ОБ УСЛОВИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

В. И. Розенблюм

(Ленинград)

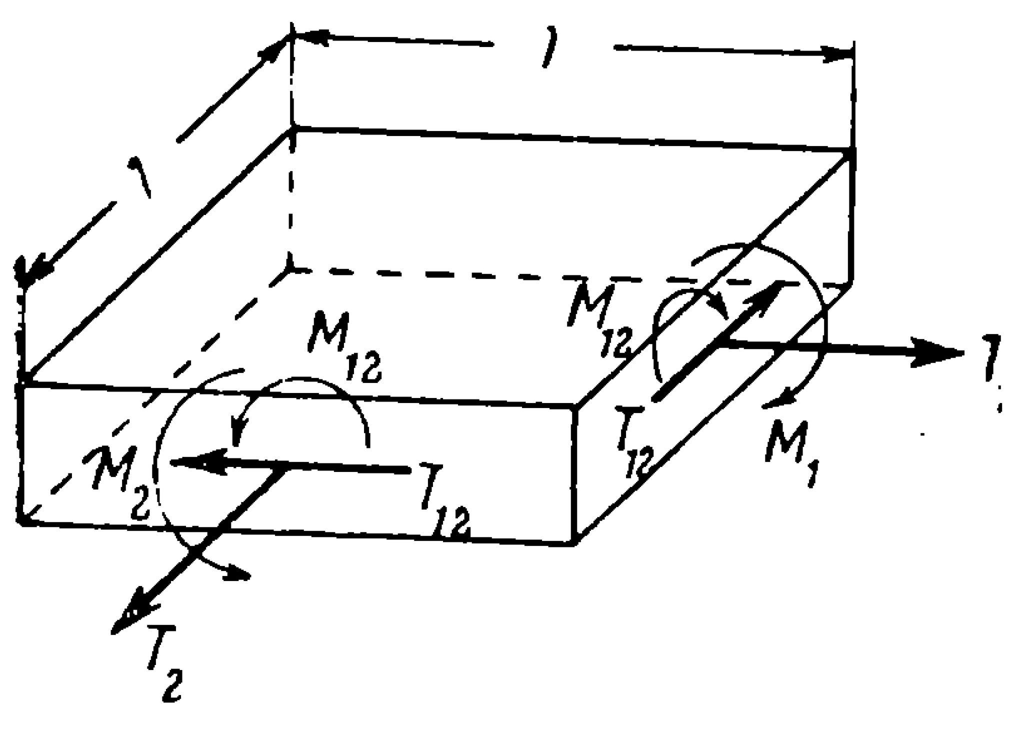
Условие пластичности (конечное соотношение) для тонкостенных оболочек на основе гипотез Кирхгоффа — Лява и критерия текучести Мизеса дано в работе [1]. Условия пластичности для осесимметричного нагружения цилиндрической оболочки, соответствующие критерию максимального касательного напряжения, были даны в работах [2, 3], а для оболочки вращения — в работе [4]. В частных задачах обычно вводятся приближенные условия пластичности, получаемые путем некоторой аппроксимации названных выше точных условий [2, 3, 5-7] или из иных соображений [8,9].

Основываясь на экстремальных принципах трехмерного жестко-пластического континуума, можно получить достаточно простое приближенное условие для общего случая. При этом обнаруживается, что такое общее приближенное условие заключает в себе приближенные условия пластичности, введенные цитированными авторами.

1. Для усилий и моментов в оболочке будем пользоваться соотношениями

$$T_1 = \int_{-1/2h}^{1/2h} \sigma_1 dz, \quad T_2 = \int_{-1/2h}^{1/2h} \sigma_2 dz, \quad T_{12} = \int_{-1/2h}^{1/2h} \sigma_{12} dz$$
$$M_1 = \int_{-1/2h}^{1/2h} \sigma_1 z dz, \quad M_2 = \int_{-1/2h}^{1/2h} \sigma_2 z dz, \quad M_{12} = \int_{-1/2h}^{1/2h} \sigma_{12} z dz \qquad (1.1)$$

применимыми, если отношение толщины оболочки h к характерному радиусу кривизны пренебрежимо мало по сравнению с единицей. Ограничиваясь этим случаем, рассмотрим элемент пластины со стороной, равной единице, нагруженный на гранях, как показано на фиг 1. Статически возможное поле напряжений для рассматриваемого элемента возьмем в виде



Фиг. 1

$$\sigma_1 = \frac{T_1}{h} + \frac{4M_1}{h^2}\operatorname{sign} z, \qquad \sigma_{12} = \frac{T_{12}}{h} + \frac{4M_{12}}{h^2}\operatorname{sign} z$$
$$\sigma_2 = \frac{T_2}{h} + \frac{4M_2}{h^2}\operatorname{sign} z, \qquad \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_3 = 0 \qquad (1.2)$$

(Координата z отсчитывается от срединной поверхности по нормали).

