ЗАДАЧА О ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА В КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В. Л. Добровольский

(Москва)

Дается общее выражение для функции напряжений в комплексных переменных. В качестве примера исследуются некоторые напряженные состояния. В случае упруго-пластической задачи введение комплексных переменных позволяет проследить связь между упругой и пластической функциями напряжений.

1. Для определения напряженного состояния в пластической области при плоской деформации идеально пластического тела пользуемся следующими уравнениями:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \tag{1.1}$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2 \tag{1.2}$$

и граничными условиями

$$[\sigma_x \cos(nx) + \tau_{xy} \cos(ny)]_\gamma = X_n(s), \quad [\tau_{xy} \cos(nx) + \sigma_y \cos(ny)]_\gamma = Y_n(s) \tag{1.3}$$

Здесь γ обозначает границу пластической зоны, а s — дуга контура γ.

Введем функцию напряжения F_1 по формулам

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}, \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F_1}{\partial x \, \partial y} \tag{1.4}$$

Тогда уравнение (1.1) удовлетворяется тождественно и для отыскания функции F_1 остается уравнение (1.2).

Переходя к комплексным переменным, замечаем, что уравнение (1.2) можно записать в виде

$$M\overline{M} = 4k^2, \qquad M = \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}$$

С другой стороны,

$$M = 4\frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}, \qquad \overline{M} = 4\frac{\partial^2 \overline{F}_1}{\partial \overline{z}^2}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Тогда уравнение (1.2) примет вид:

$$4\frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}\frac{\partial^2 \overline{F}_1}{\partial \overline{z}^2} = k^2 \tag{1.5}$$

Вводя функцию F по формуле

$$F = \frac{2}{k} F_1$$

получим уравнение для определения функции напряжения в пластической области

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\frac{\partial^2 \overline{F}}{\partial \overline{z}^2} = 1 \tag{1.6}$$

граничные условия (1.3) приводятся к следующим [1]:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}\right]_\gamma = \frac{2}{k} f(s), \quad f(s) = i\int_{s_0}^{s} (X_n + iY_n)\, ds + \text{const} \tag{1.7}$$

Из уравнения (1.6) следует, что

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \exp(2i\theta) \tag{1.8}$$

где $\theta = \theta(z, \overline{z})$ — произвольная вещественная функция. Интегрируя (1.8), получим общее решение уравнения (1.6):

$$F(z, \overline{z}) = \int_{z_0}^{z} d\eta \int_{\eta_0}^{\eta} \exp[2i\theta(\xi, \overline{z})]\, d\xi + \overline{z\varphi(z)} + \overline{\chi(z)} \tag{1.9}$$

Здесь $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ — произвольные аналитические функции. Чтобы решение имело физический смысл, т. е. чтобы оно отвечало какому-то напряженному состоянию, нужно потребовать, чтобы функция F была вещественной: (1.10)

$$\int_{z_0}^{z} d\eta \int_{\eta_0}^{\eta} \exp[2i\theta(\xi, \bar z)]\, d\xi + z\overline{\varphi(z)} + \overline{\chi(z)} = \int_{\bar z_0}^{\bar z} d\bar\eta \int_{\bar\eta_0}^{\bar\eta} \exp[-2i\theta(z, \bar\xi)]\, d\bar\xi + \bar z\varphi(z) + \chi(z)$$

При заданной функции $\theta(z, \bar z)$ решение (1.9) условием (1.10) определяется с точностью до слагаемого $pz\bar z$ (p вещественно), которое соответствует гидростатическому давлению. Для решения конкретных краевых задач на решение (1.9) при выполнении требования (1.10) нужно наложить граничное условие в виде

$$\left[\int_{\bar z}^{\bar z} \exp[-2i\theta(z, \bar\xi)]\, d\bar\xi + \varphi(z)\right]_\gamma = \frac{2}{k} f(s) \tag{1.11}$$

Заметим, что между углом наклона α линии скольжения к оси x и функцией $\theta(z, \bar z)$ в каждой точке области пластичности существует зависимость

$$\theta + \alpha = \frac{1}{4}\pi \tag{1.12}$$

2. Рассмотрим напряженные состояния для конкретных функций $\theta(z, \bar z)$.

