УРАВНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В ТОНКИХ ОБОЛОЧКАХ ПРИ НАЛИЧИИ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА

В. В. Болотин (Москва)

Если пренебречь обратным термоупругим эффектом, играющим весьма несущественную роль, то задача термоупругости распадается на две решаемые последовательно задачи: на задачу об отыскании температурного поля в оболочке по заданным условиям теплообмена и заданному распределению тепловых источников и на задачу об отыскании напряжений и деформаций.

Пусть x^1, x^2 — криволинейные координаты срединной поверхности оболочки, $x^3 = z$ — координата, отсчитываемая по нормали к срединной поверхности. Тогда для температуры T в любой точке оболочки может быть взято выражение

$$T = T_0(x^1,x^2) + z\Theta(x^1,x^2) \tag{1}$$

где T_0 — температура срединной поверхности, Θ — температурный градиент в направлении нормали к срединной поверхности. Выражение (1) следует рассматривать как некоторый аналог гипотезы Кирхгофа — Лява в теории оболочек.

Задача состоит в получении двух дифференциальных уравнений, связывающих функции T_0 и Θ. Эти же функции войдут в дифференциальные уравнения термоупругих деформаций оболочек. Объединяя уравнения, получим полную систему уравнений термоупругости для тонких оболочек. Частные случаи подобных уравнений для пластинок уже приводились в литературе [1, 2]. Ниже будет дано их обобщение на случай нестационарных полей в оболочках при наличии источников тепла; попутно исправляется неточность в одном из уравнений Мелана и Паркуса [1].

Будем исходить из вариационного принципа для задачи теплопроводности. Рассмотрим функционал

$$I = \int_{t_0}^{t_1}\left(\int_V L\,dV + \int_S M\,dS\right)dt \tag{2}$$

$$L = \frac{c_p\rho}{2}\left(T^*\frac{\partial T}{\partial t} - T\frac{\partial T^*}{\partial t}\right) + \lambda\nabla_i T\,\nabla^i T^* - q\,(T + T^*), \qquad M = k\,(TT^* - T_{\text{н}}T - T_{\text{н}}T^*)$$

При этом c_p — удельная теплоемкость, ρ — плотность материала, λ — коэффициент теплопроводности, q — плотность тепловых источников, равная количеству тепла, выделяющегося в единице объема тела в единицу времени, k — коэффициент теплоотдачи поверхности тела, $T_{\text{н}}$ — температура окружающей среды. Наряду с температурой T в выражения (3) и (4) входит температура T^* процесса, протекающего в обратном направлении (введение этого процесса необходимо для того, чтобы явление в целом было консервативным). Интегралы в правой части (2) берутся по всему объему тела V и по поверхности S; t_0 и t_1 — два произвольно выбираемых момента времени. Через $\nabla_i T$ и $\nabla^i T^*$ обозначены ковариантная и контравариантная производные по криволинейной координате x^i.

Нетрудно убедиться в том, что уравнение Остроградского—Эйлера и естественное граничное условие для вариационной задачи $\delta I = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{T}^*} + \nabla_i\frac{\partial L}{\partial(\nabla_i T^*)} - \frac{\partial L}{\partial T^*} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial(\nabla_i T^*)}n_i + \frac{\partial M}{\partial T^*} = 0 \tag{3}$$

совпадают с уравнением теплопроводности и условием теплопередачи на поверхности S:

$$c_p\rho\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda\nabla_i\nabla^i T = q, \qquad \lambda\nabla^i T n_i + k\,(T - T_{\text{н}}) = 0 \tag{4}$$

Здесь n_i — вектор внешней нормали к поверхности S.

Рассмотрим тонкую оболочку постоянной толщины h. Криволинейные координаты срединной поверхности будем обозначать через x^α (в дальнейшем полагается, что греческие индексы принимают значения 1,2). Срединная поверхность Ω ограничена контуром Γ. Наружную поверхность оболочки обозначим через Ω_+, внутреннюю через Ω_-; соответствующие температуры среды обозначим через T_+ и T_-. Предположим, что толщина оболочки достаточно мала по сравнению с радиусами кривизны, чтобы можно было положить $\Omega_+ \approx \Omega_- \approx \Omega$.