Внося эти значения в условие пластичности Мизеса

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) = 2\sigma_s^2 \qquad (1.2)$$

приходим к конечному соотношению, основанному на оценке снизу:

$$P_t^2 + P_m^2 + 2\,|P_{tm}| = 1 \qquad (1.3)$$

Здесь P_t^2, P_m^2, P_{tm} — квадратичные и билинейная формы [1]:

$$P_t^2 = t_1^2 - t_1 t_2 + t_2^2 + 3t_{12}^2$$
$$P_m^2 = m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2 + 3m_{12}^2 \qquad (1.4)$$
$$2P_{tm} = 2t_1 m_1 + 2t_2 m_2 - t_1 m_2 - t_2 m_1 + 6t_{12} m_{12}$$

причем

$$t_1 = \frac{T_1}{T_s}, \qquad m_1 = \frac{M_1}{M_s} \text{ и т. д.}, \qquad T_s = h\sigma_s, \qquad M_s = \frac{h^2\sigma_s}{4} \qquad (1.5)$$

Из неравенства $P_t P_m \geqslant |P_{tm}|$, указанного в работе [1], вытекает, что замена (1.3) соотношением

$$P_t^2 + P_m^2 + 2P_t P_m = 1 \qquad (1.6)$$

приведет к заведомо нижней оценке несущей способности.

На плоскости $P_t P_m$ (фиг. 2) условию (1.6) отвечает прямая AB.

2. Воспользуемся известными минимальными свойствами [10] функционала

$$J = \tau_s \int_V H dv - \int_S (X_n u + Y_n v + Z_n w)\, dS \tag{2.1}$$

где

$$H = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\xi_2 - \xi_3)^2 + (\xi_3 - \xi_1)^2 + \frac{3}{2}(\eta_{12}^2 + \eta_{23}^2 + \eta_{31}^2)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.2}$$

(второе слагаемое в (2.1) выражает мощность заданных внешних сил). Зададим кинематически возможное поле скоростей для элемента пластинки (фиг. 1), отвечающее равномерному деформированному состоянию:

$$\xi_1 = e_1, \quad \xi_2 = e_2, \quad \xi_3 = -(\xi_1 + \xi_2), \quad \eta_{12} = \gamma, \quad \eta_{13} = \eta_{23} = 0 \tag{2.3}$$

При этом (2.1) принимает вид:

$$J = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{e_1^2 + e_1 e_2 + e_2^2 + \frac{1}{4}\gamma^2} - (t_1 e_1 + t_2 e_2 + t_{12}\gamma) \tag{2.4}$$

Определяя параметры e_1, e_2, γ из условий

$$\frac{\partial J}{\partial e_1} = 0, \qquad \frac{\partial J}{\partial e_2} = 0, \qquad \frac{\partial J}{\partial \gamma} = 0$$

находим

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2e_1 + e_2}{\sqrt{e_1^2 + e_1 e_2 + e_2^2 + \frac{1}{4}\gamma^2}} \\ t_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2e_2 + e_1}{\sqrt{e_1^2 + e_1 e_2 + e_2^2 + \frac{1}{4}\gamma^2}} \\ t_{12} &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{\gamma}{\sqrt{e_1^2 + e_1 e_2 + e_2^2 + \frac{1}{4}\gamma^2}} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Исключение из этих зависимостей отношений e_1/γ, e_2/γ приводит к условию пластичности

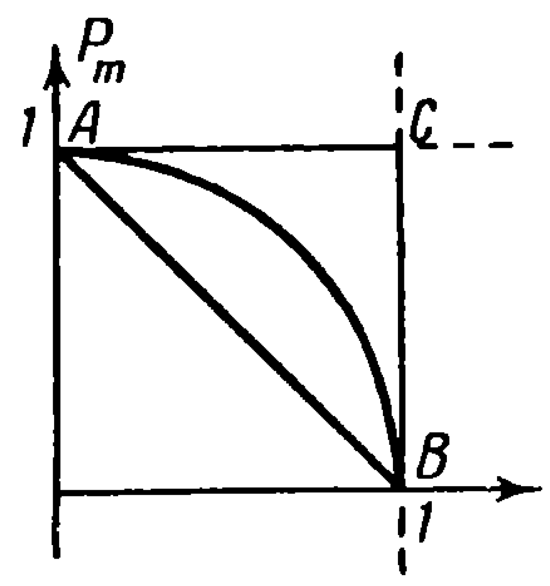
$$t_1^2 - t_1 t_2 + t_2^2 + 3t_{12}^2 = P_t^2 = 1 \tag{2.6}$$

