

КРУЧЕНИЕ КРУГЛЫХ СТЕРЖНЕЙ, ИМЕЮЩИХ ПРОДОЛЬНЫЕ ВЫТОЧКИ ИЛИ ЗУБЦЫ И ЦЕНТРАЛЬНО РАСПОЛОЖЕННУЮ ПОЛОСТЬ

Б. Л. Абрамян, А. А. Баблюк
 (Ереван)

Рассматривается задача о кручении круглого призматического стержня с симметрично расположенными продольными пазами или зубцами в форме кольцевого сектора и с центрально расположенной круглой полостью (фиг. 1).

Точное решение этой задачи получено методом, изложенным в работах [1, 2].

Определение постоянных интегрирования сведено к решению бесконечных систем линейных уравнений.

Доказано, что полученные системы вполне регулярны и имеют ограниченные сверху и стремящиеся к нулю (при $k \rightarrow \infty$) свободные члены.

Для двух частных случаев — при шести зубцах и при одной выточке — вычислены жесткости и напряжения.

Для задачи о кручении подобных, но сплошных стержней приближенные решения получены в работах Степенску и Думитреску [3] и Маня [4].

1. Для решения рассматриваемой задачи отыскивается функция напряжения $U(r, \varphi)$, которая в области сечения стержня удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = -2 \quad (1.1)$$

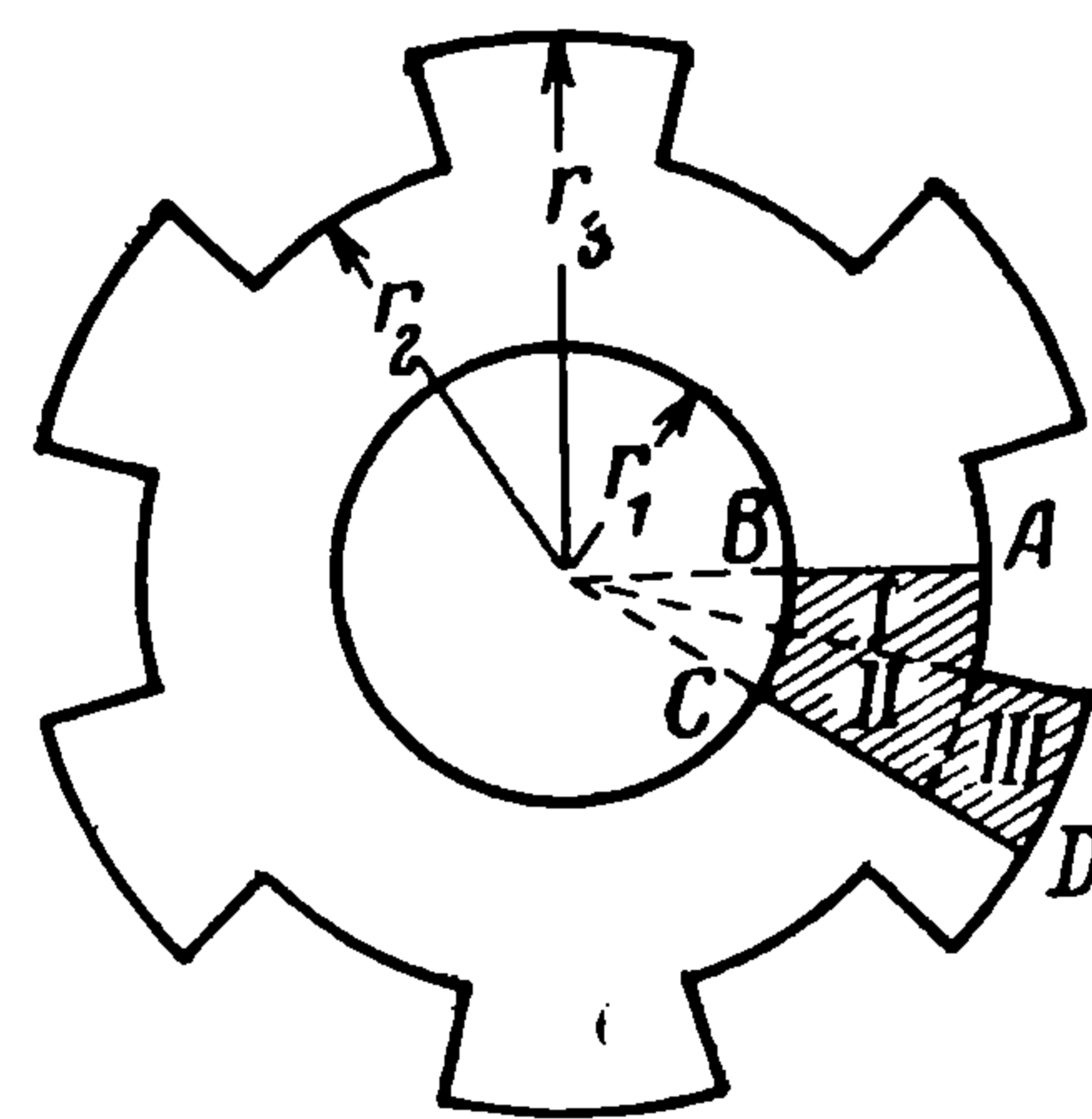
на внешнем контуре сечения обращается в нуль, а на внутреннем контуре сечения принимает постоянное значение U_0 .

В силу симметрии области сечения достаточно рассматривать только ту часть, которая выделяется углом π/n , где n — число выточек или зубцов (фиг. 2). Чтобы решение, определенное в указанной $2n$ -й части области, распространилось на всю область сечения, требуется, чтобы на линиях AB и CD нормальная производная функция $U(r, \varphi)$ равнялась нулю. Функцию $U(r, \varphi)$ удобно определить, переходя к переменной

