К ПЕРЕХОДУ ОТ ДОЗВУКОВЫХ СКОРОСТЕЙ К СВЕРХЗВУКОВЫМ В СОПЛАХ ЛАВАЛЯ

О. С. Рыжов
(Москва)

Рассматриваются пространственные смешанные течения идеального газа в соплах Лаваля. Исследуется форма поверхности перехода в случае, когда скорость достигает в центре течения скорости звука, а производная скорости в направлении оси канала равняется в этой точке нулю. Устанавливается теорема, являющаяся обобщением для трехмерных движений известной теоремы Ф. Франкля — Х. Гёртлера, справедливой для плоско-параллельных и осесимметрических газовых потоков [1,2]. Опираясь на нее, обсуждаются два возможных типа течений в окрестности самого узкого поперечного сечения сопла и возможность перехода одного типа в другой.

§ 1. Уравнения, описывающие пространственные безвихревые изэнтропические течения идеального газа, в декартовой системе координат имеют вид:

$$(a^2-u^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+(a^2-v^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+(a^2-w^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}-2uv\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}-2uw\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial z}-2vw\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial z}=0 \qquad (1.1)$$

$$2a^2=(\varkappa+1)-(\varkappa-1)q^2 \qquad (1.2)$$

$$q^2=u^2+v^2+w^2,\qquad u=\frac{\partial\Phi}{\partial x},\qquad v=\frac{\partial\Phi}{\partial y},\qquad w=\frac{\partial\Phi}{\partial z} \qquad (1.3)$$

Здесь a — скорость звука, $\varkappa$ — показатель адиабаты Пуассона, Φ — потенциал, u, v и w — проекции вектора скорости $\mathbf{q}$ соответственно на оси x, y и z. Система единиц выбрана при этом так, что величина критической скорости $a_* = 1$.

Используя равенства (1.2) и (1.3), приведем уравнение (1.1) к виду

$$[(\varkappa+1)-(\varkappa-1)q^2]\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial q^2}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial q^2}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial q^2}{\partial z} \qquad (1.4)$$

Известно, что в окрестности самого узкого поперечного сечения сопла Лаваля могут осуществляться два типа смешанных течений. В первом из них в дозвуковом поле скоростей имеются местные сверхзвуковые зоны, прилегающие к стенкам канала (течения Тэйлора); во втором скорость изменяется от дозвуковой к сверхзвуковой при переходе через горло сопла (течения Мейера). Плоские и осесимметрические движения газа обоих видов были предметом ряда исследований [1-10], аналогичные пространственные задачи рассматривались автором [11,12].

В настоящей работе исследуются условия смыкания на оси канала местных сверхзвуковых зон, которые прилегают к его стенкам, и переход от смешанных трехмерных движений газа типа Тэйлора к течениям Мейера. Для этого рассмотрим поток, предполагая у него две взаимно перпендикулярные плоскости симметрии, в окрестности звуковой поверхности. Прямую, по которой пересекаются эти плоскости, назовем осью канала и совместим ее с осью x. Будем считать всюду в дальнейшем, что направление вектора скорости основного движения газа совпадает с этой осью, причем в начале координат ее величина достигает скорости звука. Таким образом, точка $x = y = z = 0$ является точкой пересечения оси канала с поверхностью перехода, т. е. центром течения [6].

В работах [8,9,12] были получены решения, описывающие предельный случай течений Тэйлора, в которых местные сверхзвуковые зоны смыкаются на оси сопла таким образом, что звуковая поверхность ортогональна к ней. Подобная картина потока не является единственной в пространственных движениях газа. Исследуем поэтому возможность другого вида предельных течений Тэйлора, в которых поверхность перехода от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым касается оси x в центре сопла. В этом случае необходимо

$$\partial u\,/\,\partial x=0 \qquad \text{при } x=y=z=0 \qquad (1.5)$$

Рассмотрим следствия, вытекающие из условия (1.5). Предполагая поток аналитическим, разложим в соответствии с изложенным выше выражение для потенциала скорости Φ в степенной ряд:

$$\Phi = \sum_{l,\,m,\,n}^{\infty} a_{l,\,2m,\,2n}\, x^l y^{2m} z^{2n} \tag{1.6}$$

