Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

К ТЕОРИИ ИЗГИБА АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК И ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

С. А. Амбарцумян

(Ереван)

1. Рассмотрим тонкую ортотропную оболочку постоянной толщины h. Пусть материал оболочки подчиняется обобщенному закону Гука и в каждой точке имеет три плоскости упругой симметрии, главные направления которых совпадают с направлениями координатных линий α, β, γ. За координатную поверхность принимаем срединную поверхность оболочки, которая отнесена к криволинейным ортогональным координатам α и β, совпадающим с линиями главной кривизны срединной поверхности. Третья координатная линия γ прямолинейна и представляет расстояние по нормали от точки (α, β) срединной поверхности до точки (α, β, γ) оболочки.

Отказываясь от гипотезы недеформируемых нормалей, сделаем следующие предположения:

а) расстояния по нормали (γ) между двумя точками оболочки после деформации остаются неизменными;

б) касательные напряжения $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ по толщине оболочки меняются по заданному закону.

2. Для большей наглядности предлагаемый метод первоначально изложим для пластинки ($k_1 = 0$, $k_2 = 0$, α, β, γ — прямолинейные ортогональные координаты).

Основные предположения запишем следующим образом:

а) приближенно считаем

$$e_\gamma = 0 \tag{2.1}$$

б) касательные напряжения $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ имеют вид

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha\gamma} &= f_1(\gamma)\,\varphi(\alpha, \beta) + \frac{\gamma}{h}(X^+ + X^-) + \frac{X^+ - X^-}{2}\\ \tau_{\beta\gamma} &= f_2(\gamma)\,\psi(\alpha, \beta) + \frac{\gamma}{h}(Y^+ + Y^-) + \frac{Y^+ - Y^-}{2}\end{aligned} \tag{2.2}$$

где $X^+, \ldots, Y^-$ — компоненты в осях подвижного трехгранника (по направлениям положительных касательных к линиям $\beta = \mathrm{const}$, $\alpha = \mathrm{const}$) векторов интенсивности поверхностных нагрузок, приложенных на внешних плоскостях пластинки $\gamma = {}^1/_2 h$ и $\gamma = -{}^1/_2 h$, $\varphi(\alpha, \beta)$, $\psi(\alpha, \beta)$ — произвольные искомые функции координат α, β; $f_i(\gamma)$ — функции, характеризующие законы изменения касательных напряжений $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ по толщине, причем $f_i(\pm{}^1/_2 h) = 0$.

Из уравнений обобщенного закона Гука имеем

$$\sigma_\alpha = B_{11}e_\alpha + B_{12}e_\beta - A_1\sigma_\gamma, \quad \sigma_\beta = B_{22}e_\beta + B_{12}e_\alpha - A_2\sigma_\gamma \tag{2.3}$$

$$\tau_{\alpha\gamma} = B_{55}e_{\alpha\gamma}, \quad \tau_{\beta\gamma} = B_{44}e_{\beta\gamma}, \quad \tau_{\alpha\beta} = B_{66}e_{\alpha\beta} \tag{2.4}$$

где[1]

$$B_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2}, \quad B_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}, \quad B_{66} = G_{12}, \quad B_{55} = G_{13}, \quad B_{44} = G_{23}$$

$$A_1 = -\frac{E_1}{E_3}\frac{\nu_{13}+\nu_2\nu_{23}}{1-\nu_1\nu_2}, \quad A_2 = -\frac{E_2}{E_3}\frac{\nu_{23}+\nu_1\nu_{13}}{1-\nu_1\nu_2}, \quad B_{12} = \frac{\nu_2E_1}{1-\nu_1\nu_2} = \frac{\nu_1E_2}{1-\nu_1\nu_2} \tag{2.5}$$

Из уравнений теории упругости для компонент деформаций имеем

$$e_\alpha = \frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha}, \quad e_\beta = \frac{\partial u_\beta}{\partial\beta}, \quad e_{\alpha\beta} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial\alpha} \tag{2.6}$$

$$e_\gamma = \frac{\partial u_\gamma}{\partial\gamma}, \quad e_{\alpha\gamma} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial\gamma} + \frac{\partial u_\gamma}{\partial\alpha}, \quad e_{\beta\gamma} = \frac{\partial u_\beta}{\partial\gamma} + \frac{\partial u_\gamma}{\partial\beta} \tag{2.7}$$

Из соотношений (2.7) в силу (2.1), (2.2) и (2.4) для перемещений точек пластинки получим

$$u_\alpha = u(\alpha, \beta) - \gamma\frac{\partial w}{\partial\alpha} + \gamma X_1 + \frac{\gamma^2}{2h}X_2 + J_{01}(\gamma)\,\Phi_1 \tag{2.8}$$

$$u_\beta = v(\alpha, \beta) - \gamma\frac{\partial w}{\partial\beta} + \gamma Y_1 + \frac{\gamma^2}{2h}Y_2 + J_{02}(\gamma)\,\Phi_2$$

$$u_\gamma = w(\alpha, \beta) \tag{2.9}$$

где

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{G_{13}}\frac{X^+ - X^-}{2}, \quad & Y_1 &= \frac{1}{G_{23}}\frac{Y^+ - Y^-}{2}, \quad & \Phi_1 &= \frac{1}{G_{13}}\varphi(\alpha, \beta) \\ X_2 &= \frac{1}{C_{13}}(X^+ - X^-), \quad & Y_2 &= \frac{1}{G_{23}}(Y^+ - Y^-), \quad & \Phi_2 &= \frac{1}{G_{23}}\psi(\alpha, \beta) \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$J_{01} = \int_0^\gamma f_1(\gamma)\,d\gamma, \quad J_{02} = \int_0^\gamma f_2(\gamma)\,d\gamma \tag{2.11}$$

$u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$ — тангенциальное и нормальное перемещения срединной — координатной поверхности оболочки.