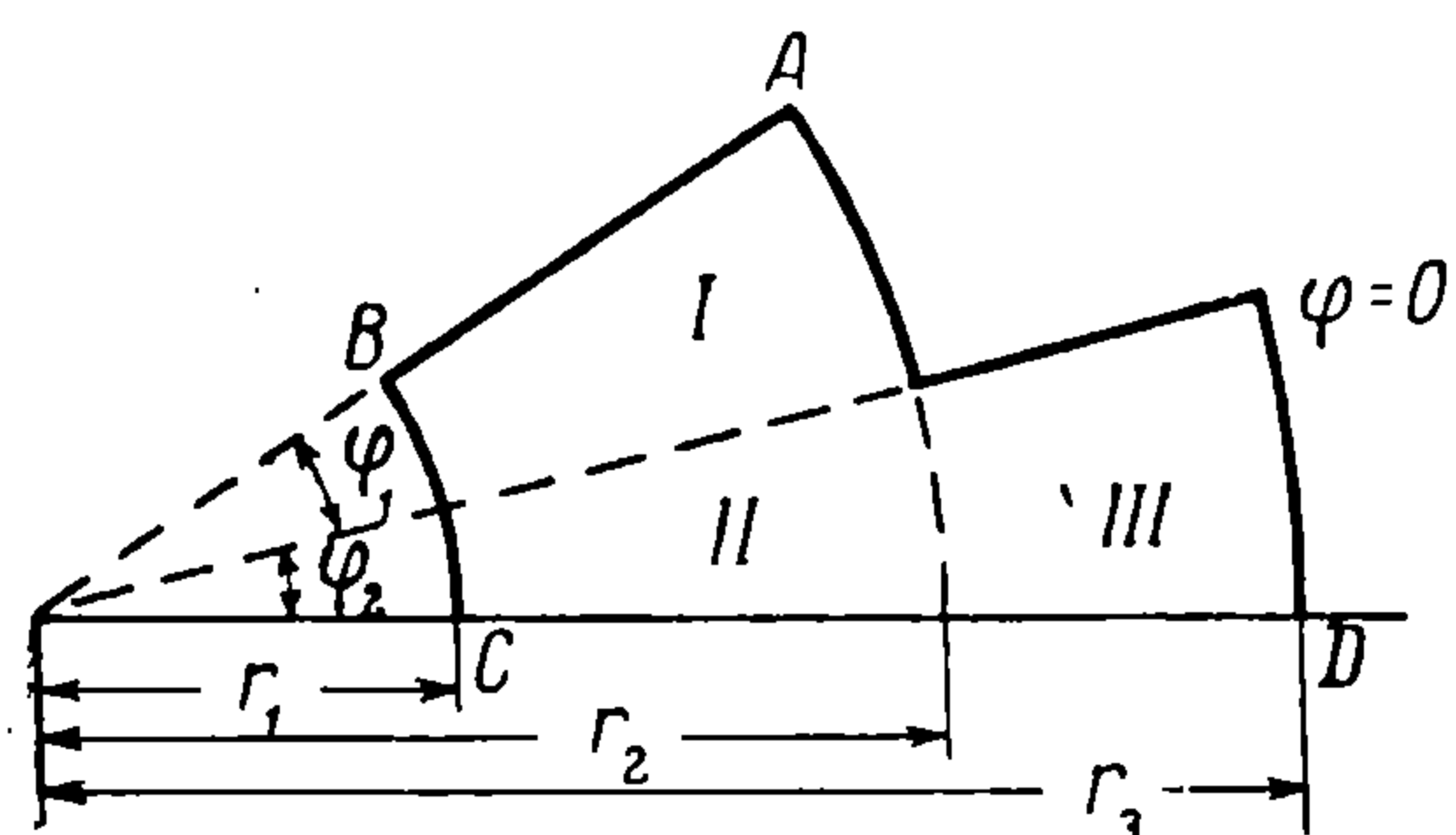
$$t = \ln \frac{r}{r_2} \quad (1.2)$$

Ищем функцию $U(r, \varphi)$ в виде

$$U[r(t), \varphi] = \Phi(t, \varphi) - \frac{1}{2} r_2^2 e^{2t} \quad (1.3)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где функция $\Phi(t, \varphi)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (1.4)$$

Полагаем, что в рассматриваемой части области сечения функция $\Phi(t, \varphi)$ принимает значения (фиг. 2)

$$\Phi(t, \varphi) = \begin{cases} \Phi_1(t, \varphi) & \text{в области I} \\ \Phi_2(t, \varphi) & \text{в области II} \\ \Phi_3(t, \varphi) & \text{в области III} \end{cases} \quad (1.5)$$

Пользуясь выражениями (1.3), (1.5) и граничными условиями U , для $\Phi_i(t, \varphi)$ ($i = 1, 2, 3$) получим следующие условия:

$$\begin{aligned} \Phi_1(0, \varphi) - \frac{r_2^2}{2} &= \Phi_1(-t_1, \varphi) - \Phi_0 = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=\varphi_1} = 0 \\ \Phi_2(-t_1, \varphi) - \Phi_0 &= \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=-\varphi_2} = 0 \\ \Phi_3(t_2, \varphi) - \frac{r_3^2}{2} &= \Phi_3(t, 0) - \frac{r_2^2 e^{2t}}{2} = \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=-\varphi_2} = 0 \\ \Phi_1(t, 0) &= \Phi_2(t, 0), \quad \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=0} = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=0} \\ \Phi_2(0, \varphi) &= \Phi_3(0, \varphi), \quad \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \right)_{t=0} = \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial t} \right)_{t=0} \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$t_1 = \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad t_2 = \ln \frac{r_3}{r_2}, \quad \Phi_0 = U_0 + \frac{r_1^2}{2}, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{\alpha n}, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n\alpha} \quad (1.8)$$

α — постоянное число, характеризующее ширину выемки или зубца.

2. Решая уравнение (1.4) методом разделения переменных, для функций $\Phi_i(t, \varphi)$ получим выражения

$$\Phi_1(t, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^{(1)} \operatorname{sh} \alpha_k t + B_k^{(1)} \operatorname{ch} \alpha_k t) \sin \alpha_k \varphi + \quad (2.1)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (C_k^{(1)} \operatorname{sh} \beta_k \varphi + D_k^{(1)} \operatorname{ch} \beta_k \varphi) \sin \beta_k t \quad (0 < \varphi < \varphi_1, -t_1 < t < 0)$$

$$\Phi_2(t, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^{(2)} \operatorname{sh} \lambda_k t + B_k^{(2)} \operatorname{ch} \lambda_k t) \sin \lambda_k \varphi + \quad (2.2)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (C_k^{(2)} \operatorname{sh} \beta_k \varphi + D_k^{(2)} \operatorname{ch} \beta_k \varphi) \sin \beta_k t \quad (-\varphi_2 < \varphi < 0, -t_1 < t < 0)$$

$$\Phi_3(t, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^{(3)} \operatorname{sh} \lambda_k t + B_k^{(3)} \operatorname{ch} \lambda_k t) \sin \lambda_k \varphi + \quad (2.3)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (C_k^{(3)} \operatorname{sh} \gamma_k \varphi + D_k^{(3)} \operatorname{ch} \gamma_k \varphi) \sin \gamma_k t \quad (-\varphi_2 < \varphi < 0, 0 < t < t_2)$$

Здесь

$$\alpha_k = \frac{(2k-1)\pi}{2\varphi_1}, \quad \beta_k = \frac{k\pi}{t_1}, \quad \lambda_k = \frac{(2k-1)\pi}{2\varphi_2}, \quad \gamma_k = \frac{k\pi}{t_2} \quad (2.4)$$

