ПРОДОЛЬНОЕ ОБТЕКАНИЕ ЦИЛИНДРА НЕОДНОРОДНЫМ ПОТОКОМ ПРИ НАЛИЧИИ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ОТСОСА ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

О. Н. Овчинников

(Ленинград)

Дается точное решение задачи о распределении скоростей и температур около цилиндра, продольно обтекаемого потоком вязкой несжимаемой жидкости, скорость которого задана в виде $U = U_0 + \omega_0 r^2$, при наличии установившегося отсоса пограничного слоя.

1. Динамический пограничный слой на цилиндре. Рассмотрим задачу о распределении скоростей и температур около нагретого цилиндра радиуса a, продольно обтекаемого неоднородным потоком вязкой несжимаемой жидкости, скорость которого задана в виде

$$U = U_0 + \omega_0 r^2 \qquad (r \geqslant a) \tag{1.1}$$

где U_0 и ω_0 — некоторые константы при наличии установившегося отсоса пограничного слоя, толщина которого считается неизменной.

Если предположить, что течение установившееся, осесимметричное и составляющие скорости и распределение температур не зависят от координаты z, направленной вдоль оси цилиндра в сторону течения, то уравнения Навье — Стокса запишутся так:

$$v_r \frac{dv_r}{dr} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rv_r)\right], \qquad \frac{d(rv_r)}{dr} = 0$$
$$v_r \frac{dv_z}{dr} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\nu}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{dv_z}{dr}\right] \tag{1.2}$$

$$\rho g c_p v_r \frac{dT}{dr} = \frac{\lambda}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + 2\mu\left[\left(\frac{dv_r}{dr}\right)^2 + \left(\frac{v_r}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dv_z}{dr}\right)^2\right] \tag{1.3}$$

где λ — коэффициент теплопроводности, g — ускорение силы тяжести, ν — коэффициент кинематической вязкости, ρ — плотность, μ — вязкость, c_p — теплоемкость среды, p — давление, а u и v — составляющие скорости, соответственно направленные вдоль осей r и z. Нетрудно убедиться, что решение первых трех уравнений этой системы, удовлетворяющее граничным условиям (1.4)

$$v_z = 0, \qquad v_r = v_0 < 0 \quad \text{при } r = a, \qquad v_z \to U_0 + \omega_0 r^2, \qquad v_r \to 0 \quad \text{при } r \to \infty$$

имеет вид:

$$\frac{v_z}{U_0} = 1 - R^k + \beta(R^2 - R^k), \qquad \frac{p - p_0}{\rho U_0^2} = 2(2-k)\frac{\beta z_1}{\mathrm{Re}} - \frac{m^2}{2R^2}, \qquad \frac{v_r}{U_0} = \frac{m}{R} \tag{1.5}$$

Здесь для краткости введены следующие обозначения:

$$R = \frac{r}{a}, \qquad z_1 = \frac{z}{a}, \qquad \beta = \frac{\omega_0 a^2}{U_0}, \qquad m = \frac{v_0}{U_0}, \qquad \mathrm{Re} = \frac{U_0 a}{\nu}, \qquad k = m\,\mathrm{Re} \tag{1.6}$$

а через p_0 обозначена произвольная константа.

Напряжение трения на стенке τ_0 определяется следующим соотношением:

$$\tau_0 = \mu \left.\frac{dv_z}{dr}\right|_{r=a} = \mu\frac{U_0}{a}[\beta(2-k) - k] \tag{1.7}$$

Отсюда сразу же следует, что безотрывное обтекание круглого цилиндра возможно только при условии: $\beta(2-k) - k > 0$, т. е. при определенном соотношении между скоростью отсоса и степенью неоднородности набегающего потока.

Обычно отсос пограничного слоя применяется для уменьшения сопротивления трения путем перемещения вниз по потоку точки перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный. Следовательно, для практики представляют интерес в основном большие числа Рейнольдса, т. е. большие значения k (по абсолютной величине). Тогда из (1.5) и (1.7) следует, что даже сравнительно слабая неоднородность набегающего потока окажет заметное влияние на распределение скоростей и напряжение трения на стенке. Иллюстрацией этого может служить фигура, в верхней части которой показаны профили скоростей v_z / U_0 в пограничном слое на цилиндре, рассчитанные по формуле (1.5) при $k=-100$, для трех значений завихренности набегающего потока $\beta=-0.1$, 0 и 0.1.