Заменяя интегрирование по объему V интегрированием по толщине оболочки от $-h/2$ до $h/2$ и интегрированием по срединной поверхности, а интегрирование по поверхности S — интегрированием по Ω_+, Ω_- и по торцевой поверхности оболочки, получим вместо (2) функционал

$$I = \int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{\Omega}\int_{-h/2}^{h/2} L d\Omega dz + \int_{\Omega} M_+ d\Omega + \int_{\Omega} M_- d\Omega + \int_{\Gamma}\int_{-h/2}^{h/2} M_\Gamma d\Gamma\, dz\right)dt \qquad (5)$$

Здесь M_+, M_- и M_Γ — выражения типа (4) для поверхностей Ω_+, Ω_- и для торцевой поверхности. В соответствии с предположением (1) примем, что $T = T_0 + z\Theta$, $T^* = T_0^* + z\Theta^*$. Производя интегрирование по z, легко получим

$$\int_{-h/2}^{h/2} L dz = \frac{c_p\rho h}{2}\left(T_0^*\frac{\partial T_0}{\partial t} - T_0\frac{\partial T_0^*}{\partial t}\right) + \frac{c_p\rho h^3}{12}\left(\Theta^*\frac{\partial\Theta}{\partial t} - \Theta\frac{\partial\Theta^*}{\partial t}\right) +$$

$$+ \lambda h\left(\nabla^\alpha T_0 \nabla_\alpha T_0^* + \Theta\Theta^*\right) + \frac{\lambda h^3}{12}\nabla^\alpha\Theta\,\nabla_\alpha\Theta^* - Q\,(T_0 + T_0^*) - Qz_0\,(\Theta + \Theta^*)$$

При этом

$$Q = \int_{-h/2}^{h/2} q dz, \quad z_0 = \frac{1}{Q}\int_{-h/2}^{h/2} qz dz$$

Первая величина представляет собой, очевидно, плотность тепловых источников, отнесенную к единице площади срединной поверхности; параметр z_0 играет роль координаты «центра тяжести» источников. Для M_+ и M_- получим выражения

$$M_\pm = k\left[\left(T_0 \pm \frac{1}{2}h\Theta\right)\left(T_0^* \pm \frac{1}{2}h\Theta^*\right) - T_\pm\left(T_0 + T_0^* \pm \frac{h}{2}\Theta \pm \frac{h}{2}\Theta^*\right)\right]$$

Кроме того,

$$\int_{-h/2}^{h/2} M_\Gamma dz = kh\left[T_0 T_0^* - T_\Gamma\,(T_0 + T_0^*)\right] + \frac{kh^3}{12}\left[\Theta\Theta^* - \Theta_\Gamma\,(\Theta + \Theta^*)\right]$$

Здесь T_Γ и Θ_Γ — средняя температура и температурный градиент на торцах.

Уравнения Остроградского — Эйлера для вариационной задачи $\delta I = 0$, где I определяется согласно (5), имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{T}_0^*} + \nabla_\alpha\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\alpha T_0^*)} - \frac{\partial}{\partial T_0^*}(L + M_+ + M_-) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}^*} + \nabla_\alpha\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\alpha \Theta^*)} - \frac{\partial}{\partial \Theta^*}(L + M_+ + M_-) = 0$$

Отсюда приходим к уравнениям

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} - \chi\Delta T_0 + \frac{2kT_0}{c_p\rho h} = \frac{Q}{c_p\rho h} + \frac{k}{c_p\rho h}(T_+ + T_-) \qquad (6)$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} - \chi\Delta\Theta + \left(\frac{12\chi}{h^2} + \frac{6k}{c_p\rho h}\right)\Theta = \frac{12Qz_0}{c_p\rho h^3} + \frac{6k\,(T_+ - T_-)}{c_p\rho h^2} \qquad (7)$$

где $\Delta = \nabla^\alpha\Delta_\alpha$, $\chi = \lambda / c_p\rho$ — коэффициент температуропроводности.

Естественные граничные условия

$$\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\alpha T_0^*)}n_\alpha + \frac{\partial M_\Gamma}{\partial T_0^*} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial(\nabla_\alpha\Theta^*)}n_\alpha + \frac{\partial M_\Gamma}{\partial\Theta^*} = 0$$

дают условия теплообмена на торцах оболочки:

$$\lambda\nabla^\alpha T_0 n_\alpha + k\,(T_0 - T_\Gamma) = 0, \qquad \lambda\nabla^\alpha\Theta n_\alpha + k\,(\Theta - \Theta_\Gamma) = 0 \qquad (8)$$

Заметим, что задачи об определении температуры на срединной поверхности T_0 и градиента Θ оказались для тонкой оболочки полностью независимыми.