Причем коэффициенты a_{000}, a_{100} и a_{200} даются равенствами

$$a_{000} = 0, \qquad a_{100} = 1, \qquad a_{200} = 0 \tag{1.7}$$

Подставляя ряд (1.6) в уравнение движения (1.4) и приравнивая в полученном выражении члены при одинаковых степенях x, y и z, можно получить соотношения, которые связывают коэффициенты $a_{l,\,2m,\,2n}$.

Уравнение, полученное сравнением членов при $x^\lambda y^{2\mu} z^{2\nu}$, имеет вид:

$$\begin{aligned}
&(\varkappa+1)\,[(\lambda+2)(\lambda+1)\,a_{\lambda+2,\,2\mu,\,2\nu} + (2\mu+2)(2\mu+1)\,a_{\lambda,\,2\mu+2,\,2\nu} + \\
&\quad + (2\nu+2)(2\nu+1)\,a_{\lambda,\,2\mu,\,2\nu+2}] = \\
&= \sum_{(i+l+r=\lambda+4,\ j+m+s=\mu,\ k+n+t=\nu)} a_{i,\,2j,\,2k}\, a_{l,\,2m,\,2n}\, a_{r,\,2s,\,2t}\; ilr\,[i+l-2+(r-1)(\varkappa-1)] + \\
&+ \sum_{(i+l+r=\lambda,\ j+m+s=\mu+2,\ k+n+t=\nu)} 8a_{i,\,2j,\,2k}\, a_{l,\,2m,\,2n}\, a_{r,\,2s,\,2t}\; jms\,[2(j+m-1)+(2s-1)(\varkappa-1)] + \\
&+ \sum_{(i+l+r=\lambda,\ j+m+s=\mu,\ k+n+t=\nu+2)} 8a_{i,\,2j,\,2k}\, a_{l,\,2m,\,2n}\, a_{r,\,2s,\,2t}\; knt\,[2(k+n-1)+(2t-1)(\varkappa-1)] + \\
&+ \sum_{(i+l+r=\lambda+2,\ j+m+s=\mu+1,\ k+n+t=\nu)} 2a_{i,\,2j,\,2k}\, a_{l,\,2m,\,2n}\, a_{r,\,2s,\,2t}\; \{2jmr\,[i+l+(r-1)(\varkappa-1)] + \\
&\quad + ils\,[2(j+m)+(2s-1)(\varkappa-1)]\} + \\
&+ \sum_{(i+l+r=\lambda+2,\ j+m+s=\mu,\ k+n+t=\nu+1)} 2a_{i,\,2j,\,2k}\, a_{l,\,2m,\,2n}\, a_{r,\,2s,\,2t}\; \{2knr\,[i+l+(r-1)(\varkappa-1)] + \\
&\quad + ilt\,[2(k+n)+(2t-1)(\varkappa-1)]\} + \\
&+ \sum_{(i+l+r=\lambda,\ j+m+s=\mu+1,\ k+n+t=\nu+1)} 8a_{i,\,2j,\,2k}\, a_{l,\,2m,\,2n}\, a_{r,\,2s,\,2t}\; \{kns\,[2(j+m)+(2s-1)(\varkappa-1)] + \\
&\quad + jmt\,[2(k+n)+(2t-1)(\varkappa-1)]\}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

§ 2. Уравнения (1.8) являются единственными, которые связывают коэффициенты $a_{l,\,2m,\,2n}$ решения (1.6), описывающего течение газа в области у его центра (форма сопла считается при этом не заданной заранее). Прежде чем переходить к их подробному изучению, рассмотрим основные качественные особенности трехмерных движений. Для этого ограничимся в разложении (1.6) членами до четвертого порядка включительно. Из первых пяти уравнений (1.8) имеем

$$a_{020} + a_{002} = 0, \qquad a_{120} + a_{102} = 0, \qquad a_{220} + a_{202} = 0 \tag{2.1}$$

$$6a_{040} + a_{022} = 4a_{020}\,(a_{120} + a_{020}^2), \qquad 6a_{004} + a_{022} = 4a_{002}\,(a_{102} + a_{002}^2) \tag{2.2}$$