Из третьего уравнения равновесия дифференциального элемента пластинки [2] получим

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma = {} & \frac{B_{55}}{2}\left[J_{01}\left(\frac{h}{2}\right) + J_{01}\left(-\frac{h}{2}\right)\right]\frac{\partial\Phi_1}{\partial\alpha} + \frac{B_{44}}{2}\left[J_{02}\left(\frac{h}{2}\right) + J_{02}\left(-\frac{h}{2}\right)\right]\frac{\partial\Phi_2}{\partial\beta} + \\ & + \frac{h}{8}\left(B_{55}\frac{\partial X_2}{\partial\alpha} + B_{44}\frac{\partial Y_2}{\partial\beta}\right) - B_{55}\left[J_{01}(\gamma)\frac{\partial\Phi_1}{\partial\alpha} + \gamma\frac{\partial X_1}{\partial\alpha} + \frac{\gamma^2}{2h}\frac{\partial X_2}{\partial\alpha}\right] - \\ & - B_{44}\left[J_{02}(\gamma)\frac{\partial\Phi_2}{\partial\beta} + \gamma\frac{\partial Y_1}{\partial\beta} + \frac{\gamma^2}{2h}\frac{\partial Y_2}{\partial\beta}\right] + Z_1 \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} & B_{55}\left[J_{01}\left(\frac{h}{2}\right) - J_{01}\left(-\frac{h}{2}\right)\right]\frac{\partial\Phi_1}{\partial\alpha} + B_{44}\left[J_{02}\left(\frac{h}{2}\right) - J_{02}\left(-\frac{h}{2}\right)\right]\frac{\partial\Phi_2}{\partial\beta} = \\ & = -h\left(B_{55}\frac{\partial X_1}{\partial\alpha} + B_{44}\frac{\partial Y_1}{\partial\beta}\right) - Z_2 \end{aligned} \tag{2.13}$$

---

[1] Здесь и в последующем для упругих постоянных приняты общеизвестные обозначения [1,2].

где

$$Z_1 = \frac{Z^+ - Z^-}{2}, \qquad Z_2 = Z^+ + Z^- \tag{2.14}$$

Z^+, Z^- — нормальные компоненты векторов интенсивности поверхностных нагрузок, приложенных на внешних поверхностях пластинки ($\gamma = {}^1/_2 h$, $\gamma = -{}^1/_2 h$).

Уравнение (2.13) является третьим интегральным уравнением равновесия. Из (2.3) и (2.4) в силу (2.6), (2.8), (2.9) и (2.12) можно получить выражения для σ_α, σ_β и $\tau_{\alpha\beta}$, которые здесь не приводятся.

Подставляя значения напряжений σ_α, σ_β, $\tau_{\alpha\beta}$, $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ в обычные формулы для внутренних сил и моментов, получим

$$T_1 = B_{11}\left(h\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{h^2}{24}\frac{\partial X_2}{\partial \alpha} + J_1\frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha}\right) + B_{12}\left(h\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{h^2}{24}\frac{\partial Y_2}{\partial \beta} + J_2\frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta}\right) +$$

$$+ A_1\left[B_{55}\left(J_1\frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} + \frac{h^2}{24}\frac{\partial X_2}{\partial \alpha}\right) + B_{44}\left(J_2\frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta} + \frac{h^2}{24}\frac{\partial Y_2}{\partial \beta}\right) - h\chi(\alpha, \beta)\right] \tag{2.15}$$

$$T_2 = B_{22}\left(h\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{h^2}{24}\frac{\partial X_2}{\partial \beta} + J_2\frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta}\right) + B_{12}\left(h\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{h^2}{24}\frac{\partial X_2}{\partial \alpha} + J_1\frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha}\right) +$$

$$+ A_2\left[B_{44}\left(J_2\frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta} + \frac{h^2}{24}\frac{\partial Y_2}{\partial \beta}\right) + B_{55}\left(J_1\frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} + \frac{h^2}{24}\frac{\partial X_2}{\partial \alpha}\right) - h\chi(\alpha, \beta)\right] \tag{2.16}$$

$$S = B_{66}\left[h\left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha}\right) + \frac{h^2}{24}\left(\frac{\partial X_2}{\partial \beta} + \frac{\partial Y_2}{\partial \alpha}\right) + J_1\frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} + J_2\frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha}\right] \tag{2.17}$$

$$M_1 = B_{11}\left(-\frac{h^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{h^3}{12}\frac{\partial X_1}{\partial \alpha} + J_3\frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha}\right) + B_{12}\left(-\frac{h^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{h^3}{12}\frac{\partial Y_1}{\partial \beta} +\right.$$

$$\left. + J_4\frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta}\right) + A_1\left[B_{55}\left(J_3\frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} + \frac{h^3}{12}\frac{\partial X_1}{\partial \alpha}\right) + B_{44}\left(J_4\frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta} + \frac{h^3}{12}\frac{\partial Y_1}{\partial \beta}\right)\right] \tag{2.18}$$

$$M_2 = B_{22}\left(-\frac{h^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{h^3}{12}\frac{\partial Y_1}{\partial \beta} + J_4\frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta}\right) + B_{12}\left(-\frac{h^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{h^3}{12}\frac{\partial X_1}{\partial \alpha} + J_3\frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha}\right) +$$

$$+ A_2\left[B_{44}\left(J_4\frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta} + \frac{h^3}{12}\frac{\partial Y_1}{\partial \beta}\right) + B_{55}\left(J_3\frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} + \frac{h^3}{12}\frac{\partial X_1}{\partial \alpha}\right)\right] \tag{2.19}$$

$$H = B_{66}\left[-2\frac{h^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha\,\partial \beta} + \frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial X_1}{\partial \beta} + \frac{\partial Y_1}{\partial \alpha}\right) + J_3\frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} + J_4\frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha}\right] \tag{2.20}$$

$$N_1 = B_{55}(J_5\Phi_1 + hX_1), \qquad N_2 = B_{44}(J_6\Phi_2 + hY_1) \tag{2.21}$$

где введены следующие обозначения:

$$\chi(\alpha, \beta) = \frac{B_{55}}{2}\left[J_{01}({}^1/_2 h) + J_{01}(-{}^1/_2 h)\right]\frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} + \frac{B_{44}}{2}\left[J_{02}({}^1/_2 h) + J_{02}(-{}^1/_2 h)\right]\frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta} +$$

$$+ \frac{h}{8}\left(B_{55}\frac{\partial X_2}{\partial \alpha} + B_{44}\frac{\partial Y_2}{\partial \beta}\right) + Z_1 \tag{2.22}$$

$$J_1 = \int_{-{}^1/_2 h}^{{}^1/_2 h} J_{01}(\gamma)\,d\gamma, \quad J_3 = \int_{-{}^1/_2 h}^{{}^1/_2 h} \gamma J_{01}(\gamma)\,d\gamma, \quad J_5 = \int_{-{}^1/_2 h}^{{}^1/_2 h} f_1(\gamma)\,d\gamma$$

$$J_2 = \int_{-{}^1/_2 h}^{{}^1/_2 h} J_{02}(\gamma)\,d\gamma, \quad J_4 = \int_{-{}^1/_2 h}^{{}^1/_2 h} \gamma J_{02}(\gamma)\,d\gamma, \quad J_6 = \int_{-{}^1/_2 h}^{{}^1/_2 h} f_2(\gamma)\,d\gamma \tag{2.23}$$