Частный случай уравнения (6) для стационарного поля в пластинке при отсутствии источников тепла приводится в работах [1,2], где было использовано осреднение уравнений теплопроводности. Уравнение, аналогичное уравнению (7), приведено в работе [1] в виде (использованы наши обозначения)

$$-\chi\triangle\Theta+\frac{6k}{c_p\rho h}\Theta=\frac{6k(T_+-T_-)}{c_p\rho h^2} \tag{9}$$

Таким образом, оно не согласуется с уравнением (7). Легко видеть, что уравнение (9) является ошибочным. В случае $\Delta T_0=\Delta\Theta=0$ температура свободной поверхности совпадает с температурой окружающей среды. а это противоречит условиям теплообмена на поверхности. Уравнение (7) свободно от этого недостатка.

Для перехода к конкретной криволинейной системе координат x_1, x_2 с коэффициентами Ляме H_1 и H_2 достаточно заменить оператор Лапласа по известной формуле

$$\triangle=\frac{1}{H_1H_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$$

Например, для круговой конической оболочки с углом при вершине β и при выборе в качестве координат расстояния x, измеряемого от вершины вдоль образующей, и полярного угла φ получим

$$\frac{\partial T_0}{\partial t}-\chi\left(\frac{1}{x}\frac{\partial T_0}{\partial x}+\frac{\partial^2T_0}{\partial x^2}+\frac{1}{x^2\sin^2\beta}\frac{\partial^2T_0}{\partial\varphi^2}\right)+\frac{2kT_0}{c_p\rho h}=\frac{Q}{c_p\rho h}+\frac{k}{c_p\rho h}(T_++T_-) \tag{10}$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t}-\chi\left(\frac{1}{x}\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}+\frac{1}{x^2\sin^2\beta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\varphi^2}\right)+\left(\frac{12\chi}{h^2}+\frac{6k}{c_p\rho h}\right)\Theta=\frac{12Qz_0}{c_p\rho h^3}+\frac{6k(T_+-T_-)}{c_p\rho h^2}$$

Условия (8) на торце оболочки $x=x_0$ имеют вид:

$$\frac{\partial T_0}{\partial x}+k(T_0-T_\Gamma)=0,\qquad \frac{\partial\Theta}{\partial x}+k(\Theta-\Theta_\Gamma)=0$$

Уравнения для температурных полей должны рассматриваться совместно с уравнениями, которые описывают термоупругие деформации в оболочках. Так, для пологой оболочки с толщиной h, модулем упругости E, коэффициентом Пуассона μ и коэффициентом температурного расширения α в случае прогибов, соизмеримых с толщиной, получим систему уравнений

$$\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}[\triangle\triangle w+\alpha(1+\mu)\triangle\Theta]=$$
$$=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}\left(k_1+\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}\left(k_2+\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)-2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}+p(x_1,x_2,t)-\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{11}$$

$$\frac{1}{Eh}\triangle\triangle\Phi+\alpha\triangle T_0=\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-k_1\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-k_2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \tag{12}$$

Здесь $w(x_1, x_2, t)$ — функция нормального прогиба, $\Phi(x_1, x_2, t)$ — функция тангенциальных усилий, k_1 и k_2 — главные кривизны срединной поверхности (предполагается, что линии кривизны совпадают с координатными линиями $x_2=\text{const}$ и $x_1=\text{const}$), $p(x_1, x_2, t)$ — внешняя нормальная нагрузка, отнесенная к единице срединной поверхности. Уравнение (11) содержит инерционный член, соответствующий нормальным перемещениям. Таким образом, система пригодна для описания колебаний, происходящих с частотами, имеющими порядок собственных частот нормальных колебаний, но малых по сравнению с собственными частотами тангенциальных колебаний. Если при рассмотрении нестационарных задач используется операционный метод, то целесообразно иметь дело с изображениями функций T_0 и Θ, не переходя к оригиналу [3]. В этом случае совместное рассмотрение уравнений (6) и (7) с уравнениями типа (11) и (12) дает весьма большие преимущества.

Поступила 26 XII 1959

Институт механики
АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Мелан Э. и Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. Физматгиз, 1958.
2. Marguerre K. Thermo-elastische Platten-Gleichungen. Zeitschr. angew. Math. Mech., 1935, 15, No. 6.
3. Даниловская В. И. Об одной динамической задаче термоупругости. ПММ, 1952, т. XVI, вып. 3.