Удовлетворив условиям (1.6) и (1.7), для постоянных интегрирования получим

$$\begin{aligned} A_k^{(1)} &= \frac{r_2^2}{\alpha_k \varphi_1} \operatorname{cth} \alpha_k t_1 - \frac{2\Phi_0}{\alpha_k \varphi_1} \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha_k t_1}, & D_k^{(1)} &= D_k^{(2)} \\ A_k^{(2)} &= B_k^{(2)} \operatorname{cth} \lambda_k t_1 - \frac{2\Phi_0}{\lambda_k \varphi_2} \frac{1}{\operatorname{sh} \lambda_k t_1}, & C_k^{(2)} &= D_k^{(2)} \operatorname{th} \beta_k \varphi_2 \\ A_k^{(3)} &= -B_k^{(2)} \operatorname{cth} \lambda_k t_2 - \frac{r_2^2}{\lambda_k \varphi_2} \frac{1}{\operatorname{sh} \lambda_k t_2}, & B_k^{(3)} &= B_k^{(2)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} B_k^{(1)} &= \frac{r_2^2}{\alpha_k \varphi_1}, & D_k^{(3)} &= \frac{r_2^2 \gamma_k}{t_2 (4 + \gamma_k^2)} [1 + (-1)^{k+1} e^{2t_2}] \\ C_k^{(1)} &= -D_k^{(2)} \operatorname{th} \beta_k \varphi_1, & C_k^{(3)} &= \frac{r_2^2 \gamma_k}{t_2 (4 + \gamma_k^2)} [1 + (-1)^{k+1} e^{2t_2}] \operatorname{th} \gamma_k \varphi_2 \end{aligned}$$

а для определения постоянных $B_k^{(2)}$ и $D_k^{(2)}$ получаем совокупность из двух бесконечных систем линейных уравнений.

Произведя замену неизвестных

$$\lambda_k \varphi_2 B_k^{(2)} = Y_k m - r_2^2, \quad \beta_k t_1 D_k^{(2)} = X_k - r_2^2 - 2\Phi_0 (-1)^{k+1} \quad (2.6)$$

где m — постоянное число, подлежащее определению в дальнейшем, эту совокупность приведем к виду

$$X_k = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} Y_p, \quad Y_k = \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} X_p + Q_k \quad (k = 1, 2, \dots, \infty) \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} a_{kp} &= \frac{2m\beta_k}{\varphi_2 (\operatorname{th} \beta_k \varphi_1 + \operatorname{th} \beta_k \varphi_2) (\lambda_p^2 + \beta_k^2)} \\ b_{kp} &= \frac{2\lambda_k}{m t_1 (\operatorname{cth} \lambda_k t_1 + \operatorname{cth} \lambda_k t_2) (\beta_p^2 + \lambda_k^2)} \\ Q_k &= -\frac{2\lambda_k r_2^2}{m (\lambda_k^2 - 4) (\operatorname{cth} \lambda_k t_1 + \operatorname{cth} \lambda_k t_2)} \left[1 + \frac{\lambda_k^2 - 4}{2\lambda_k^2 t_1} \left(\frac{2\Phi_0}{r_2^2} - 1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\lambda_k} \left(\operatorname{cth} \lambda_k t_2 - \frac{e^{2t_2}}{\operatorname{sh} \lambda_k t_2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$(2.9)$$

3. Покажем, что системы (2.7) вполне регулярны [5]. Действительно для суммы модулей коэффициентов систем (2.7) имеют место следующие неравенства:

$$\sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}| = \frac{2m\beta_k}{\varphi_2 (\operatorname{th} \beta_k \varphi_1 + \operatorname{th} \beta_k \varphi_2)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_p^2 + \beta_k^2} \leq m \quad (3.1)$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} |b_{kp}| = \frac{2\lambda_k}{m t_1 (\operatorname{cth} \lambda_k t_1 + \operatorname{cth} \lambda_k t_2)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_p^2 + \lambda_k^2} \leq \frac{1}{2m}$$

При этом использованы значения (3.2)

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_p^2 + \lambda_k^2} = \frac{t_1}{2\lambda_k} \left(\operatorname{cth} \lambda_k t_1 - \frac{1}{\lambda_k t_1} \right) \leq \frac{t_1}{2\lambda_k}, \quad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_p^2 + \beta_k^2} = \frac{\varphi_2}{2\beta_k} \operatorname{th} \beta_k \varphi_2$$

Постоянное число m выбираем из равенства

$$m = \frac{1}{2m}, \quad \text{или} \quad m = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3.3)$$

Тогда согласно (3.1) будем иметь

$$\sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sum_{p=1}^{\infty} |b_{kp}| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Таким образом, системы (2.7) оказались вполне регулярными.

Легко видеть из (2.9), что свободные члены систем (2.7) ограничены сверху и при $k \rightarrow \infty$ стремятся к нулю.

4. Подставляя значения определенных коэффициентов из (2.5) в (2.1) — (2.3) и заменяя коэффициенты $B_k^{(2)}$ и $D_k^{(2)}$ согласно (2.6) через X_k и Y_k , после некоторых преобразований для функций $\Phi_i(t, \varphi)$ ($i = 1, 2, 3$) получим следующие выражения

$$\Phi_1(t, \varphi) = \frac{r_2^2}{2} + \frac{r_2^2 - 2\Phi_0}{2t_1} t + \frac{1}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k \operatorname{ch} \beta_k (\varphi_1 - \varphi)}{\beta_k \operatorname{ch} \beta_k \varphi_1} \sin \beta_k t \quad (4.1)$$

$(0 \leq \varphi \leq \varphi_1, -t_1 \leq t \leq 0)$

$$\Phi_2(t, \varphi) = \frac{r_2^2}{2} + \frac{r_2^2 - 2\Phi_0}{2t_1} t + \frac{1}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k \operatorname{ch} \beta_k (\varphi_2 + \varphi)}{\beta_k \operatorname{ch} \beta_k \varphi_2} \sin \beta_k t +$$

$$+ \frac{m}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k \operatorname{sh} \lambda_k (t_1 + t)}{\lambda_k \operatorname{sh} \lambda_k t_1} \sin \lambda_k \varphi \quad \left(\begin{array}{l} -\varphi_2 \leq \varphi \leq 0 \\ -t_1 \leq t \leq 0 \end{array} \right) \quad (4.2)$$

$$\Phi_3(t, \varphi) = \frac{r_2^2}{2} + \frac{r_3^2 - r_2^2}{2t_2} t + \frac{m}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k \operatorname{sh} \lambda_k (t_2 - t)}{\lambda_k \operatorname{sh} \lambda_k t_2} \sin \lambda_k \varphi -$$

$$- \frac{4r_2^2}{t_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{k+1} e^{2t_2}}{\gamma_k (\gamma_k^2 + 4)} \frac{\operatorname{ch} \gamma_k (\varphi_2 + \varphi)}{\operatorname{ch} \gamma_k \varphi_2} \sin \gamma_k t \quad \left(\begin{array}{l} -\varphi_2 \leq \varphi \leq 0 \\ 0 \leq t \leq t_2 \end{array} \right) \quad (4.3)$$

5. Для определения постоянной Φ_0 пользуемся теоремой Бредта о циркуляции касательного напряжения при кручении

$$\int_{\Gamma_0} T_s ds = 2G\tau\Omega_0 \quad (5.1)$$

где Γ_0 — внутренний контур сечения, $\Omega_0 = \pi r_1^2$ — площадь, ограниченная контуром Γ_0 , G — модуль сдвига, τ — угол закручивания на единицу длины, T_s — проекция касательного напряжения в какой-либо точке контура Γ_0 на направление касательной к этому контуру:

$$T_s = \tau_{z\varphi} = -\frac{G\tau e^{-t}}{r_2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - r_2^2 e^{2t} \right) \quad \text{при } t = -t_1 \quad (5.2)$$

Подставляя (5.2) в (5.1), это соотношение приведем к виду

$$\int_{-\varphi_2}^{\varphi_1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{t=-t_1} d\varphi = \int_{-\varphi_2}^0 \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \right)_{t=-t_1} d\varphi + \int_0^{\varphi_1} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right)_{t=-t_1} d\varphi = 0 \quad (5.3)$$

Подставляя значения функций Φ_1 и Φ_2 из (4.1) и (4.2) в это соотношение и произведя интегрирование, после некоторого преобразования для определения постоянной Φ_0 получим следующую формулу:

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(r_2^2 - 2\Phi_0) - \frac{2m}{\varphi_2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Y_p}{\lambda_p^2} = 0 \quad (5.4)$$

Неизвестные коэффициенты Y_p , входящие в соотношение (5.4), определяются из вполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений (2.7) и выражаются через постоянную Φ_0 .