Уравнения равновесия элемента пластинки имеют вид

$$\frac{\partial T_1}{\partial \alpha}+\frac{\partial S}{\partial \beta}=-B_{55}X_2, \qquad \frac{\partial T_2}{\partial \beta}+\frac{\partial S}{\partial \alpha}=-B_{44}Y_2 \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial \alpha}+\frac{\partial H}{\partial \beta}=N_1, \qquad \frac{\partial M_2}{\partial \beta}+\frac{\partial H}{\partial \alpha}=N_2, \qquad \frac{\partial N_1}{\partial \alpha}+\frac{\partial N_2}{\partial \beta}=-Z_2$$

Подставляя значения внутренних сил и моментов из (2.15) — (2.21) в уравнения (2.24) и учитывая (2.10) — (2.11), получим

$$\begin{gathered}L_{11}(C_{ik})\,u+L_{12}(C_{ik})\,v+a_{55}J_1L_{11}(B_{ik})\,\varphi+a_{44}J_2L_{12}(B_{ik})\,\psi-\\-A_1\left[\left\{\frac{h}{2}\left[J_{01}\left(\frac{h}{2}\right)+J_{01}\left(-\frac{h}{2}\right)\right]-J_1\right\}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}+\left\{\frac{h}{2}\left[J_{02}\left(\frac{h}{2}\right)+J_{02}\left(-\frac{h}{2}\right)\right]-\right.\right.\\\left.\left.-J_2\right\}\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\partial\beta}\right]=-\frac{h^2}{24}\left[L_{11}(B_{ik})\,X_2+L_{12}(B_{ik})\,Y_2\right]-\\-B_{55}X_2+A_1\left[\frac{h^2}{12}\left(B_{55}\frac{\partial^2X_2}{\partial\alpha^2}+B_{44}\frac{\partial^2Y_2}{\partial\alpha\partial\beta}\right)+h\frac{\partial Z_1}{\partial\alpha}\right]\end{gathered} \tag{2.25}$$

$$\begin{gathered}L_{22}(C_{ik})\,v+L_{12}(C_{ik})\,u+a_{44}J_2L_{22}(B_{ik})\,\psi+a_{55}J_1L_{12}(B_{ik})\,\varphi-\\-A_2\left[\left\{\frac{h}{2}\left[J_{02}\left(\frac{h}{2}\right)+J_{02}\left(-\frac{h}{2}\right)\right]-J_2\right\}\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2}+\left\{\frac{h}{2}\left[J_{01}\left(\frac{h}{2}\right)+J_{01}\left(-\frac{h}{2}\right)\right]-\right.\right.\\\left.\left.-J_1\right\}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\beta}\right]=-\frac{h^2}{24}\left[L_{22}(B_{ik})\,Y_2+L_{12}(B_{ik})\,X_2\right]-B_{44}Y_2+A_2\left[\frac{h^2}{12}\left(B_{44}\frac{\partial^2Y_2}{\partial\beta^2}+\right.\right.\\\left.\left.+B_{55}\frac{\partial^2X_2}{\partial\alpha\partial\beta}\right)+h\frac{\partial Z_1}{\partial\beta}\right]\end{gathered} \tag{2.26}$$

$$\begin{gathered}\left[J_{01}\left(\frac{h}{2}\right)-J_{01}\left(-\frac{h}{2}\right)\right]\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\left[J_{02}\left(\frac{h}{2}\right)-J_{02}\left(-\frac{h}{2}\right)\right]\frac{\partial\psi}{\partial\beta}=\\=-Z_2-h\left(B_{55}\frac{\partial X_1}{\partial\alpha}+B_{44}\frac{\partial Y_1}{\partial\beta}\right)\end{gathered} \tag{2.27}$$

$$\begin{gathered}L_{13}(D_{ik})\,w-a_{55}J_3L_{11}(B_{ik})\,\varphi-a_{44}J_4L_{12}(B_{ik})\,\psi+\left[J_{01}\left(\frac{h}{2}\right)-J_{01}\left(-\frac{h}{2}\right)\right]\varphi-\\-A_1\left(J_3\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}+J_4\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\partial\beta}\right)=\frac{h^3}{12}\left[L_{11}(B_{ik})\,X_1+L_{12}(B_{ik})\,Y_1\right]-hB_{55}X_1+\\+A_1\frac{h^3}{12}\left(B_{55}\frac{\partial^2X_1}{\partial\alpha^2}+B_{44}\frac{\partial^2Y_1}{\partial\alpha\partial\beta}\right)\end{gathered} \tag{2.28}$$

$$\begin{gathered}L_{23}(D_{ik})\,w-a_{44}J_4L_{22}(B_{ik})\,\psi-a_{55}J_3L_{12}(B_{ik})\,\varphi+\left[J_{02}\left(\frac{h}{2}\right)-J_{02}\left(-\frac{h}{2}\right)\right]\psi-\\-A_2\left(J_3\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2}+J_4\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\beta}\right)=\frac{h^3}{12}\left[L_{22}(B_{ik})\,Y_1+L_{12}(B_{ik})\,X_1\right]-\\-hB_{44}Y_1+A_2\frac{h^3}{12}\left(B_{44}\frac{\partial^2Y_1}{\partial\beta^2}+B_{55}\frac{\partial^2X_1}{\partial\alpha\partial\beta}\right)\end{gathered} \tag{2.29}$$

где

$$L_{11}(a_{ik})=a_{11}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+a_{66}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2},\quad L_{22}(a_{ik})=a_{22}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+a_{66}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} \tag{2.30}$$

$$L_{12}(a_{ik})=(a_{12}+a_{66})\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta},\qquad D_{ik}=B_{ik}\frac{h^3}{12},\qquad C_{ik}=B_{ik}h$$

$$L_{13}(a_{ik})=a_{11}\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3}+(a_{12}+2a_{66})\frac{\partial^3}{\partial\alpha\partial\beta^2},\qquad L_{23}(a_{ik})=a_{22}\frac{\partial^3}{\partial\beta^3}+(a_{12}+2a_{66})\frac{\partial^3}{\partial\beta\partial\alpha^2}$$

Уравнения (2.25) — (2.29) составляют полную систему пяти дифференциальных уравнений относительно пяти искомых функций u, v, w, φ, ψ, через которые представляются все расчетные величины пластинки.