2. Тепловой пограничный слой на цилиндре. Если подставить (1.5) в (1.3) и учесть при этом (1.6), то для определения распределения температур около нагретого цилиндра получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\left(R\frac{d\vartheta}{dR}\right)-\frac{k\sigma}{R}\frac{d\vartheta}{dR}=-2\sigma\left[\frac{4m^2}{R^4}+4\beta^2R^2-4\beta(1+\beta)kR^k+(1+\beta)^2k^2R^{2k-2}\right] \qquad (2.1)$$

решение которого зависит от конкретных тепловых граничных условий; здесь

$$\vartheta=\frac{T}{U_0^2/2gc_p},\qquad \sigma=\frac{\mu gc_p}{\lambda}\quad \text{(число Прандтля)} \qquad (2.2)$$

Задача о термометре. Если предположить, что отсутствует поток тепла от стенки к жидкости, т. е. $d\vartheta/dR=0$ при $R=1$, то решение уравнения (2.1), удовлетворяющее этому условию, можно записать в следующем виде:

$$\vartheta-\vartheta_0=\frac{2\sigma\beta^2}{4-k\sigma}\left[\frac{4}{\sigma k}R^{\sigma k}-R^4\right]-\frac{4m^2\sigma}{2+k\sigma}\left[\frac{2}{\sigma k}R^{\sigma k}-R^{-2}\right]+$$
$$+\frac{8\beta(1+\beta)}{k+2-k\sigma}\left[\frac{k\sigma}{k+2}R^{k+2}-R^{k\sigma}\right]+\frac{\sigma(1+\beta)^2}{2-\sigma}\left[\frac{2}{\sigma}R^{k\sigma}-R^{2k}\right] \qquad (2.3)$$

где через ϑ_0 обозначена некоторая характерная температура.