Подставляя определенные из (2.7) значения неизвестных Y_p в (5.4) и разрешая полученное соотношение относительно Φ_0 , получим ее значение.

6. Жесткость при кручении двухсвязного профиля определяется формулой

$$C = 2G \left[-U_0^* \Omega_0^* + U_0 \Omega_0 + \iint_{\Omega} U d\Omega \right] = 2G \left[-U_0^* \Omega_0^* + U_0 \Omega_0 + 2n \iint_{\Omega^*} U d\Omega \right] \quad (6.1)$$

где U_0^* — значение функции напряжения на внешнем контуре, U_0 — значение функции напряжения на внутреннем контуре сечения, Ω_0^* и Ω_0 — площади, ограниченные соответственно внешним и внутренним контурами Γ_0^* и Γ_0 , Ω — область сечения стержня, а Ω^* — часть области сечения, выделенная углом π/n .

Подставляя (1.3) в (6.1) и пользуясь выражениями (1.5), (4.1)—(4.3), после интегрирования получим следующую формулу:

$$\begin{aligned} C = 2G \left\{ \frac{\pi}{4} (r_2^4 - r_1^4) + \frac{\pi}{4t_1} (2\Phi_0 - r_2^2) (r_2^2 - r_1^2) + \right. \\ \left. + \frac{n\varphi_2}{4} (r_3^4 - r_2^4) - \frac{n\varphi_2}{4t_2} (r_3^2 - r_2^2)^2 + \right. \\ \left. + 2nr_2^2 \left[\frac{m}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k}{\lambda_k (4 - \lambda_k^2)} \left(\operatorname{cth} \lambda_k t_1 + \operatorname{cth} \lambda_k t_2 - \frac{e^{-2t_1}}{\operatorname{sh} \lambda_k t_1} - \frac{e^{2t_2}}{\operatorname{sh} \lambda_k t_2} \right) - \right. \right. \\ \left. - \frac{4r_2^2}{t_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \gamma_k \varphi_2}{\gamma_k (4 + \gamma_k^2)^2} [1 + (-1)^{k+1} e^{2t_2}]^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k [1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_1}]}{\beta_k (4 + \beta_k^2)} (\operatorname{th} \beta_k \varphi_1 + \operatorname{th} \beta_k \varphi_2) \right] \left. \right\} \quad (6.2) \end{aligned}$$

Из (6.2), переходя к пределу при $t_1 \rightarrow \infty$ ($r_1 = 0$), получим формулу для жесткости сплошного круглого стержня с зубцами:

$$\begin{aligned} C = 2G \left\{ \frac{\pi r_2^4}{4} + \frac{n\varphi_2}{4} (r_3^4 - r_2^4) - \frac{n\varphi_2}{4t_2} (r_3^2 - r_2^2)^2 + \right. \\ \left. + 2nr_2^2 \left[\frac{m}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k}{\lambda_k (4 - \lambda_k^2)} \left(1 + \operatorname{cth} \lambda_k t_2 - \frac{e^{2t_2}}{\operatorname{sh} \lambda_k t_2} \right) - \right. \right. \\ \left. - \frac{4r_2^2}{t_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \gamma_k \varphi_2}{\gamma_k (4 + \gamma_k^2)^2} [1 + (-1)^{k+1} e^{2t_2}]^2 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{X(z) (\operatorname{th} z \varphi_1 + \operatorname{th} z \varphi_2)}{z (4 + z^2)} dz \right] \left. \right\} \quad (6.3) \end{aligned}$$

Здесь неизвестные коэффициенты $X(z)$ и Y_k должны быть определены из систем, получаемых из (2.7) при $t_1 \rightarrow \infty$ соответствующим предельным переходом. Из (6.2), переходя к пределу при $t_2 \rightarrow 0$ ($r_3 = r_2$), получим формулу для жесткости круглого стержня с центральной круглой полостью:

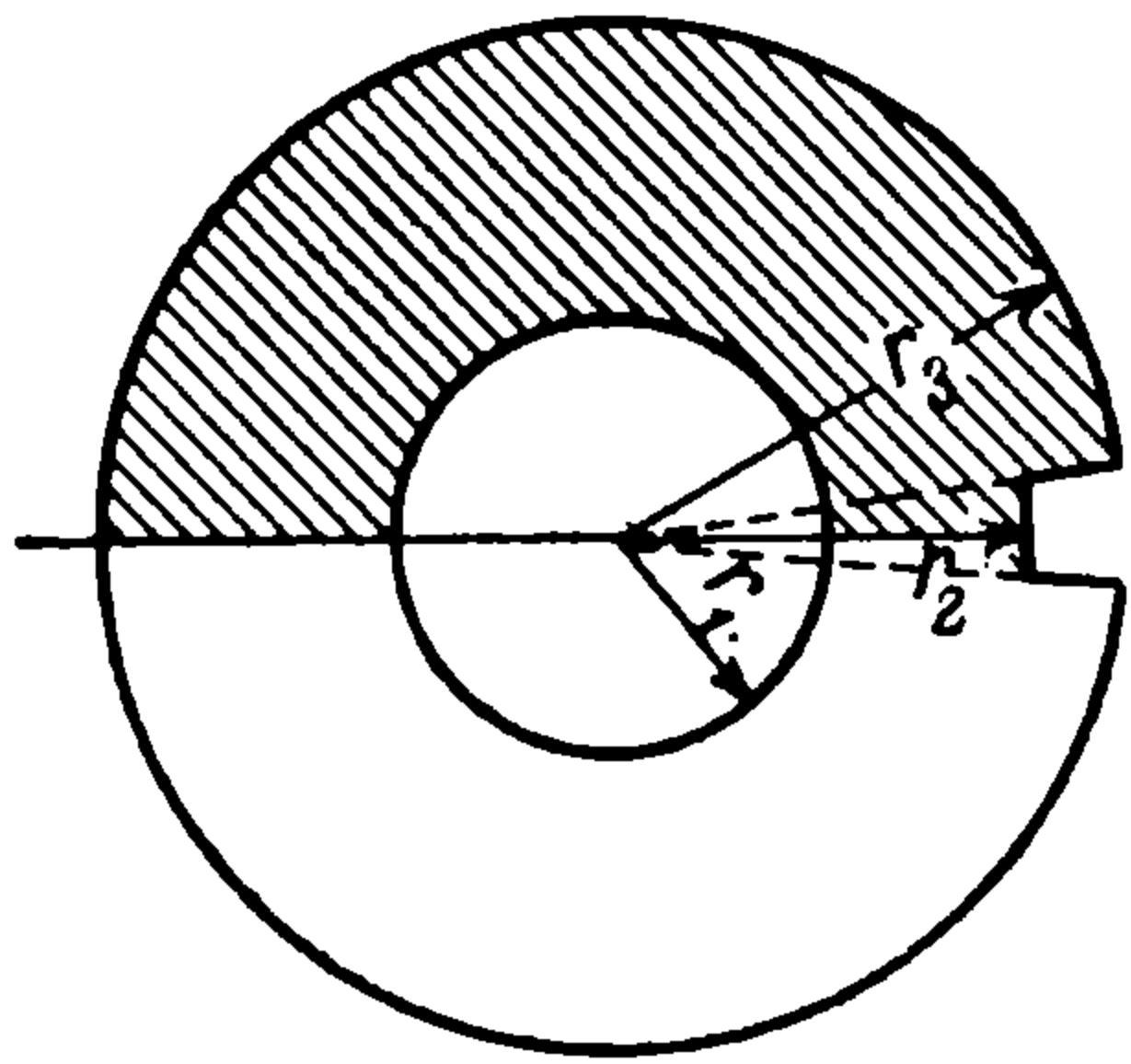
$$C = \frac{G\pi}{2} (r_2^4 - r_1^4) \quad (6.4)$$