В достаточно малой окрестности плоскости $x = 0$, содержащей начало координат, коэффициенты a_{020} и a_{002} характеризуют величины поперечных составляющих скорости потока. В той же окрестности коэффициенты a_{120} и a_{102} и a_{220} и a_{202} дают значения первой и второй производных вдоль оси x компонент v и w и определяют направление скорости течения газа вблизи плоскости $x = 0$.

Из равенств (2.1) следует, что знаки величин a_{020} и a_{002}, a_{120} и a_{102} и a_{220} и a_{202} противоположны.

Таким образом, в самой плоскости $x = 0$ и вблизи нее одна из поперечных составляющих скорости частиц направлена к центру течения, другая — от него, т. е. в одной из двух плоскостей симметрии движения газа происходит сжатие потока, в другой — расширение. Такая картина является отличительной чертой пространственных течений, так как в плоских и осесимметрических движениях подобная структура поля скоростей невозможна и в силу условия (1.5), как показано в работе [2], обращаются в нуль все коэффициенты $a_{\tau,\,2m,\,2n}$ ($\tau = 0, 1, 2$; $m, n = 0, 1, 2, \ldots$), кроме $a_{100} = 1$. Звуковая поверхность становится при этом плоскостью, которая перпендикулярна оси канала и вдоль которой поперечная составляющая скорости потока исчезает. В общем случае трехмерных течений единственным следствием условия (1.5) становится бесконечная система равенств (1.8), первыми из которых являются уравнения (2.1) и (2.2).

Если мы потребуем, однако, чтобы в первом квадранте плоскости $x = 0$ величины v и w, $\partial v / \partial x$ и $\partial w / \partial x$ и $\partial^2 v / \partial x^2$ и $\partial^2 w / \partial x^2$ имели одинаковые знаки и не меняли их, т. е. чтобы в окрестности этой плоскости происходило всестороннее сжатие или расширение потока, то из равенств (2.1) и (2.2) получим сразу

$$a_{020} = a_{002} = a_{120} = a_{102} = a_{220} = a_{202} = a_{040} = a_{004} = a_{022} = 0 \qquad (2.3)$$

Выписывая в разложении (1.6) для потенциала Ф следующие члены (до шестого порядка включительно), можно показать, что в этом случае и

$$a_{140} = a_{104} = a_{122} = a_{240} = a_{204} = a_{222} = 0 \qquad (2.4)$$

Таким образом, в рассматриваемом в этом параграфе приближении звуковая поверхность является, как и в случае плоских и осесимметрических течений, плоскостью, которая перпендикулярна оси канала. Обе поперечные составляющие скорости частиц газа исчезают на этой плоскости и, кроме того, $\partial u / \partial x = 0$. Отметим, что предположения о знаках функций v и w, $\partial v / \partial x$ и $\partial w / \partial x$, $\partial^2 v / \partial x^2$ и $\partial^2 w / \partial x^2$, сделанные выше, не являются значительным ограничением, поскольку в реальных соплах осуществляется всестороннее сжатие потока до критического сечения и расширение — после него.

§ 3. Перейдем теперь к доказательству теоремы о пространственных трансзвуковых течениях, которая служит строгим доказательством результатов, полученных в предыдущем параграфе.

Теорема. Пусть дано течение идеального газа, которое обладает двумя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии $y = 0$ и $z = 0$ и является аналитическим в точке $x = y = z = 0$ и в некоторой окрестности K этой точки. Пусть, далее, скорость потока $u(x, 0, 0)$ вдоль оси x достигает в точке $x = 0$ местной скорости звука, причем производная скорости там исчезает

$$u = 1, \qquad \partial u / \partial x = 0 \qquad \text{при } x = y = z = 0 \qquad (3.1)$$

Пусть, наконец, величины v и w, $\partial v / \partial x$ и $\partial w / \partial x$, $\partial^2 v / \partial x^2$ и $\partial^2 w / \partial x^2$ имеют одинаковые знаки в первом квадранте плоскости $x = 0$ и не меняют их.