1. При $\theta = \alpha$ ($\alpha = \text{const}$) получим

$$F = \frac{1}{2}\exp(2i\alpha) z^2 + \frac{1}{2}\exp(-2i\alpha)\bar z^2 + pz\bar z \tag{2.1}$$

$$\frac{\sigma_x}{k} = p - \cos 2\alpha, \qquad \frac{\sigma_y}{k} = p + \cos 2\alpha, \qquad \frac{\tau_{xy}}{k} = \sin 2\alpha \tag{2.2}$$

Это решение соответствует однородному полю напряжений.

2. При $\theta = -\vartheta + \alpha$ ($\alpha = \text{const}$, $z = re^{i\vartheta}$)

$$F = \exp(2i\alpha)\bar z z(\ln z - 1) + \exp(-2i\alpha) z\bar z(\ln \bar z - 1) + pz\bar z \tag{2.3}$$

Здесь возможны следующие варианты.

а) Осесимметричное распределение [2] напряжений ($\alpha = 0$)

$$\frac{\sigma_r}{k} = \ln r^2 - 1 + p, \qquad \frac{\sigma_\vartheta}{k} = \ln r^2 - 1 + p, \qquad \frac{\tau_{r\vartheta}}{k} = 0 \tag{2.4}$$

в) Распределение напряжений [2] в клине $\left(\alpha = \frac{1}{4}\pi\right)$

$$\frac{\sigma_r}{k} = -2\vartheta + p, \qquad \frac{\sigma_\vartheta}{k} = -2\vartheta + p, \qquad \frac{\tau_{r\vartheta}}{k} = 1 \tag{2.5}$$

с) Суперпозиция предыдущих полей напряжений [3]

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r}{k} &= \cos 2\alpha(\ln r^2 - 1) - 2\vartheta \sin 2\alpha + p, \\ \frac{\sigma_\vartheta}{k} &= \cos 2\alpha(\ln r^2 + 1) - 2\vartheta \sin 2\alpha + p, \end{aligned} \qquad \frac{\tau_{r\vartheta}}{k} = \sin 2\alpha \tag{2.6}$$

3. Общий случай осесимметричного распределения напряжений [4]. Для

$$\theta = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\varepsilon c}{\sqrt{r^4 - c^2}} - \vartheta \qquad (\varepsilon = \pm 1,\ c = \text{const})$$

получим (2.7)

$$F = \varepsilon\left[z\bar z\ln(z\bar z + \sqrt{(z\bar z)^2 - c^2}) - 2\sqrt{(z\bar z)^2 - c^2} - c \arcsin\frac{c}{z\bar z}\right] - ic\ln z + ic\ln\bar z + pz\bar z$$

При этом

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r}{k} &= \varepsilon\left[2\ln(\sqrt{r^2 - c} + \sqrt{r^2 + c}) - \frac{\sqrt{r^4 - c^2}}{r^2}\right] + p, \\ \frac{\sigma_\vartheta}{k} &= \varepsilon\left[2\ln(\sqrt{r^2 - c} + \sqrt{r^2 + c}) + \frac{\sqrt{r^4 - c^2}}{r^2}\right] + p, \end{aligned} \qquad \frac{\tau_{r\vartheta}}{k} = \frac{c}{r^2} \tag{2.8}$$