Здесь использованы для этого случая значения

$$X_k = Y_k = 0, \quad \Phi_0 = \frac{r_2^2}{2} \quad (6.5)$$

которые получаются при $t_2 = 0$ из (2.7) и (5.4) соответствующим предельным переходом.

7. В качестве численного примера рассмотрены случаи, когда стержень имеет шесть наружных зубцов и центральную круглую полость (фиг. 1) с размерами



Фиг. 3

$$\frac{r_2}{r_1} = 1.964, \quad \frac{r_3}{r_2} = 1.2523, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{1}{12} \pi \quad (7.1)$$

и когда стержень имеет одну наружную выточку и центральную круглую полость (фиг. 3) с размерами

$$\frac{r_2}{r_1} = 1.964, \quad \frac{r_3}{r_2} = 1.2523, \quad \varphi_1 = 0.125 = 7^\circ 09' 43''$$

$$\varphi_2 = 3.0166 = 172^\circ 50' 17'' \quad (7.2)$$

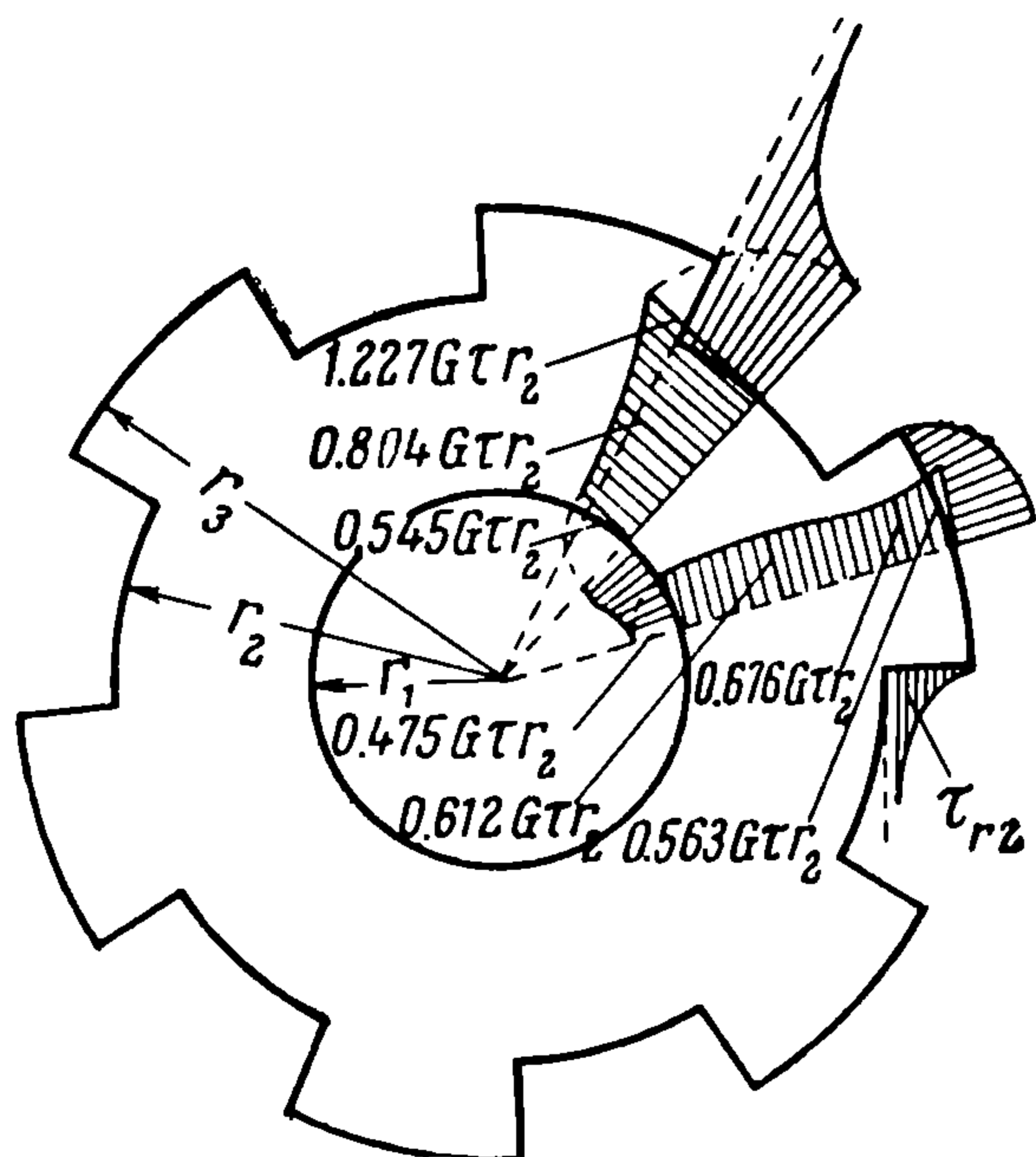
Решая для этих случаев бесконечные системы (2.7), для неизвестных коэффициентов X_k и Y_k получаем значения с избытком и недостатком.

Такие же значения по формулам (5.4) и (6.2) получаем также для постоянной Φ_0 и жесткости C . Эти значения приводятся в табл. 1.