Для всех y и z в K имеем тогда

$$u(0, y, z) = 1, \qquad \partial u(0, y, z) / \partial x = 0, \qquad v(0, y, z) = w(0, y, z) = 0 \qquad (3.2)$$

Из предположений теоремы вытекают равенства (1.7). Объединяя их с (2.3), имеем

$$a_{000} = a_{020} = a_{002} = 0, \qquad a_{100} = 1, \qquad a_{120} = a_{102} = 0; \qquad a_{200} = a_{220} = a_{202} = 0 \qquad (3.3)$$

Равенства (3.2) приводят к системе

$$a_{0,2m,2n} = a_{1,2m,2n} = a_{2,2m,2n} = 0 \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (3.4)$$

для всех x, y, z из K, за исключением $a_{100} = 1$. Доказательство соотношений (3.4) проведем методом полной математической индукции. С этой целью сделаем следующее предположение:

$$a_{0,2m,2n} = a_{1,2m,2n} = a_{2,2m,2n} = 0 \qquad \text{для } m + n \leqslant \sigma - 1 \qquad (3.5)$$

(за исключением $a_{100} = 1$), и покажем, что формулы (3.5) имеют место и для $m + n = \sigma$.

В уравнении (1.8) полагаем $\lambda = \tau$ $(\tau = 0, 1, 2)$, $\mu + \nu = \sigma - 1$; используя систему (3.5), получим (3.6)

$$(2\mu + 2)(2\mu + 1)\, a_{\tau,2(\mu+1),2\nu} + (2\nu + 2)(2\nu + 1)\, a_{\tau,2\mu,2(\nu+1)} = 0 \quad (\mu + \nu = \sigma - 1,\ \tau = 0, 1, 2)$$

Напишем выражения, которые содержат члены порядка $2\sigma - 1$, входящие в разложения функций $v(0, y, z)$, $w(0, y, z)$, $\partial v(0, y, z)/\partial x$, $\partial w(0, y, z)/\partial x$, $\partial^2 v(0, y, z)/\partial x^2$ и $\partial^2 w(0, y, z)/\partial x^2$, в степенные ряды: (3.7)

$$\frac{1}{2(\tau!)} \frac{\partial^\tau v_{2\sigma-1}}{\partial x^\tau} = \sigma a_{\tau,2\sigma,0} y^{2\sigma-1} + (\sigma - 1)\, a_{\tau,2(\sigma-1),2} y^{2\sigma-3} z^2 + \ldots + a_{\tau,2,2(\sigma-1)}\, y z^{2(\sigma-1)}$$

$$\frac{1}{2(\tau!)} \frac{\partial^\tau w_{2\sigma-1}}{\partial x^\tau} = \sigma a_{\tau,0,2\sigma} z^{2\sigma-1} + (\sigma - 1)\, a_{\tau,2,2(\sigma-1)} z^{2\sigma-3} y^2 + \ldots + a_{\tau,2(\sigma-1),2}\, z y^{2(\sigma-1)}$$

В соответствии с требованием (3.5) формулы (3.7) дают первые члены разложений соответствующих функций. Поскольку в первом квадранте плоскости $x = 0$ составляющие скорости потока v и w и две их первые производные по x должны по предположению иметь одинаковые знаки и не менять их, то постоянные

$$a_{\tau,2\sigma,0} \quad a_{\tau,2,2(\sigma-1)}, \quad a_{\tau,0,2\sigma}, \quad a_{\tau,2(\sigma-1),2} \qquad (\tau = 0, 1, 2)$$