Граничные условия представляются обычным образом [3,4].

3. Большой практический интерес представляет случай, когда $X^{\pm}=0$, $Y^{\pm}=0$, т. е. когда пластинка нагружена лишь нормально приложенной

нагрузкой $Z^{\pm}$. В этом случае, полагая также, что [3]

$$f_i(\gamma) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}h^2 - \gamma^2\right) \tag{3.1}$$

уравнения (2.25) — (2.29) примут вид

$$L_{11}(C_{ik})\,u + L_{12}(C_{ik})\,v = hA_1\frac{\partial Z_1}{\partial\alpha}, \quad L_{22}(C_{ik})\,v + L_{12}(C_{ik})\,u = hA_2\frac{\partial Z_1}{\partial\beta} \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\psi}{\partial\beta} = -\frac{12}{h^3}Z_2 \tag{3.3}$$

$$L_{13}(D_{ik})\,w - \frac{h^2}{10}\left[a_{55}L_{11}(D_{ik})\,\varphi + a_{44}L_{12}(D_{ik})\,\psi\right] + \frac{h^3}{12}\varphi = -A_1\frac{h^2}{10}\frac{\partial Z_2}{\partial\alpha} \tag{3.4}$$

$$L_{23}(D_{ik})\,w - \frac{h^2}{10}\left[a_{44}L_{22}(D_{ik})\,\psi + a_{55}L_{12}(D_{ik})\,\varphi\right] + \frac{h^3}{12}\psi = -A_2\frac{h^2}{10}\frac{\partial Z_2}{\partial\beta} \tag{3.5}$$

Тогда для расчетных величин имеем

$$\begin{aligned} T_1 &= C_{11}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + C_{12}\frac{\partial v}{\partial\beta} - hA_1Z_1, \\ T_2 &= C_{22}\frac{\partial v}{\partial\beta} + C_{12}\frac{\partial u}{\partial\alpha} - hA_2Z_1, \end{aligned} \qquad S = C_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial\beta} + \frac{\partial v}{\partial\alpha}\right) \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} M_1 &= -D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} - D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + \frac{h^2}{10}\left(\frac{D_{11}}{B_{55}}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{D_{12}}{B_{44}}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right) - \frac{h^2}{10}A_1Z_2 \\ M_2 &= -D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} - D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} + \frac{h^2}{10}\left(\frac{D_{22}}{B_{44}}\frac{\partial\psi}{\partial\beta} + \frac{D_{12}}{B_{55}}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right) - \frac{h^2}{10}A_2Z_2 \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$H = D_{66}\left[-2\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{h^2}{10}\left(\frac{1}{B_{55}}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} + \frac{1}{B_{44}}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right)\right], \quad N_1 = \frac{h^3}{12}\varphi, \quad N_2 = \frac{h^3}{12}\psi$$

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha = B_{11}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha} - \gamma\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\right) + B_{12}\left(\frac{\partial v}{\partial\beta} - \gamma\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\gamma\frac{h^2}{4} - \frac{\gamma^3}{3}\right)\left(\frac{B_{11}}{B_{55}}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{B_{12}}{B_{44}}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right) - \\ - A_1\left[Z_1 + 6\left(\frac{1}{4}\frac{\gamma}{h} - \frac{1}{3}\frac{\gamma^3}{h^3}\right)Z_2\right] \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\beta = B_{22}\left(\frac{\partial v}{\partial\beta} - \gamma\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\right) + B_{12}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha} - \gamma\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\gamma\frac{h^2}{4} - \frac{\gamma^3}{3}\right)\left(\frac{B_{22}}{B_{44}}\frac{\partial\psi}{\partial\beta} + \frac{B_{12}}{B_{55}}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right) - \\ - A_2\left[Z_1 + 6\left(\frac{1}{4}\frac{\gamma}{h} - \frac{1}{3}\frac{\gamma^3}{h^3}\right)Z_2\right] \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\tau_{\alpha\beta} = B_{66}\left[\frac{\partial u}{\partial\beta} + \frac{\partial v}{\partial\alpha} - 2\gamma\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{1}{2}\left(\gamma\frac{h^2}{4} - \frac{\gamma^3}{3}\right)\left(\frac{1}{B_{55}}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} + \frac{1}{B_{44}}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right)\right] \tag{3.10}$$

4. В случае пологой ортотропной оболочки приближенно полагаем, что внутренняя геометрия срединной поверхсти оболочки ненулевой гауссовой кривизны не отличается от эвклидовой геометрии на плоскости, т. е. при соответственно выбранной абсолютной системе координат для коэффициентов первой квадратичной формы приближенно имеем [2,5]

$$A = 1, \qquad B = 1 \tag{4.1}$$

С такой же точностью принимаем, что главные кривизны срединной координатной поверхности ведут себя как постоянные величины

$$k_1 = \text{const}, \qquad k_2 = \text{const} \tag{4.2}$$

Теория весьма пологих оболочек, учитывающая явления поперечного сдвига и нормальных напряжений σ_γ, строится на основании предположений, приведенных в п. 1, которые запишем следующим образом:

а) приближенно считаем

$$e_\gamma = 0 \tag{4.3}$$

б) касательные напряжения имеют вид [3,4]

$$\tau_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}h^2 - \gamma^2\right)\varphi(\alpha, \beta), \qquad \tau_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}h^2 - \gamma^2\right)\psi(\alpha, \beta) \tag{4.4}$$

где, как и раньше, $\varphi = \varphi(\alpha, \beta)$ и $\psi = \psi(\alpha, \beta)$ — произвольные искомые функции координат $\alpha\beta$.

Здесь для простоты предполагается, что оболочка нагружена лишь нормально приложенной нагрузкой $Z = Z^+$ и что касательные напряжения $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ по толщине оболочки изменяются по закону параболы (3.1).