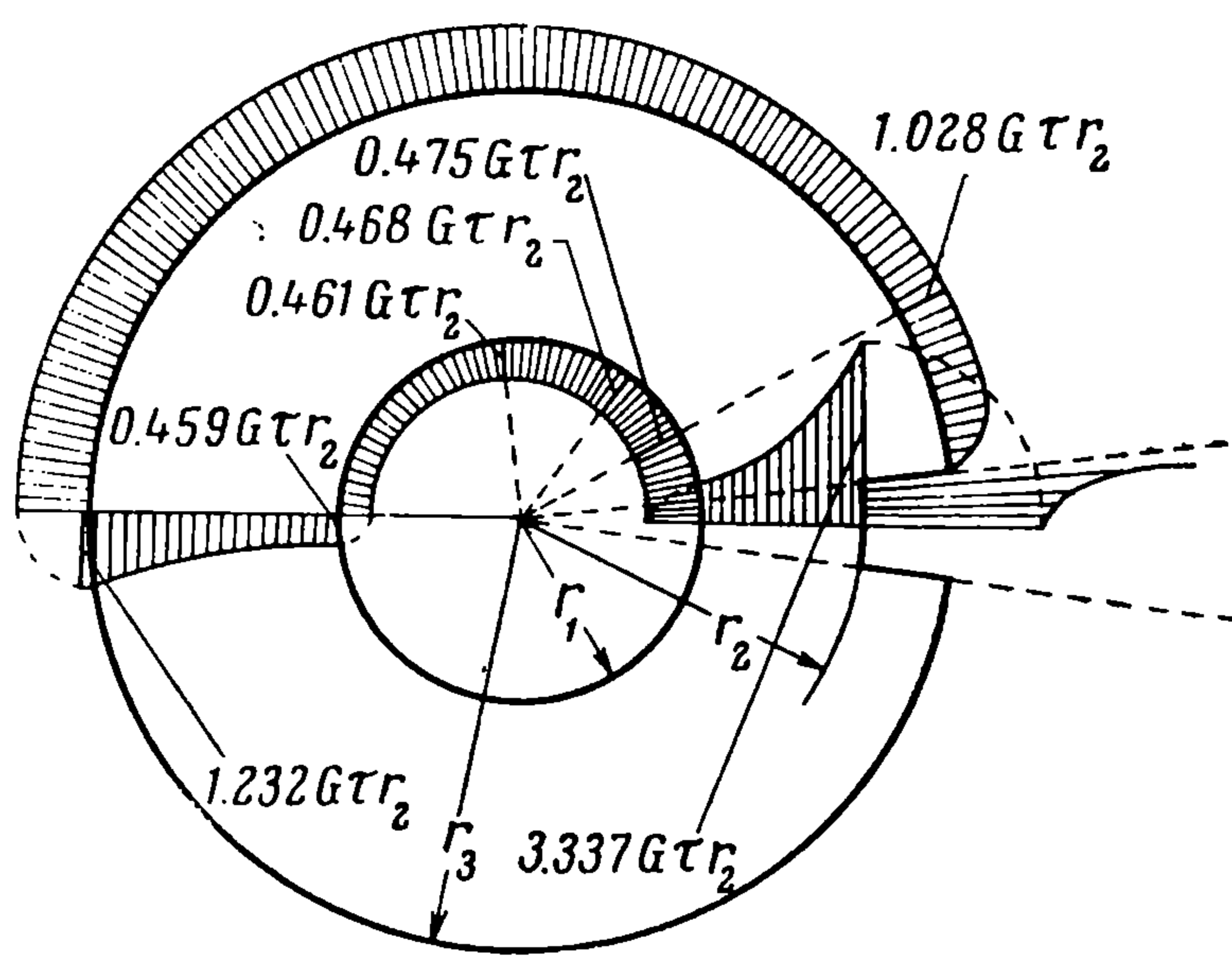
Таблица 1

	$\frac{r_2}{r_1} = 1.964$	6 зубцов (фиг. 1)			Одна выточка (фиг. 3)			$\frac{r_3}{r_1} = 2.4595$
		недостатки	избытки	среднее	недостатки	избытки	среднее	
$2\Phi_0/r_2^2$	1.0	1.237	1.238	1.2375	1.5232	1.5252	1.5242	1.5683
C/Gr_2^4	1.4652	2.929	2.941	2.935	3.6208	3.6281	3.6245	3.7579

В этой же таблице для сравнения приводятся также жесткости стержней с сечениями в виде круговых колец с размерами $b/a = r_2/r_1 = 1.964$ и $b/a = r_3/r_1 = 2.4595$, из которых первое кольцо получается из профиля с зубцами (фиг. 1), если зубцы снять ($r_3 = r_2$), а второе кольцо получается из профиля с выточкой (фиг. 3), если выточку заполнить ($r_2 = r_3$).



Фиг. 4



Фиг. 5

Напряжения для этих случаев вычисляем при помощи выражений (4.1) — (4.3) по формулам

$$\tau_{zr}(t, \varphi) = \frac{e^{-t}}{r_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} G\tau, \quad \tau_{z\varphi}(t, \varphi) = -\frac{e^{-t}}{r_2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - r_2^2 e^{2t} \right) G\tau. \quad (7.3)$$