4. При $\theta=\frac{1}{2}\arcsin\frac{z-\bar z}{i}$

$$F=\frac{1}{6}\sqrt{[1+(z-\bar z)^2]^3}-\frac{1}{2}\sqrt{1+(z-\bar z)^2}-\frac{z-\bar z}{2i}\operatorname{arc\,tg}\frac{z-\bar z}{i\sqrt{1+(z-\bar z)^2}}+$$
$$+\frac{1}{6}(z^3+\bar z^3)-\frac{1}{2}(z\bar z^2+\bar z^2 z)+pz\bar z$$

$$\frac{\sigma_x}{k}=-2x+2\sqrt{1-4y^2}+p,\qquad \frac{\sigma_y}{k}=-2x+p\qquad \frac{\tau_{xy}}{k}=2y \tag{2.9}$$

Такое распределение напряжений будет в полосе $\left(-\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant+\frac{1}{2}\right)$, сжатой шероховатыми плитами [3].

5. При $\theta=-\vartheta+\frac{1}{2}\arcsin\left(1-\frac{c}{r^2}\right)\qquad(c>0)$

$$F=i(c+z\bar z)\ln\frac{z}{\bar z}-3\sqrt{2cz\bar z-c^2}+2(c+z\bar z)\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2cz\bar z-c^2}}{c}+pz\bar z \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_r}{k}&=-2\vartheta-\frac{1}{r^2}\sqrt{2cr^2-c^2}+2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2cr^2-c^2}}{c}+p,\\ \frac{\sigma_\vartheta}{k}&=-2\vartheta+\frac{1}{r^2}\sqrt{2cr^2-c^2}+2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2cr^2-c^2}}{c}+p,\end{aligned}\qquad \frac{\tau_{r\vartheta}}{k}=1-\frac{c}{r^2} \tag{2.10}$$

Это новое частное решение уравнений равновесия (1.1) и условия Мизеса (1.2).

3. В случае упруго-пластической задачи для нахождения функции напряжения имеем следующие уравнения:

в упругой области

$$\frac{\partial^4 F^\circ}{\partial z^2\partial\bar z^2}=0 \tag{3.1}$$

в пластической области (1.8) или

$$\frac{\partial^4 F}{\partial z^2\partial\bar z^2}=\frac{\partial^2}{\partial\bar z^2}\exp\,[2i\theta(z,\bar z)] \tag{3.2}$$

На линии раздела упругой и пластической зон должно выполняться условие непрерывности первых производных для F° и F. Так как функция напряжений F должна быть вещественной, то из (1.9) следует, что ее можно представить в виде

$$F(z,\bar z)=F_0(z,\bar z)+\varkappa(z,\bar z) \tag{3.3}$$

где

$$F_0(z,\bar z)=2\operatorname{Re}[\bar z\varphi(z)+\chi(z)],\qquad \varkappa(z,\bar z)=\int\limits_{z_0}^{z}d\eta\int\limits_{\eta_0}^{\eta}\exp\,[2i\theta(\xi,\bar z)]\,d\xi-\bar z\varphi(z)-\chi(z)$$

при этом $\varkappa(z,\bar z)$ — вещественная функция. Функция $\varkappa(z,\bar z)$ на линии раздела и в упругой зоне должна обращаться в нуль. Условию непрерывности производных функции напряжения на границе можно удовлетворить, полагая

$$\left[\frac{\partial F_0}{\partial\bar z}\right]_\gamma=\left[\frac{\partial F^\circ}{\partial\bar z}\right]_\gamma,\qquad \left[\frac{\partial\varkappa}{\partial\bar z}\right]_\gamma=0 \tag{3.4}$$

При таком удовлетворении граничным условиям функция $\varkappa(z,\bar z)$ и ее первые производные по z, $\bar z$ на границе зон и в упругой области обращаются в нуль, т. е. решение непрерывно продолжается из упругой области в пластическую.

Поступила 4 XII 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, 1954.
2. Галин Л. А. Плоская упруго-пластическая задача. ПММ, 1946, т. X, вып. 3.
3. Соколовский В. В. Теория пластичности. Изд-во АН СССР, 1946.
4. Михлин С. Г. Основные уравнения математической теории пластичности. Изд-во АН СССР, 1934.