Из уравнений теории упругости для компонент деформаций имеем

$$e_\alpha = \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + k_1 u_\gamma, \qquad e_\beta = \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + k_2 u_\gamma, \qquad e_{\alpha\beta} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial \alpha}$$

$$e_\gamma = \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma}, \qquad e_{\alpha\gamma} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial \gamma} + \frac{\partial u_\gamma}{\partial \alpha}, \qquad e_{\beta\gamma} = \frac{\partial u_\beta}{\partial \gamma} + \frac{\partial u_\gamma}{\partial \beta} \tag{4.5}$$

Здесь и в последующем величинами порядка $h k_i$ по сравнению с единицей пренебрегаем на основании существенной пологости рассматриваемой тонкой оболочки там, где это очевидно; при этом оболочка предполагается тонкой, но ее толщина h — величиной конечной.

Учитывая (4.4), обобщенный закон Гука, который в случае рассматриваемой оболочки имеет вид (2.3) и (2.4), для перемещений какой-либо точки оболочки согласно (4.5) получим

$$u_\alpha = u - \gamma\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{\gamma}{2B_{55}}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{\gamma^2}{3}\right)\varphi,\; u_\beta = v - \gamma\frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{\gamma}{2B_{44}}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{\gamma^2}{3}\right)\psi,\; u_\gamma = w \tag{4.6}$$

где $u = u(\alpha, \beta)$, $v = v(\alpha, \beta)$, $w = w(\alpha, \beta)$ — тангенциальные и нормальное перемещения соответствующей точки координатной — срединной поверхности оболочки. Из (4.6), подставляя значения u_α, u_β, u_γ в (4.5) и далее в (2.3) и (2.4), для основных расчетных напряжений получим

$$\sigma_\alpha = B_{11}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + B_{12}\frac{\partial v}{\partial \beta} - \gamma\left(B_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}\right) + (k_1 B_{11} + k_2 B_{12})\, w +$$
$$+ \frac{\gamma}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{\gamma^2}{3}\right)\left(B_{11}a_{55}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + B_{12}a_{44}\frac{\partial \psi}{\partial \beta}\right) - A_1\sigma_\gamma \tag{4.7}$$

$$\sigma_\beta = B_{22}\frac{\partial v}{\partial \beta} + B_{12}\frac{\partial u}{\partial \alpha} - \gamma\left(B_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}\right) + (k_2 B_{22} + k_1 B_{12})\, w +$$
$$+ \frac{\gamma}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{\gamma^2}{3}\right)\left(B_{22}a_{44}\frac{\partial \psi}{\partial \beta} + B_{12}a_{55}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right) - A_2\sigma_\gamma \tag{4.8}$$

$$\tau_{\alpha\beta} = B_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha}\right) - 2B_{66}\gamma\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\gamma}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{\gamma^2}{3}\right)\left(B_{66}a_{55}\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + B_{66}a_{44}\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\right) \tag{4.9}$$

Подставляя значения напряжений σ_α, σ_β, $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ в третье дифференциальное уравнение равновесия [2], написанное в криволинейных координатах, и произведя интегрирование по γ, при этом учитывая, что $\sigma_\gamma = Z = Z^+$ при $\gamma = {}^1/_2 h$, а $\sigma_\gamma = 0$ при $\gamma = -{}^1/_2 h$, с точностью теории весьма пологих оболочек для напряжения σ_γ получим

$$\sigma_\gamma = \frac{Z}{2} + \gamma\Big[(k_1 B_{11} + k_2 B_{12})\frac{\partial u}{\partial \alpha} + (k_2 B_{22} + k_1 B_{12})\frac{\partial v}{\partial \beta} +$$
$$+ (k_1^2 B_{11} + 2k_1 k_2 B_{12} + k_2^2 B_{22})\, w\Big] + \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \gamma^2\right)\Big[(k_1 B_{11} + k_2 B_{12})\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} +$$
$$+ (k_2 B_{22} + k_1 B_{12})\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}\Big] - \frac{\gamma}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{\gamma^2}{3}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial \beta}\right) \tag{4.10}$$

Подставляя выражения напряжений σ_α, σ_β, $\tau_{\alpha\beta}$, $\tau_{\alpha\gamma}$, $\tau_{\beta\gamma}$ в обычные формулы, для внутренних сил и моментов получим

$$T_1 = C_{11}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha} + k_1 w\right) + C_{12}\left(\frac{\partial v}{\partial\beta} + k_2 w\right) - A_1 T^* \tag{4.11}$$

$$T_2 = C_{22}\left(\frac{\partial v}{\partial\beta} + k_2 w\right) + C_{12}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha} + k_1 w\right) - A_2 T^* \tag{4.12}$$

$$S = C_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial\beta} + \frac{\partial v}{\partial\alpha}\right) \tag{4.13}$$

$$M_1 = -D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} - D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + \frac{h^2}{10}\left(a_{55}D_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + a_{44}D_{12}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right) - A_1 M^* \tag{4.14}$$

$$M_2 = -D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} - D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} + \frac{h^2}{10}\left(a_{44}D_{22}\frac{\partial\psi}{\partial\beta} + a_{55}D_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right) - A_2 M^* \tag{4.15}$$

$$H = -2D_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{h^2}{10}D_{66}\left(a_{55}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} + a_{44}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right), \quad N_1 = \frac{h^3}{12}\varphi, \quad N_2 = \frac{h^3}{12}\psi \tag{4.16}$$

где

$$T^* = \frac{h}{2}Z + (k_1D_{11} + k_2D_{12})\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} + (k_2D_{22} + k_1D_{12})\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} \tag{4.17}$$

$$M^* = (k_1D_{11} + k_2D_{12})\frac{\partial u}{\partial\alpha} + (k_2D_{22} + k_1D_{12})\frac{\partial v}{\partial\beta} + \tag{4.18}$$

$$+ (k_1^2D_{11} + 2k_1k_2D_{12} + k_2^2D_{22})w - \frac{h^2}{120}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)$$

Уравнения равновесия элемента оболочки имеют вид

$$\frac{\partial T_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial S}{\partial\beta} = 0, \qquad \frac{\partial T_2}{\partial\beta} + \frac{\partial S}{\partial\alpha} = 0, \qquad \frac{\partial M_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial H}{\partial\beta} = N_1$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial\beta} + \frac{\partial H}{\partial\alpha} = N_2, \qquad (k_1T_1 + k_2T_2) - \frac{\partial N_1}{\partial\alpha} - \frac{\partial N_2}{\partial\beta} = Z \tag{4.19}$$