Таблица 2

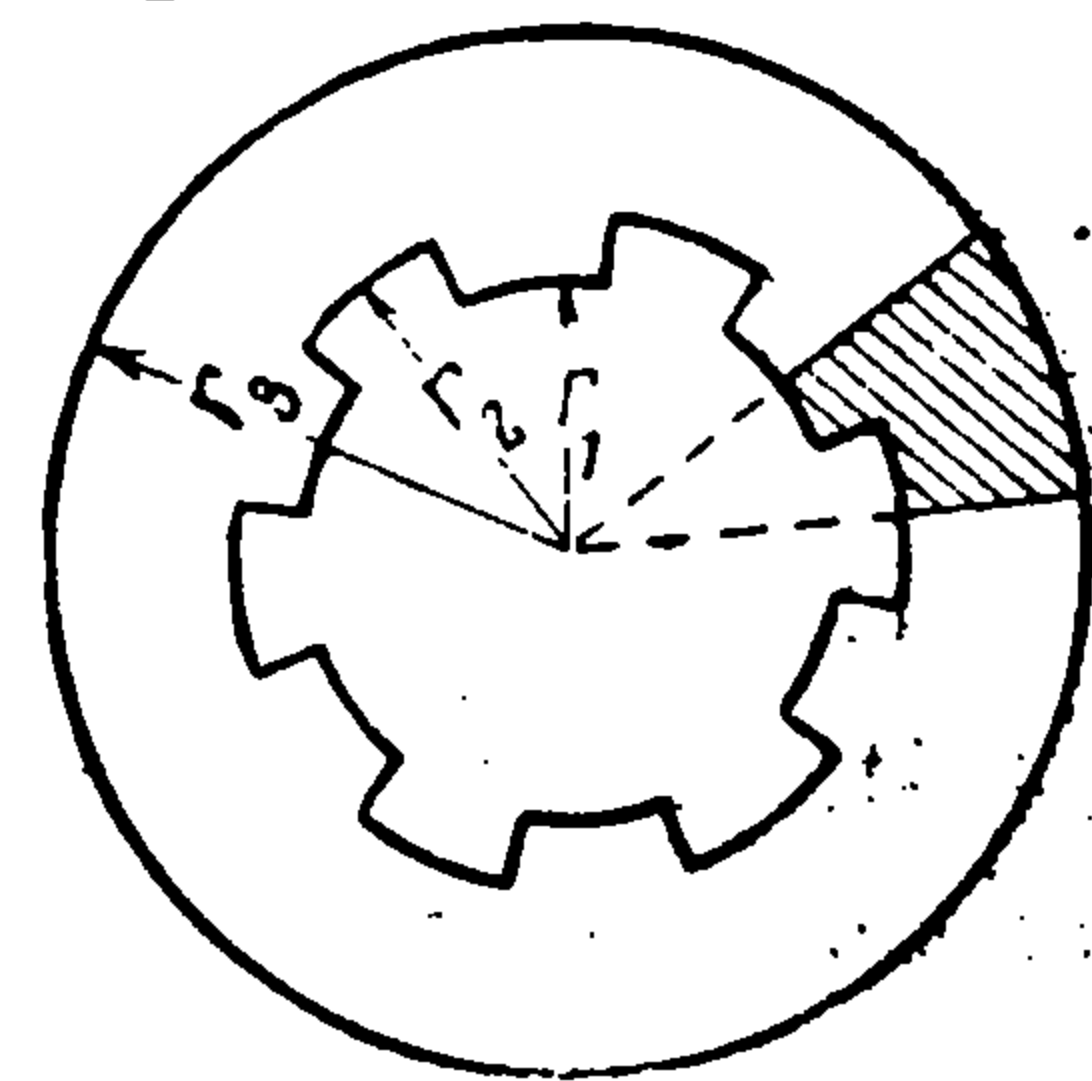
$\frac{\tau_{z\varphi}}{G\tau r_2}$	$(0, \varphi_1)$	$(-\frac{t_1}{2}, \varphi_1)$	$(-t_1, \varphi_1)$	$(t_2, -\varphi_2)$	$(\frac{t_2}{2}, -\varphi_2)$	$(-\frac{t_1}{2}, -\varphi_2)$	$(-t_1, -\varphi_2)$
С недостатком	1.2271	0.8036	0.5446	0.6755	0.5632	0.6114	0.4741
С избытком	1.2278	0.8043	0.5459	0.6757	0.5636	0.6123	0.4754
Среднее	1.2274	0.8040	0.5452	0.6756	0.5634	0.6118	0.4748

Таблица 3

$\frac{\tau_{z\varphi}}{G\tau r_2}$	$(0, \varphi_1)$	$(-\frac{t_1 - \varphi_2}{8}, -\frac{\varphi_2}{4})$	$(-t_1, -\frac{\varphi_2}{4})$	$(-t_1, -\frac{\varphi_2}{2})$	$(-t_1, -\varphi_2)$	$(t_2, -\varphi_2)$	$(\frac{t_2 - \varphi_2}{8}, -\frac{\varphi_2}{8})$
С недостатком	3.3207	0.4705	0.4641	0.4586	0.4559	1.2265	1.0241
С избытком	3.3526	0.4791	0.4726	0.4627	0.4612	1.2379	1.0309
Среднее	3.3366	0.4748	0.4683	0.4606	0.4586	1.2322	1.0275

В табл. 2 и 3 для различных точек (t, φ) сечения приводятся значения напряжений $\tau_{z\varphi}$ соответственно для случаев с шестью зубцами и с одной выточкой. На фиг. 4 и 5 приведены эпюры распределения напряжений в сечениях рассматриваемых стержней.

8. Рассматривается задача о кручении круглого призматического стержня, имеющего центрально расположенную круглую полость с симметричными продольными пазами или зубцами (фиг. 6). Точное решение этой задачи может быть получено таким же путем, как в разделах 1—6.



Фиг. 6

Для решения полагаем, что функция напряжения $U(r, \varphi)$ на внутреннем контуре области сечения обращается в нуль, а на внешнем контуре сечения принимает постоянное значение U_0^* .

Решение ищем в виде (1.3) при предположении, что функция $\Phi(t, \varphi)$ принимает значение (1.5), где области I, II и III указаны на фиг. 7.

Функции $\Phi^i(t, \varphi)$ ($i = 1, 2, 3$) удовлетворяют в рассматриваемых областях уравнению (1.4) и следующим граничным условиям и условиям сопряжения:

$$\begin{aligned} \Phi_1(-t_1, \varphi) - \frac{r_1^2}{2} &= \Phi_1(t, 0) - \frac{r_2^2 e^{2t}}{2} = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=\varphi_1} = 0 \\ \Phi_2(t_2, \varphi) - \Phi_0^* &= \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=\varphi_1} = 0 \\ \Phi_3(t_2, \varphi) - \Phi_0^* &= \Phi_3(0, \varphi) - \frac{r_2^2}{2} = \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=-\varphi_2} = 0 \\ \Phi_1(0, \varphi) &= \Phi_2(0, \varphi), \quad \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right)_{t=0} = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \right)_{t=0} \\ \Phi_2(t, 0) &= \Phi_3(t, 0), \quad \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=0} = \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=0} \end{aligned} \quad (8.1)$$

где

$$t_1 = \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad t_2 = \ln \frac{r_3}{r_2}, \quad \Phi_0^* = U_0^* + \frac{r_3^2}{2} \quad (8.2)$$

9. Решая уравнение (1.4) для функций $\Phi_i(t, \varphi)$ ($i = 1, 2, 3$) методом разделения переменных и удовлетворив условиям (8.1), для этих функций получим выражения

$$\begin{aligned} \Phi_1(t, \varphi) = & \frac{r_2^2}{2} + \frac{r_2^2 - r_1^2}{2t_1} t + \frac{m}{\varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k \operatorname{sh} \alpha_k (t_1 + t)}{\alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1} \sin \alpha_k \varphi + \\ & + \frac{4r_2^2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_1}}{\beta_k (\beta_k^2 + 4)} \frac{\operatorname{ch} \beta_k (\varphi_1 - \varphi)}{\operatorname{ch} \beta_k \varphi_1} \sin \beta_k t \quad (0 \leq \varphi \leq \varphi_1, -t_1 \leq t \leq 0) \end{aligned} \quad (9.1)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(t, \varphi) = & \frac{r_2^2}{2} + \frac{2\Phi_0^* - r_2^2}{2t_2} t + \frac{m}{\varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k \operatorname{sh} \alpha_k (t_2 - t)}{\alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k t_2} \sin \alpha_k \varphi + \\ & + \frac{1}{t_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k \operatorname{ch} \gamma_k (\varphi_1 - \varphi)}{\gamma_k \operatorname{ch} \gamma_k \varphi_1} \sin \gamma_k t \quad (0 \leq \varphi \leq \varphi_1, 0 \leq t \leq t_2) \end{aligned} \quad (9.2)$$

$$\begin{aligned} \Phi_3(t, \varphi) = & \frac{r_2^2}{2} + \frac{2\Phi_0^* - r_2^2}{2t_2} t + \frac{1}{t_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k \operatorname{ch} \gamma_k (\varphi_2 + \varphi)}{\gamma_k \operatorname{ch} \gamma_k \varphi_2} \sin \gamma_k t \\ & (-\varphi_2 \leq \varphi \leq 0, 0 \leq t \leq t_2) \end{aligned} \quad (9.3)$$

