Третья координата

$$x_3 = h \qquad (1)$$

равна длине нормали, отсчитываемой от поверхности твердого тела.

Тогда получаем систему ортогональных координат; линейный элемент при этом равняется

$$ds = \sqrt{H_1^2dx_1^2 + H_2^2dx_2^2 + H_3^2dx_3^2} = \sqrt{H_1^2dx_1^2 + H_2^2dx_2^2 + dh^2} \qquad (2)$$

Свободная поверхность течения пусть дается уравнением

$$h = h^\circ(x_1, x_2) \qquad (3)$$

Величину h° будем считать первого порядка малости. На этой поверхности давление равняется атмосферному и, следовательно, скорость потока имеет постоянное значение. Следовательно, имеем на свободной поверхности

$$\frac{1}{H_1^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{1}{H_2^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2 + \frac{1}{H_3^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2 = w_0^2 \qquad (4)$$

На обтекаемой поверхности ($x_3 = 0$) имеем

$$\partial\varphi / \partial x_3 = 0 \qquad (5)$$

поэтому последний член в правой части уравнения (4) — мал, второго порядка и может быть опущен. Итак, имеем

$$\frac{1}{H_1^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{1}{H_2^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2 = w_0^2 \tag{6}$$

Рассмотрим далее предельный случай нулевой толщины жидкого слоя. В этом случае имеем предельное значение

$$\varphi = \varphi_0(x_1, x_2) \tag{7}$$

Эта функция определяется из уравнения первого порядка

$$\frac{1}{H_1^2}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{1}{H_2^2}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2}\right)^2 = w_0^2 \tag{8}$$

которое может быть решено известными методами (см. [1], гл. IX, § 5). Это решение можно представить продолженным в окрестность обтекаемой поверхности на основании уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_3}\right) = 0 \tag{9}$$

и начального условия

$$\partial\varphi_0 / \partial x_3 = 0 \qquad \text{при } x_3 = 0 \tag{10}$$

Тогда представим функцию φ в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \tag{11}$$

причем φ_1 — величина первого порядка малости. Подставляя выражение (11) в (6) и пользуясь уравнением (8), получим

$$\frac{2}{H_1^2}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} + \frac{2}{H_2^2}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} + h^\circ\left[\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{H_1^2}\right)\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{H_2^2}\right)\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2}\right)^2\right] = 0$$

или

$$\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} + \frac{1}{H_2^2}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} + h^\circ\left[\frac{\varkappa_1}{H_1^2}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{\varkappa_2}{H_2^2}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2}\right)^2\right] = 0 \tag{12}$$

где $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — главные кривизны обтекаемой поверхности.

Толщину слоя $h^\circ(x_1, x_2)$ находим на основании уравнения неразрывности.

Пусть dn — расстояние между двумя бесконечно близкими линиями тока на обтекаемой поверхности, а dV — секундный объемный расход жидкости между поверхностями тока, образуемыми в первом приближении нормалями к обтекаемой поверхности, возведенными в этих линиях тока. Тогда имеем

$$h^\circ w\,dn = dV, \qquad \text{или} \qquad h^\circ = \frac{1}{w}\frac{dV}{dn}$$

При этом с точностью до ошибки второго порядка малости можно заменить скорость w постоянным значением нулевого приближения w_0, а также определить линию тока по нулевому приближению, т. е. на основании уравнения (8). Итак, имеем

$$h^\circ(x_1, x_2) = \frac{1}{w_0}\frac{dV}{dn}$$

Это выражение подставим в уравнение (12), после чего оно превращается в уравнение первого порядка и решается известными методами (см. [1], гл. III, § 3).

Для вычисления давления на поверхности обтекаемого тела решение уравнения (12) не требуется, поскольку в первом приближении

$$p - p_0 = \rho h^\circ\left[\frac{\varkappa_1}{H_1^2}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{\varkappa_2}{H_2^2}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2}\right)^2\right] \tag{13}$$

где p_0 — давление атмосферы, $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — главные кривизны. Необходимо иметь в виду, что h° — величина первого порядка малости и учет φ_1 дал бы поэтому только поправку второго порядка малости.

Поступила 7 XII 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений, ГТТИ, 1953.