Подставляя выражения (4.11) — (4.16) в уравнения (4.19), получим систему дифференциальных уравнений весьма пологих оболочек:

$$L_{11}(C_{ik})u + L_{12}(C_{ik})v + (k_1C_{11} + k_2C_{12})\frac{\partial w}{\partial\alpha} - \tag{4.20}$$

$$- A_1\left[(k_1D_{11} + k_2D_{12})\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^3} + (k_2D_{22} + k_1D_{12})\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha\partial\beta^2}\right] = A_1\frac{h}{2}\frac{\partial Z}{\partial\alpha}$$

$$L_{22}(C_{ik})v + L_{12}(C_{ik})u + (k_2C_{22} + k_1C_{12})\frac{\partial w}{\partial\beta} - \tag{4.21}$$

$$- A_2\left[(k_2D_{22} + k_1D_{12})\frac{\partial^3 w}{\partial\beta^3} + (k_1D_{11} + k_2D_{12})\frac{\partial^3 w}{\partial\beta\partial\alpha^2}\right] = A_2\frac{h}{2}\frac{\partial Z}{\partial\beta}$$

$$(k_1C_{11} + k_2C_{12})\frac{\partial u}{\partial\alpha} + (k_2C_{22} + k_1C_{12})\frac{\partial v}{\partial\beta} + (k_1^2C_{11} + 2k_1k_2C_{12} + k_2^2C_{22})w -$$

$$- \frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right) - (k_1A_1 + k_2A_2)\left[(k_1D_{11} + k_2D_{12})\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} + \right. \tag{4.22}$$

$$\left. + (k_2D_{22} + k_1D_{12})\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\right] = Z\left[1 + \frac{h}{2}(k_1A_1 + k_2A_2)\right]$$

$$L_{13}(D_{ik})w - \frac{h^2}{10}[a_{55}L_{11}(D_{ik})\varphi + a_{44}L_{12}(D_{ik})\psi] + \frac{h^3}{12}\varphi +$$

$$+ A_1\left[(k_1D_{11} + k_2D_{12})\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} + (k_2D_{22} + k_1D_{12})\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta} + \right. \tag{4.23}$$

$$\left. + (k_1^2D_{11} + 2k_1k_2D_{12} + k_2^2D_{22})\frac{\partial w}{\partial\alpha} - \frac{h^5}{120}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\partial\beta}\right)\right] = 0$$

$$L_{23}(D_{ik})w - \frac{h^2}{10}[a_{44}L_{22}(D_{ik})\psi + a_{55}L_{12}(D_{ik})\varphi] + \frac{h^3}{12}\psi +$$

$$+ A_2\left[(k_2D_{22} + k_1D_{12})\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2} + (k_2D_{11} + k_1D_{12})\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} + \right. \tag{4.24}$$

$$\left. + (k_1^2D_{11} + 2k_1k_2D_{12} + k_2^2D_{22})\frac{\partial w}{\partial\beta} - \frac{h^5}{120}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\beta}\right)\right] = 0$$

Уравнения (4.20) — (4.24) составляют полную систему пяти дифференциальных уравнений относительно пяти искомых функций u, v, w, φ, ψ.

Основные уравнения теории весьма пологих оболочек и в настоящей постановке могут быть представлены в форме смешанного метода [2,5,6].

Уравнение неразрывности деформаций срединной поверхности оболочки имеет вид

$$k_2\varkappa_1 + k_1\varkappa_2 + \frac{\partial^2\varepsilon_2}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{\partial^2\varepsilon_1}{\partial\beta^2} = 0 \qquad (4.25)$$

Рассматривая формулы (4.11) — (4.15), легко заметить, что множителем при жесткости C_{11} является относительная деформация срединной поверхности ε_1, при C_{22} — относительная деформация ε_2, при C_{66} — сдвиг срединной поверхности ω, далее множителем при жесткости D_{11} является параметр, характеризующий изменение кривизны срединной поверхности $\varkappa_1$, и, наконец, при D_{22} — изменение кривизны $\varkappa_2$.

Учитывая это, уравнение (4.25) можно представить в виде

$$\frac{C_{22}}{\Omega}\frac{\partial^2 T_1}{\partial\beta^2} - \frac{C_{12}}{\Omega}\frac{\partial^2 T_1}{\partial\alpha^2} + \frac{C_{11}}{\Omega}\frac{\partial^2 T_2}{\partial\alpha^2} - \frac{C_{12}}{\Omega}\frac{\partial^2 T_2}{\partial\beta^2} - \frac{1}{C_{66}}\frac{\partial^2 S}{\partial\alpha\partial\beta} - k_2\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} -$$
$$- k_1\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + \left(A_2\frac{C_{11}}{\Omega} - A_1\frac{C_{12}}{\Omega}\right)\frac{\partial^2 T^*}{\partial\alpha^2} + \left(A_1\frac{C_{22}}{\Omega} - A_2\frac{C_{12}}{\Omega}\right)\frac{\partial^2 T^*}{\partial\beta^2} = 0 \qquad (4.26)$$
$$(\Omega = C_{11}C_{22} - C_{12}{}^2)$$

Введем функцию напряжений $F = F(\alpha, \beta)$, так что

$$T_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial\beta^2}, \qquad T_2 = \frac{\partial^2 F}{\partial\alpha^2}, \qquad S = -\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\partial\beta} \qquad (4.27)$$

Тогда первые два уравнения равновесия (4.19) тождественно удовлетворятся, а из остальных трех уравнений (4.19) и уравнения неразрывности (4.26) в силу (4.14) — (4.16) и (4.27) получим полную систему дифференциальных уравнений:

$$\nabla_r F - \frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right) = Z \qquad (4.28)$$

$$L_{13}(D_{ik})\,w - \frac{h^2}{10}\left[a_{55}L_{11}(D_{ik})\,\varphi + a_{44}L_{12}(D_{ik})\,\psi\right] + \frac{h^3}{12}\varphi +$$
$$+ A_1\Big[(k_1D_{11} + k_2D_{12})\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} + (k_2D_{22} + k_1D_{12})\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta} +$$
$$+ (k_1{}^2D_{11} + 2k_1k_2D_{12} + k_2{}^2D_{22})\frac{\partial w}{\partial\alpha} - \frac{h^5}{120}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)\Big] = 0 \qquad (4.29)$$