где

$$\alpha_k = \frac{(2k-1)\pi}{2\varphi_1}, \quad \beta_k = \frac{k\pi}{t_1}, \quad \gamma_k = \frac{k\pi}{t_2}, \quad m = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (9.4)$$

Постоянные интегрирования X_k и Y_k , входящие в выражения (9.1) — (9.3), определяются из следующей совокупности бесконечных систем линейных уравнений:

$$X_k = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} Y_p, \quad Y_k = \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} X_p + Q_k \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (9.5)$$

где

$$a_{kp} = \frac{2m\gamma_k}{\varphi_1 (\operatorname{th} \gamma_k \varphi_1 + \operatorname{th} \gamma_k \varphi_2) (\gamma_k^2 + \alpha_p^2)} \quad (9.6)$$

$$b_{kp} = \frac{2\alpha_k}{mt_2 (\operatorname{cth} \alpha_k t_1 + \operatorname{cth} \alpha_k t_2) (\alpha_k^2 + \gamma_p^2)}$$

$$\begin{aligned} Q_k = & - \frac{2\alpha_k r_2^2}{m (\alpha_k^2 - 4) (\operatorname{cth} \alpha_k t_1 + \operatorname{cth} \alpha_k t_2)} \times \\ & \times \left[1 + \frac{\alpha_k^2 - 4}{2\alpha_k^2 t_2} \left(1 - \frac{2\Phi_0^*}{r_2^2} \right) - \frac{2}{\alpha_k} \left(\operatorname{cth} \alpha_k t_1 - \frac{e^{-2t_1}}{\operatorname{sh} \alpha_k t_1} \right) \right] \end{aligned} \quad (9.7)$$

Системы (9.5) вполне регулярны, так как имеют место неравенства

$$\sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}| = \frac{2m\gamma_k}{\varphi_1 (\operatorname{th} \gamma_k \varphi_1 + \operatorname{th} \gamma_k \varphi_2)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_p^2 + \gamma_k^2} \leq m = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (9.8)$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} |b_{kp}| = \frac{2\alpha_k}{mt_2 (\operatorname{cth} \alpha_k t_1 + \operatorname{cth} \alpha_k t_2)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_p^2 + \alpha_k^2} \leq \frac{1}{2m} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Постоянное значение Φ_0^* , входящее в выражения (9.1) — (9.3), определяется по теореме Бредта о циркуляции касательного напряжения при кручении.

Эта теорема, примененная к внешнему контуру сечения, выражается соотношением

$$\int_{-\varphi_1}^0 \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial t} \right)_{t=t_2} d\varphi + \int_0^{\varphi_1} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \right)_{t=t_2} d\varphi = 0 \quad (9.9)$$

а после выполнения интегрирования оно принимает вид:

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(2\Phi_0^* - r_2^2) - \frac{2m}{\varphi_1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Y_p}{\alpha_p^2} = 0 \quad (9.10)$$

Здесь также неизвестный коэффициент Y_p , определяемый из бесконечных систем (9.5), выражается через Φ_0^* , и для того чтобы определить Φ_0^* , соотношение (9.10) нужно разрешить относительно Φ_0^* .

10. Пользуясь для рассматриваемого случая формулой (6.1), подставляя туда (1.3) и произведя интегрирование, для жесткости круглого стержня, имеющего центрально расположенную полость с симметричными продольными пазами, получим следующую формулу:

$$C = 2G \left\{ \frac{\pi}{4} (r_3^4 - r_2^4) - \frac{\pi}{4t_2} (2\Phi_0^* - r_2^2) (r_3^2 - r_2^2) + \frac{n\varphi_1}{4} (r_2^4 - r_1^4) - \right. \\ \left. - \frac{n\varphi_1}{4t_1} (r_2^2 - r_1^2)^2 + 2nr_2^2 \left[\frac{m}{\varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k}{\alpha_k (\alpha_k^2 - 4)} (\operatorname{cth} \alpha_k t_1 + \operatorname{cth} \alpha_k t_2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{e^{-2t_1}}{\operatorname{sh} \alpha_k t_1} - \frac{e^{2t_2}}{\operatorname{sh} \alpha_k t_2}) - \frac{r_2^2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \beta_k \varphi_1}{\beta_k (\beta_k^2 + 4)^2} [1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_1}]^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{t_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k [1 + (-1)^{k+1} e^{2t_2}]}{\gamma_k (\gamma_k^2 + 4)} (\operatorname{th} \gamma_k \varphi_1 + \operatorname{th} \gamma_k \varphi_2) \right] \right\} \quad (10.1)$$

В качестве примера приводим значения жесткости при кручении круглого стержня, имеющего центрально расположенную полость с шестью симметричными продольными пазами (фиг. 6), когда

$$\frac{r_2}{r_1} = 1.964, \quad \frac{r_3}{r_2} = 1.964, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{1}{12} \pi \quad (10.2)$$

Значения постоянной Φ_0^* и жесткости C , вычисленные для этого случая по формулам (9.10) и (10.1), приводятся в табл. 4.

Таблица 4

	$\frac{r_3}{r_2} = 1.964$	с 6-ю выточками или зубцами			$\frac{r_3}{r_1} = 3.8573$
		недостатки	избытки	среднее	
$2\Phi_0^*/r_2^2$	1.0	0.9168	0.9195	0.9182	0.2592
C/Gr_2^4	21.801	22.062	22.408	22.074	23.266

В этой же таблице для сравнения приводятся жесткости стержней с сечениями в виде круговых колец с размерами $b/a = r_3/r_2 = 1.964$ и $b/a = r_3/r_1 = 3.8573$.

Поступила
19 IV 1959

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. А р у т ю н я н Н. Х. Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. ПММ, т. XIII, вып. 1, 107—112, 1949; Докл. АН Арм. ССР, т. IX, № 2, 67—74, 1948.
2. А б р а м я н Б. Л. Кручение круглых цилиндрических стержней с продольными пазами клиновидной формы. Докл. АН Арм. ССР, т. XXVIII, № 3, 109—116, 1959.
3. С т е н е с к у и Д у м и т р е с к у (Stănescu Cr., Dumitrescu L.) Torsiunea barelor cilindrice prevăzute cu canal de pană Comun. Acad. RPR 8, No. 6, 563—570, 1958.
4. М а н я (Manea V.) Torsiunea arborelui cu caneluri radiale exterioare Studii si cercetări mec. apl. Acad. RPR, 9, No. 2, 423—433, 1958.
5. К а н т о р о в и ч Л. В., К р ы л о в В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, М.—Л., 1949.