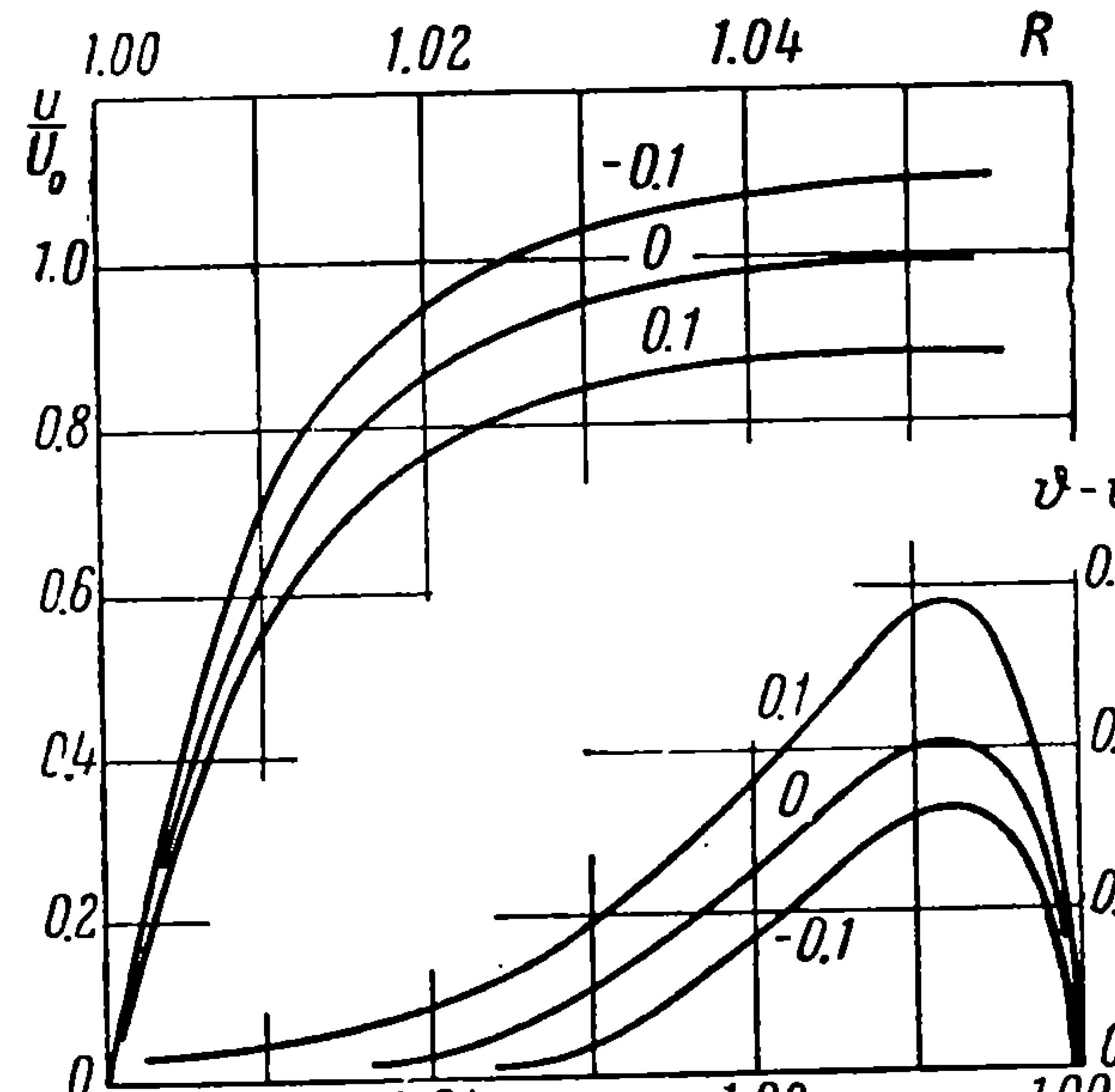
Из последнего выражения легко видеть, что на достаточном удалении от цилиндра существует поперечный перепад температур, равный следующей величине:

$$\vartheta_\infty=\vartheta_0-\frac{4\sigma\beta^2}{4-k\sigma}R^4-\frac{4\sigma m^2}{2+k\sigma}R^{-2} \qquad (2.4)$$

т. е. неоднородность поля скоростей в набегающем потоке обусловливает и неоднородность температурного поля. Найдем теперь собственную температуру стенки T_e. Полагая $R=1$ в (2.3) и учитывая при этом (1.6) и (2.2), будем иметь

$$T_e-T_0=\frac{U_0^2}{2gc_p}\left[1-\frac{4m^2}{k}+2\beta\frac{k-2}{k+2}+\beta^2\frac{(k-2)^2}{k(k+2)}\right] \qquad (2.5)$$

Следовательно, разность между собственной температурой стенки T_e и T_0 является функцией температуры адиабатического сжатия, скорости отсоса и неоднородности набегающего потока, но не зависит от числа Прандтля.



Заметим, что при больших числах Рейнольдса $|k|\gg1$, поэтому выражение (2.5) может быть приближенно записано в виде

$$T_e-T_0\approx\frac{U_0^2}{2gc_p}(1+\beta)^2 \qquad (2.6)$$

т. е. относительно небольшая неоднородность набегающего потока может оказать существенное влияние на собственную температуру стенки.

Задача об охлаждении. Граничное условие на стенке в этом случае запишется так:

$$T=T_1\quad\text{или}\quad\vartheta=\vartheta_1\quad\text{при } R=1 \qquad (2.7)$$

а решение уравнения (2.1), удовлетворяющее этому условию, имеет такой вид:

$$\vartheta-\vartheta_0=(\vartheta_1-\vartheta_0)R^{\sigma k}-\frac{2\sigma\beta^2}{4-k\sigma}(R^4-R^{\sigma k})-\frac{4\sigma m^2}{2+k\sigma}(R^{-2}-R^{\sigma k})+$$
$$+\frac{8k\sigma\beta(1+\beta)}{(k+2)(k+2-k\sigma)}(R^{k+2}-R^{\sigma k})-\frac{\sigma(1+\beta)^2}{2-\sigma}(R^{2k}-R^{\sigma k}) \qquad (2.8)$$