$$L_{23}(D_{ik})\,w - \frac{h^2}{10}\left[a_{44}L_{22}(D_{ik})\,\psi + \alpha_{55}L_{12}(D_{ik})\,\varphi\right] + \frac{h^3}{12}\psi +$$
$$+ A_2\Big[(k_2D_{22} + k_1D_{12})\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2} + (k_1D_{11} + k_2D_{12})\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta} +$$
$$+ (k_1{}^2D_{11} + 2k_1k_2D_{12} + k_2{}^2D_{22})\frac{\partial w}{\partial\beta} - \frac{h^5}{120}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)\Big] = 0 \qquad (4.30)$$

$$L_2(C_{ik})\,F - \nabla_r w + \left(A_2\frac{C_{11}}{\Omega} - A_1\frac{C_{12}}{\Omega}\right)(k_1D_{11} + k_2D_{12})\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4} +$$
$$+ \Big[\left(A_2\frac{C_{11}}{\Omega} - A_1\frac{C_{12}}{\Omega}\right)(k_2D_{22} + k_1D_{12}) + \left(A_1\frac{C_{22}}{\Omega} - A_2\frac{C_{12}}{\Omega}\right)(k_1D_{11} +$$
$$+ k_2D_{12})\Big]\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \left(A_1\frac{C_{22}}{\Omega} - A_2\frac{C_{12}}{\Omega}\right)(k_2D_{22} + k_1D_{12})\frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4} =$$
$$= -\frac{h}{2}\left[\left(A_2\frac{C_{11}}{\Omega} - A_1\frac{C_{12}}{\Omega}\right)\frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha^2} + \left(A_1\frac{C_{22}}{\Omega} - A_2\frac{C_{12}}{\Omega}\right)\frac{\partial^2 Z}{\partial\beta^2}\right] \qquad (4.31)$$

где

$$\nabla_r = k_2 \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + k_1 \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}$$

$$L_2(C_{ik}) = \frac{C_{11}}{\Omega} \frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + \frac{C_{22}}{\Omega} \frac{\partial^4}{\partial\beta^4} + \left(\frac{1}{C_{66}} - 2\frac{C_{12}}{\Omega}\right) \frac{\partial^4}{\partial\alpha^2 \partial\beta^2} \tag{4.32}$$

Таким образом, задача весьма пологой оболочки в форме смешанного метода свелась к системе четырех дифференциальных уравнений относительно четырех искомых функций F, w, φ, ψ.

Расчетные величины задачи могут быть определены при помощи формул (4.6) — (4.16). Тангенциальные же перемещения (u, v), которые входят в указанные формулы, могут быть определены из уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha} = \frac{C_{22}}{\Omega} \frac{\partial^2 F}{\partial\beta^2} - \frac{C_{12}}{\Omega} \frac{\partial^2 F}{\partial\alpha^2} - k_1 w + \left(A_1 \frac{C_{22}}{\Omega} - A_2 \frac{C_{12}}{\Omega}\right) \times \left[\frac{h}{2} Z + (k_1 D_{11} + k_2 D_{12}) \frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} + (k_2 D_{22} + k_1 D_{12}) \frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\right] \tag{4.33}$$

$$\frac{\partial v}{\partial\beta} = \frac{C_{11}}{\Omega} \frac{\partial^2 F}{\partial\alpha^2} - \frac{C_{12}}{\Omega} \frac{\partial^2 F}{\partial\beta^2} - k_2 w + \left(A_2 \frac{C_{11}}{\Omega} - A_1 \frac{C_{12}}{\Omega}\right) \times \left[\frac{h}{2} Z + (k_2 D_{22} + k_1 D_{12}) \frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + (k_1 D_{11} + k_2 D_{12}) \frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\right] \tag{4.34}$$

5. Для иллюстрации рассмотрим два примера. Не нарушая общности рассуждений и хода расчета, рассматриваем примеры трансверсально-изотропной пластинки и оболочки, при этом полагаем, что в каждой точке пластинки (или оболочки) плоскость изотропии параллельна срединной плоскости (или поверхности) пластинки (или оболочки). В связи с этим для упругих постоянных материала пластинки (или оболочки) имеем [1]

$$\begin{gathered} B_{11} = B_{22} = B_{12} + 2B_{66} = \frac{E}{1-\nu^2} = E^\circ, \qquad B_{12} = \nu E^\circ \\ B_{66} = \frac{1-\nu}{2} E^\circ, \qquad B_{12} + B_{66} = \frac{1+\nu}{2} E^\circ \\ B_{55} = B_{44} = G', \qquad A_1 = A_2 = -\frac{E^\circ}{E'} \nu' (1+\nu) \end{gathered} \tag{5.1}$$

где E — модуль упругости для направлений в плоскости изотропии, E' — модуль упругости для направлений, перпендикулярных к срединной поверхности, ν — коэффициент Пуассона в плоскости изотропии, ν' — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в плоскости изотропии при растяжении в направлении γ, G' — модуль сдвига, характеризующий искажение углов между направлениями в плоскости изотропии и направлением γ.

а. Пусть прямоугольная пластинка $(a \times b)$ свободно оперта по всему контуру и несет нагрузку, которая по поверхности пластинки распределена согласно закону

$$Z^+ = Z = q \sin\frac{\pi\alpha}{a} \sin\frac{\pi\beta}{b}, \qquad Z^- = 0 \tag{5.2}$$

где q — интенсивность нагрузки в центре $(\alpha = {}^1/_2\, a,\ \beta = {}^1/_2\, b)$ пластинки.

Полагая [3]

$$\varphi = B \cos\frac{\pi\alpha}{a} \sin\frac{\pi\beta}{b}, \qquad \psi = C \sin\frac{\pi\alpha}{a} \cos\frac{\pi\beta}{b}, \qquad w = A \sin\frac{\pi\alpha}{a} \sin\frac{\pi\beta}{b} \tag{5.3}$$

удовлетворим условиям свободного опирания, а из системы уравнений (3.3) — (3.5) в силу (5.2), (5.3) для прогиба центра пластинки получим

$$w = w_0 \left\{1 + \frac{\pi^2}{10} h^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \left[\frac{E^\circ}{G'} - \nu'(1+\nu) \frac{E^\circ}{E'}\right]\right\} \tag{5.4}$$

где

$$w_0 = \frac{12a^4b^4q}{\pi^4h^3E^\circ(a^2+b^2)^2}$$

прогиб центра пластинки, найденный при помощи классической теории пластинки т. е. при помощи теории, которая базируется на гипотезе недеформируемых нормалей

Рассматривая формулу (5.4), легко заметить, что при некоторых значениях отношений E° / G', E° / E', h / a нормальные перемещения, подсчитанные по классической теории пластинок, могут существенно отличаться от соответствующих перемещений, подсчитанных по предлагаемой здесь теории.