Если вместо (2.3) задать скорости деформации в виде

$$\xi_1 = z\varkappa_1, \quad \xi_2 = z\varkappa_2, \quad \xi_3 = -(\xi_1 + \xi_2), \quad \eta_{12} = z\omega, \quad \eta_{13} = \eta_{23} = 0 \tag{2.7}$$

получим условие пластичности

$$m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2 + 3m_{12}^2 \equiv P_m^2 = 1$$



Фиг. 2

Таким образом, условие пластичности, основанное на оценке сверху [1], изображается на плоскости P_t, P_m (фиг. 2) сторонами квадрата ACB. Естественно принять в качестве приближенного условия пластичности некоторую промежуточную кривую, заключенную между нижней оценкой AB и верхней ACB. Наиболее простое предположение будет

$$P_t^2 + P_m^2 = 1 \tag{2.9}$$

что отвечает дуге окружности AB.

3. Рассмотрим условие (2.9) более подробно. Для безмоментного и чисто моментного напряженных состояний верхняя и нижняя оценки, найденные в § 1, 2, совпадают (точки A, B на фиг. 2). В этих случаях решение (2.9) переходит в условие пластичности работы [1].

---

[1] Заметим, что задание кинематически возможного поля в виде суммы (2.3) и (2.7) привело бы к условию пластичности [1].

Для осесимметрично нагруженной цилиндрической оболочки (осевая сила отсутствует) имеем

$$t_1 = t_{12} = 0, \qquad m_2 = \frac{1}{2} m_1, \qquad m_{12} = 0$$

При этом соотношение (2.9) принимает вид:

$$t_1^2 + \frac{3}{4} m_1^2 = 1$$

также совпадающий с конечным соотношением, примененным в этой задаче в работе [1].

Для осесимметричной деформации оболочки вращения обозначим

$$P_t^{\ 2} = t^2 = t_2^2 - t_1 t_2 + t_2^2, \qquad P_m^{\ 2} = m^2 = m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2 \tag{3.1}$$

Условие пластичности (2.9) при этом будет

$$t^2 + m^2 = 1 \tag{3.2}$$

Воспользуемся традиционным приемом кусочно-линейной аппроксимации

$$t \approx \tau, \qquad m \approx \mu \tag{3.3}$$

где

$$\tau = \max\{|t_1|, \ |t_2|, \ |t_1 - t_2|\}, \qquad \mu = \max\{|m_1|, |m_2|, |m_1 - m_2|\} \tag{3.4}$$

При этом вместо (3.2) получим

$$\tau^2 + \mu^2 = 1 \tag{3.5}$$

Следующий шаг состоит в замене окружности (3.5) описанным (или вписанным) многоугольником, или квадратом

$$|\tau| \leqslant 1, \qquad |\mu| \leqslant 1 \tag{3.6}$$

Полученное кусочно-линейное условие пластичности совпадает с условием, приведенным в работах [7, 11], в которых, кроме того, полагалось $m_2 \equiv 0$. Соотношения (3.4), (3.6) заключают в себе также прямоугольник текучести для осесимметрично нагруженной цилиндрической оболочки при наличии осевой силы, введенный в [3] и ряде других работ.

Заметим в заключение, что энергетические теоремы, полученные в [9] для несколько иного условия пластичности, легко распространяются и на случай условия пластичности (3.2).

Поступила 24 VI 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность. ГТТИ, 1948.
2. Hodge. Rigid plastic analysis of symmetrically loaded cylindrical shells. J. Appl. Mech., No. 4, 1954.
3. Онат. Пластическое разрушение цилиндрических оболочек под действием осесимметричной нагрузки. Механика, вып. 6, 1955.
4. Онат, Прагер. Предельное равновесие оболочек вращения. Механика, вып. 5, 1955.
5. Eason, Shield. The influence of free ends on the load carrying capacities of cylindrical shells. J. Mech. Phys. Solids, vol. 4, No 1, 1955.
6. Прагер. Проблемы теории пластичности. Физматгиз, 1958.
7. Shield, Drucker. Limit strength of thin-walled pressure vessels. Proc. third U. S. Nat. Congr. appl. mech., 1958.
8. Микеладзе М. Ш. Общая теория анизотропных жестко-пластических оболочек. Изв. АН СССР, ОТН, вып. 1, 1957.
9. Розенблюм В. И. Приближенная теория равновесия пластических оболочек. ПММ, т. XVIII, вып. 3, 1954.
10. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Гостехиздат, 1956.
11. Drucker, Shield. Limit analysis of symmetrically loaded thin shells of revolution. J. Appl. Mech., No. 1, 1959.