также должны быть одинаковых знаков. Но это условие противоречит равенствам (3.6). Отсюда следует, что необходимо

$$a_{\tau,2\mu,2\nu} = 0 \qquad (\mu + \nu \leqslant \sigma, \ \tau = 0, 1, 2) \tag{3.8}$$

кроме $a_{100} = 1$. Так как при $\sigma = 1$ и $\sigma = 2$ равенства (3.5) совпадают с равенствами (3.3), то теорема доказана полностью. Отметим, что в случае плоских течений и течений с осевой симметрией условия, налагаемые на знаки функций $v(0, y, z)$ и $w(0, y, z)$ и их первых производных по x, выполняются автоматически. Таким образом, доказанная в этом параграфе теорема является обобщением для пространственных движений газа результатов Ф. Франкля и X. Гёртлера [1,2].

§ 4. Как было показано, условия (3.1) в общем случае пространственных течений газа не приводят к тому, что поверхность перехода, проходящая через центр течения, становится плоскостью. Только при наложении дополнительного требования, чтобы поток испытывал всестороннее сжатие или расширение в окрестности плоскости $x = 0$, формулы (3.2) служат следствием условий (3.1). В этом случае вдоль плоскости $x = 0$ скорость равна скорости звука, а поперечные составляющие скорости исчезают. Кроме того, при $x = 0$ обращаются в нуль также производные $\partial v / \partial x$, $\partial w / \partial x$, $\partial^2 v / \partial x^2$ и $\partial^2 w / \partial x^2$. Но так как стенки канала образуются линиями тока, то осуществление аналитических смешанных течений с плоской поверхностью перехода от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым возможно только в специальных соплах с достаточно плавным изменением формы стенок в окрестности критического сечения. Поэтому при смыкании на оси сопла местных сверхзвуковых зон, которые прилегают к его стенкам, производная $\partial u / \partial x$, вообще говоря, не равна нулю в центре течения, если только поток подвергается всестороннему сжатию до критического сечения и расширяется за ним. Соответствующие решения уравнений движения газа изучались ранее, причем было показано, что в этом случае область сверхзвуковых скоростей ограничена двумя поверхностями, которые ортогональны к оси сопла в точке пересечения с нею и касаются там друг друга [12].

В заключение отметим, что здесь рассматривались только аналитические течения, полученные выводы неприменимы к потокам с разрывами производных составляющих скорости по координатам.

Поступила 28 X 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И. О плоско-параллельных воздушных течениях через каналы при околозвуковых скоростях. Матем. сборник, 1933, т. 40, № 1.
2. Görtler H. Zum Übargang von Unterschall—zu Überschallgeschwindigkeiten in Düsen. ZAMM, 1939, Bd. 19, No. 6.
3. Taylor G. J. The Flow of Air at High Speads past Curved Surfaces. ARC Reports and Memoranda, No. 1381. London, 1930.
4. Meyer Th. Über zweidimensionale Bewegungsvorgänge in einem Gas, das mit Übeischallgeschwindigkeit strömt. Dissertation. Göttingen, 1908.
5. Астров В., Левин Л., Павлов Е., Христианович С. О расчете сопел Лаваля. ПММ, 1943, т. VII, вып. 1.
6. Франкль Ф. И. К теории сопел Лаваля. Изв. АН СССР, сер. матем., 1945, т. 9, № 5.
7. Фалькович С. В. К теории сопла Лаваля. ПММ, 1946, т. X, вып. 4.
8. Tomotika S., Tamada K. Studies on two-dimensional transonic flows of compressible fluids. Quart of Appl. Math. 1950, vol. VII, No 4.
9. Tomotika S., Hasimoto Z. On the Transonic Flow of a Compressible Fluid Through an Axially Symmetrical Nozzle. J. of Math. and Phys., 1950, vol. XXIX, No 2.
10. Рыжов О. С. О течениях в окрестности поверхности перехода в соплах Лаваля. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 4.
11. Рыжов О.С. О газовых течениях в соплах Лаваля. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 3.
12. Рыжов О. С. О пространственных трансзвуковых течениях газа в каналах. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 4.