Дело в том, что классическая теория анизотропных пластинок, имея погрешность порядка h^2 / a^2 по сравнению с единицей, как и следовало ожидать, совершенно безразлична к отношениям типа B_{ik} / B_{55}, B_{ik} / B_{44}, B_{ik} / B_{33}, которые в более точных теориях анизотропных пластинок появляются с каким-либо числовым коэффициентом и множителем h^2 / a^2 и могут иметь существенно большие численные значения.

Предложенная здесь теория при некоторых случаях граничных условий и нагрузки может быть использована и для расчета толстых плит. Например, в случае толстой изотропной квадратной плиты ($h / a = 1/3$, $\nu = 0.3$, $a = b$), когда плита несет нагрузку, которая по поверхности плиты ($\gamma = 1/2\, h$) распределена согласно закону (5.2), для прогиба центра плиты имеем значения:

	По точной теории [7]	По данной теории	По теории [8]	По теории [3]	По классической теории
$W\frac{E}{qh}=$	3.49	3.50	3.56	3.69	2.27

Видно, что даже для такой толстой плиты ($h / a = 1/3$) предлагаемая здесь теория дает незначительную погрешность (порядка 0.3%). Погрешность теории изотропных пластин средней толщины [8] доходит до 2%, а приближенной теории [3], которая не учитывает влияния нормального напряжения σ_γ, до 6%. Погрешность же классической теории равна 35%.

Подсчеты показывают, что изложенная теория дает хорошие результаты и при расчете толстых плит. Однако она не может считаться безоговорочно теорией толстых плит или плит средней толщины; для указанных плит возникают трудности в связи с граничными условиями [3,9].

Наконец, укажем, что вносимая в классическую теорию поправка, обусловленная учетом явлений поперечного сдвига, значительнее поправки, обусловленной учетом нормального напряжения σ_γ. Например, в рассмотренной выше задаче толстой плиты поправка от учета σ_γ порядка 5%, а поправка от учета явлений поперечного сдвига доходит до 30%. Многочисленные подсчеты, выполненные для реально существующих анизотропных пластинок, подтверждают высказанные выше соображения. В связи с этим считаем, что для расчета тонких анизотропных пластинок (и оболочек) вполне приемлемы те несколько непоследовательные теории, в которых сознательно не учитываются явления, связанные с напряжением σ_γ.

6. Пусть весьма пологая, трансверсально-изотропная, прямоугольная в плане оболочка свободно оперта по всему контуру и несет нормально приложенную нагрузку, которая по поверхности оболочки ($\gamma = 1/2\, h$) распределена согласно закону (5.2). Для рассматриваемого примера будем пренебрегать влиянием напряжения σ_γ. Для этого во всех уравнениях и формулах достаточно принимать $A_1 = A_2 = 0$.

Полагая [4]

$$\begin{gathered}
\varphi = B\cos\frac{\pi\alpha}{a}\sin\frac{\pi\beta}{b}, \qquad \psi = C\sin\frac{\pi\alpha}{a}\cos\frac{\pi\beta}{b} \\
u = M\cos\frac{\pi\alpha}{a}\sin\frac{\pi\beta}{b}, \qquad v = N\sin\frac{\pi\alpha}{a}\cos\frac{\pi\beta}{b} \\
w = A\sin\frac{\pi\alpha}{a}\sin\frac{\pi\beta}{b}
\end{gathered} \tag{5.5}$$

удовлетворим условиям свободного опирания, а из системы уравнений (4.20) — (4.24) в силу (5.2), (5.5) для нормального перемещения центра оболочки ($\alpha = a/2$, $\beta = b/2$) получим

$$w = w_0 [1 + h^*] \tag{5.6}$$

где

$$h^* = \frac{\frac{h^4}{120}\frac{E^\circ}{G'}\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)^5}{\frac{h^2}{12}\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)^4 + (1-\nu^2)\left(k_2\frac{\pi^2}{a^2}+k_1\frac{\pi^2}{b^2}\right)^2\left[1+\frac{h^2}{10}\frac{E^\circ}{G'}\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)\right]} \tag{5.7}$$

w_0 — нормальное перемещение центра оболочки, найденное при помощи теории, которая базируется на гипотезе недеформируемых нормалей.

Рассматривая формулы (5.6) и (5.7), замечаем, что с увеличением подъемистости оболочки (т. е. с увеличением отношений a/R_1, a/R_2) ошибка, допускаемая при принятии гипотезы недеформируемых нормалей, уменьшается. Эта ошибка принимает свое максимальное значение в случае пластинки ($k_1 = 1/R_1 = 0$, $k_2 = 1/R_2 = 0$). Здесь дело в том, что при увеличении подъемистости оболочки влияние изгибающих параметров на напряженное состояние оболочки уменьшается, что означает и уменьшение влияния перерезывающих сил N_1 и N_2, т. е. касательных напряжений $\tau_{\alpha\gamma}$, и $\tau_{\beta\gamma}$, которыми и обуславливается явление поперечного сдвига. Вообще говоря, чем меньше влияние изгибающих явлений на напряженное состояние оболочки, тем меньше «поправка» к классической теории оболочек, обусловленная явлениями поперечного сдвига.

Поступила 3 VII 1959

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат, М., 1957.
2. Власов В. З. Общая теория оболочек. Гостехиздат, М.— Л., 1949.
3. Амбарцумян С. А. К теории изгиба анизотропных пластинок. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, вып. 5.
4. Амбарцумян С. А. К общей теории анизотропных оболочек. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 2.
5. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, М., 1953.
6. Амбарцумян С. А., Пештмалджян Д. В. К теории ортотропных оболочек и пластинок. Изв. АН Арм. ССР (сер. физ.-мат. наук), 1959, т. XII, вып. 1.
7. Власов Б. Ф. Об одном случае изгиба прямоугольной толстой плиты. Вестник МГУ, № 2, 1957.
8. Муштари Х. М. Теория изгиба плит средней толщины. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 2.
9. Гольденвейзер А. Л. К теории изгиба пластин Райснера. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 4.