В заключение исследуем вопрос о направлении теплопередачи, т. е. о том, переходит ли тепло от стенки к движущейся жидкости или наоборот. Для этого выясним знак градиента температуры около стенки. Продифференцировав уравнение (2.8) по R и полагая в полученном выражении $R = 1$, будем иметь

$$\left.\frac{d\vartheta}{dR}\right|_{R=1} = \sigma k(\vartheta_1 - \vartheta_0) - 2\sigma\beta^2 + 4\sigma m^2 + \frac{8\sigma k}{k+2}\beta(1+\beta) - \sigma k(1+\beta)^2 \qquad (2.9)$$

Если $d\vartheta / dR < 0$ при $R = 1$, то тепло переходит от цилиндра к жидкости, и, наоборот, если $d\vartheta / dR$ при $R = 1$, то тепло переходит от жидкости к цилиндру. Следовательно, критерием перехода тепла от нагретого цилиндра к движущейся жидкости (или наоборот) будет следующее неравенство:

$$T_1 - T_0 \gtrless \left[\frac{2\beta^2}{k} - \frac{4m^2}{k} - \frac{8\beta(1+\beta)}{k+2} + (1+\beta)^2\right]\frac{U_0^2}{2gc_p} \qquad (2.10)$$

или, используя (2.5), как и в случае обтекания пластинки потенциальным потоком, будем иметь

$$T_1 - T_0 \gtrless T_e - T_0 \qquad \text{(нагретая стенка} \rightleftarrows \text{жидкость)} \qquad (2.11)$$

Из выражений (2.11) и (2.6) следует, что неоднородность набегающего потока может существенно повысить или, наоборот, снизить охлаждающее действие жидкости, обтекающей цилиндр. По существу все будет зависеть от знака неоднородности набегающего потока β. При $\beta < 0$ градиент температур и толщина теплового пограничного слоя будут меньше, чем в случае обтекания цилиндра потенциальным потоком, и, наоборот, при $\beta > 0$ — больше. Иллюстрацией этого может служить приведенное в нижней части фигуры распределение температур $\vartheta - \vartheta_0$ в пограничном слое, рассчитанное по формуле (2.8) для $m = 10^{-4}$, $R = 10^{-6}$, $\vartheta_1 = \vartheta_0$ и $\sigma = 0.72$ при трех значениях завихренности набегающего потока $\beta = -0.1$, 0 и 0.1.

Поступила 22 XI 1959

ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ СТРУЙНОГО ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕГОСЯ ПО ПОВЕРХНОСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ТОНКИМ СЛОЕМ

Ф. И. Франкль

(Нальчик)

Течения типа, указанного в заглавии, могут иметь место при ударе струи гидромонитора о породу, в лопатках ковшевых (пелтоновых) гидротурбин и т. д.

Введем на обтекаемой поверхности тела криволинейные координаты x_1, x_2, причем координатные линии должны быть направлены вдоль линий главных кривизн. Третья координата

$$x_3 = h \qquad (1)$$

равна длине нормали, отсчитываемой от поверхности твердого тела.

Тогда получаем систему ортогональных координат; линейный элемент при этом равняется

$$ds = \sqrt{H_1^2 dx_1^2 + H_2^2 dx_2^2 + H_3^2 dx_3^2} = \sqrt{H_1^2 dx_1^2 + H_2^2 dx_2^2 + dh^2} \qquad (2)$$

Свободная поверхность течения пусть дается уравнением

$$h = h^\circ(x_1, x_2) \qquad (3)$$

Величину h° будем считать первого порядка малости. На этой поверхности давление равняется атмосферному и, следовательно, скорость потока имеет постоянное значение. Следовательно, имеем на свободной поверхности

$$\frac{1}{H_1^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{1}{H_2^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2 + \frac{1}{H_3^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2 = u_0^2 \qquad (4)$$

На обтекаемой поверхности ($x_3 = 0$) имеем

$$\partial\varphi / \partial x_3 = 0 \qquad (5)$$